

## Réseaux de Petri

Documents autorisés : cours photocopié, notes de cours, examens des 2 années antérieures

### 1) Modélisation (8 points)

On considère un atelier de fabrication de yaourts fonctionnant par lots. Pour chaque lot, après le lancement de la fabrication, on **attend** que les deux réacteurs R1 et R2 soient **disponibles**, on commence en parallèle et indépendamment par préparer le lait (**chauffage** dans le réacteur R1) et le ferment (**brassage** dans réacteur R2). Quand les deux opérations sont terminées, le lait et le ferment sont simultanément transférés dans le réacteur de fermentation **R3**. On suppose la durée du transfert négligeable. La **fermentation** a alors lieu, puis l'opération consistant à vider le réacteur R3 tout en le **refroidissant** à l'aide de l'échangeur de chaleur **R4** dure également un certain temps. L'installation est alors **prête** pour traiter un nouveau lot.

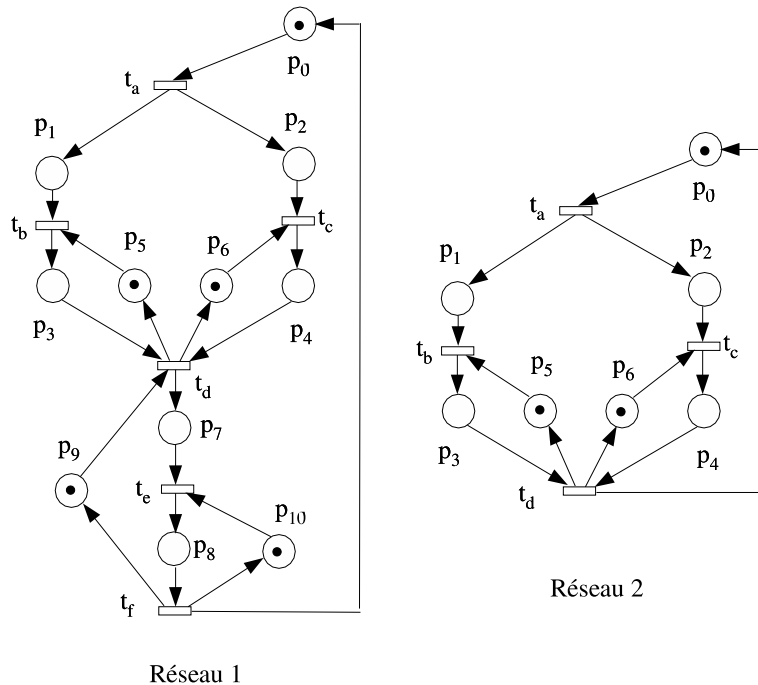


FIG. 1: Les deux réseaux à étudier

a) Montrer que le réseau de Petri “Réseau 1” peut correspondre à la spécification ci-dessus. Donner la signification des places et des transitions.

b) Comment faudrait-il modifier le réseau (ou son marquage initial) pour que l'installation puisse traiter 2 lots simultanément (avec un seul réacteur de chacun des types R1, R2, R3 et R4) ?

c) Comment pourrait-on prendre en compte le fait qu'il y a 2 réacteurs de fermentation R3 ?

d) On souhaite (avec à la fois les modifications effectuées en b) et en c)) fabriquer des lots de yaourts à la vanille et des lots de yaourts au citron. Chaque réacteur R3 est spécialisé, l'un pour la vanille et l'autre pour le citron. Comment pourrait-on représenter ceci par un réseau de Petri coloré ? Donner les ensembles de couleurs des places et des transitions et le marquage initial.

## 2) Analyse (12 points)

On considère d'abord le réseau de Petri "**Réseau 2**".

a) Calculer une base de composantes conservatives positives.

b) Calculer le marquage de la place  $p_5$  en fonction du marquage des places  $p_0$  et  $p_1$  pour tout marquage accessible à partir du marquage initial.

c) Calculer le marquage de la place  $p_6$  en fonction du marquage des places  $p_0$  et  $p_2$  pour tout marquage accessible à partir du marquage initial.

d) En déduire que les places  $p_5$  et  $p_6$  sont implicites dans le réseau "**Réseau 2**" pour le marquage initial donné.

e) Analyser le réseau de Petri "**Réseau 2**" pour le marquage initial donné par réduction en expliquant bien les règles utilisées.

f) Analyser alors le réseau de Petri "**Réseau 1**" pour le marquage initial donné (dans la figure 1 sans prendre en compte les modifications faites ultérieurement) par réduction en expliquant bien les règles utilisées.

## Correction

### Correction de la modélisation

- a) On peut associer les interprétations suivantes aux places et aux transitions :
- Place  $p_0$  : Système prêt pour un nouveau lot,
  - Place  $p_1$  : demande de chauffage du lait en attente,
  - Place  $p_2$  : demande de préparation du ferment en attente,
  - Place  $p_3$  : chauffage du lait dans le réacteur R1,
  - Place  $p_4$  : brassage du ferment dans le réacteur R2,
  - Place  $p_5$  : réacteur R1 disponible,
  - Place  $p_6$  : réacteur R2 disponible,
  - Place  $p_7$  : fermentation dans le réacteur R3,
  - Place  $p_8$  : vidange de R3 et refroidissement à l'aide de l'échangeur R4,
  - Place  $p_9$  : réacteur R3 disponible,
  - Place  $p_{10}$  : échangeur de chaleur R4 disponible,
  - Transition  $t_a$  : lancement de la fabrication d'un lot (interconnexion avec le logiciel d'ordonnancement et de pilotage de l'atelier, la transition est franchie sur demande du logiciel de pilotage de l'atelier),
  - Transition  $t_b$  : début du chauffage (la transition est franchie dès qu'elle est sensibilisée, elle envoie une commande aux contrôleurs locaux des vannes, des pompes et du réacteur R1 pour remplir le réacteur puis activer l'élément de chauffage),
  - Transition  $t_b$  : début du brassage (la transition est franchie dès qu'elle est sensibilisée, elle envoie des commandes aux contrôleurs locaux des vannes, des pompes et du réacteur R2 pour remplir le réacteur puis activer l'élément de brassage),
  - Transition  $t_d$  : début de la fermentation (la transition est franchie sur la demande du logiciel de pilotage - après vérification qu'un temps minimal de chauffage et de brassage a été assuré - elle envoie des commandes aux contrôleurs locaux des vannes, des pompes et des réacteurs R1, R2 et R3 pour arrêter le chauffage et le brassage, assurer le transfert des deux produits dans le réacteur R3 et commander le début du processus de fermentation),
  - Transition  $t_c$  : début du refroidissement (la transition est franchie sur la demande du logiciel de pilotage après vérification que la durée de fermentation est correcte - ni trop courte, ni trop longue - elle envoie des commandes aux contrôleurs locaux des vannes, des pompes, du réacteur R3 et de l'échangeur de chaleur R4 pour terminer la fermentation et assurer un débit correct dans R4),
  - Transition  $t_f$  : fin de fabrication (la transition est franchie dès que l'on détecte que le réacteur R3 est vide, elle envoie des commandes aux contrôleurs locaux des vannes, des pompes du réacteur R3 et de l'échangeur de chaleur R4 et elle communique au logiciel de pilotage et d'ordonnancement de l'atelier que la fabrication du lot est terminée).

**b)** La place  $p_0$  représente le système prêt pour traiter un lot. Si on met deux jetons dans cette place, cela permet de franchir deux fois la transition  $t_a$ . Le logiciel de pilotage et d'ordonnancement de la production peut donc lancer la production de deux lots simultanément. Le marquage initial des places  $p_5$ ,  $p_6$ ,  $p_9$  et  $p_{10}$  n'étant pas modifié, les ressources seront gérées convenablement.

Il n'y a pas de mélange de lots car

- Les transitions  $t_b$  et  $t_c$  ne laissent passer qu'un lot à la fois (unicité des réacteurs R1 et R2),
- la transition  $t_d$  ne peut être franchie que lorsque le réacteur R3 est disponible (un jeton dans la place  $p_9$ ) et ce n'est qu'après son franchissement que  $t_b$  et  $t_c$  peuvent être franchies une seconde fois.

Un marquage du type :

$$(M(p_3) = 1) \wedge (M(p_4) = 1) \wedge (M(p_7) = 1) \wedge (M(p_{10}) = 1)$$

est accessible. Pendant que pour un lot on prépare le ferment et on chauffe le lait, un autre lots est en train de fermenter. En ayant un seul réacteur de chacun des lots, on est donc bien capable d'avoir deux lots simultanément en traitement dans l'atelier (fonctionnement de type "pipe-line"). L'efficacité est augmentée sans addition de matériel.

**c)** Avoir deux réacteurs de fermentation R3 se représente simplement en mettant deux jetons dans la place  $p_9$ . On pourra alors avoir deux jetons dans la place  $p_7$  (mais non dans la place  $p_8$  car il n'y a toujours qu'un échangeur de chaleur R4). Physiquement les deux lots représentés par les deux jetons en  $p_9$  ne vont pas se mélanger puisqu'il sont dans deux réacteurs différents. Par contre, avec un réseau de Petri ordinaire, le logiciel de pilotage n'est pas capable de les différencier.

Le réseau de la figure 2 représente le réseau avec le marquage initial correspondant aux questions b) et c).

Une autre solution est possible, elle consiste à dédoubler les places  $p_9$ ,  $p_7$  et  $p_8$  ainsi que les transitions  $t_d$ ,  $t_e$  et  $t_f$ . On obtient le réseau de Petri de la figure 3. Le logiciel de pilotage peut alors bien identifier et différencier les deux réacteurs de type R3, mais c'est au prix d'une forte augmentation de la taille du réseau.

**d)** On souhaite cumuler les avantages des représentations fournies par les réseaux des figures 2 et 3. On suppose que le logiciel de pilotage en temps réel fait la distinction dès la phase de préparation du ferment et de chauffage du lait entre les lots de yaourts à la vanille et ceux de yaourts au citron.

Prenons comme ensemble de couleurs l'ensemble suivant.

$$C_{oul} = \{v, c, R1, R2, R4\} \quad (1)$$

Nous avons alors les sous-ensembles de couleurs suivants :

$$\begin{aligned} C_{sec}(p_0) &= C_{sec}(p_1) = C_{sec}(p_2) = C_{sec}(p_3) = C_{sec}(p_4) = C_{sec}(p_7) = C_{sec}(p_8) = C_{sec}(p_9) \\ &= C_{sec}(t_a) = C_{sec}(t_b) = C_{sec}(t_c) = C_{sec}(t_d) = C_{sec}(t_e) = C_{sec}(t_f) \\ &= \{v, c\} \end{aligned} \quad (2)$$

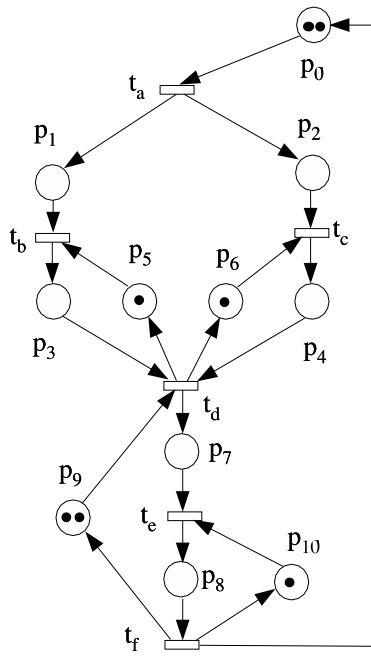


FIG. 2: Réseau avec marquage initial modifié

$$C_{sec}(p_5) = \{R1\} \tag{3}$$

$$C_{sec}(p_6) = \{R2\} \tag{4}$$

$$C_{sec}(p_{10}) = \{R4\} \tag{5}$$

Le marquage initial (sous la forme d'une somme formelle) est :

$$M_0 = \begin{bmatrix} v + c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R1 \\ R2 \\ 0 \\ 0 \\ v + c \\ R4 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Nous avons les fonctions suivantes associées aux arcs :

$$id = \begin{matrix} & v & c \\ v & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{7}$$

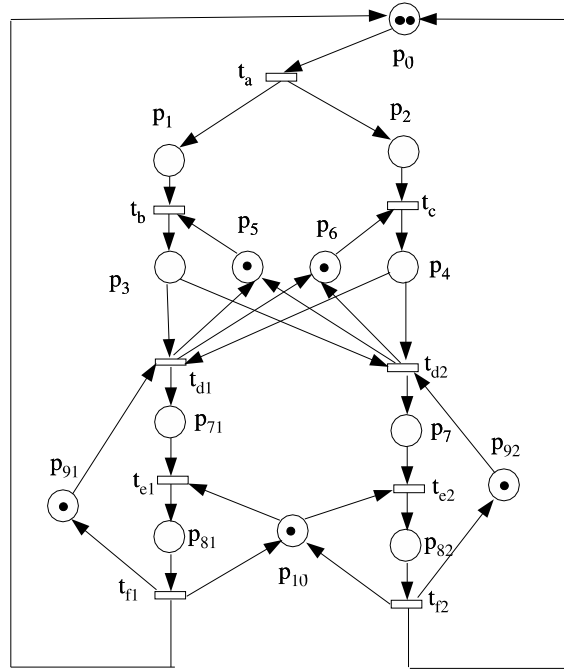


FIG. 3: Réseau modifié

$$r1 = v \begin{bmatrix} R1 \\ 1 \\ c \\ 1 \end{bmatrix} \quad r2 = v \begin{bmatrix} R2 \\ 1 \\ c \\ 1 \end{bmatrix} \quad r4 = v \begin{bmatrix} R4 \\ 1 \\ c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Le réseau de Petri est donné par la figure 4 où la fonction  $id$  est la fonction identité et les fonctions  $ri$  correspondent à un jeton  $Ri$  pour les deux façons de franchir  $v$  et  $c$ . L'association du réacteur "vanille" ( $v$ ) à un lot "vanille" ( $v$ ) se fait par le fait que la fonction  $id$  est associée aux arcs  $(p_3, t_d)$  et  $(p_4, t_d)$ .

Une autre solution consiste à associer la couleur  $l$  (lot) aux lots et à ne choisir de faire des lots "vanille" ou "citron" que lors du franchissement de la transition  $t_d$ . On obtient alors le réseau de la figure 5 et les ensembles de couleurs suivants.

$$C_{out} = \{v, c, l, R1, R2, R4\} \quad (9)$$

Nous avons alors les sous-ensembles de couleurs suivants :

$$C_{sec}(p_0) = C_{sec}(p_1) = C_{sec}(p_2) = C_{sec}(p_3) = C_{sec}(p_4) \\ = C_{sec}(t_a) = C_{sec}(t_b) = C_{sec}(t_c) = \{l\} \quad (10)$$

$$C_{sec}(p_7) = C_{sec}(p_8) = C_{sec}(p_9) = C_{sec}(t_d) = C_{sec}(t_e) = C_{sec}(t_f) = \{v, c\} \quad (11)$$

$$C_{sec}(p_5) = \{R1\} \quad (12)$$

$$C_{sec}(p_6) = \{R2\} \quad (13)$$

$$C_{sec}(p_{10}) = \{R4\} \quad (14)$$

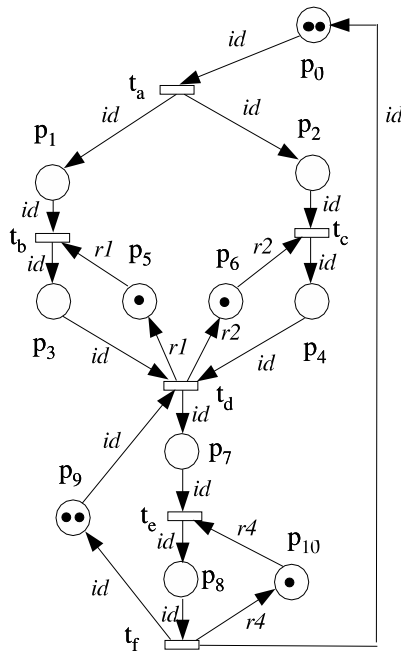


FIG. 4: Réseau coloré, première solution

Le marquage initial (sous la forme d'une somme formelle) est :

$$M_0 = \begin{bmatrix} 2.l \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R1 \\ R2 \\ 0 \\ 0 \\ v + c \\ R4 \end{bmatrix} \tag{15}$$

La fonction *lot* retourne *l* pour les façons de franchir *v* et *c*. Lors du franchissement de la transition *t<sub>d</sub>* c'est le logiciel de pilotage en temps réel qui devra choisir entre *v* et *c*. Dans le cas précédent ce choix se faisait lors du franchissement de *t<sub>a</sub>* si la place *p<sub>0</sub>* contenait un jeton *v* et un jeton *c*.

Il est à remarquer, que de toute façon, pour pouvoir commander correctement les vannes et les pompes, le logiciel de pilotage en temps réel doit pouvoir différencier les réacteurs de fermentation, même s'ils jouent un rôle identique. La représentation sous la forme d'un réseau de Petri coloré est donc de toute façon nécessaire dans la pratique.

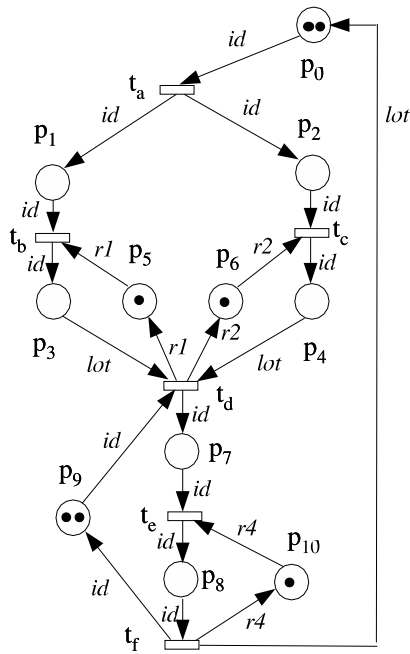


FIG. 5: Réseau coloré, deuxième solution

### Correction de l'analyse

a) Construisons d'abord la matrice d'incidence  $C$  du réseau de Petri et cherchons la base des solutions de l'équation (inconnue  $f$ ,  $T$  est le symbole de transposition des matrices) :

$$C^T \cdot f = 0 \tag{16}$$

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} t_a & t_b & t_c & t_d \end{matrix} \\ \begin{matrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{17}$$

Il n'y a aucune colonne ne comprenant qu'un élément différent de zéro, par contre toutes les colonnes, sauf  $t_d$ , sont dans le cas où, il n'y a qu'un seul élément d'un signe donné. Prenons par exemple la colonne  $t_a$ . Elle sera éliminée, ainsi que la ligne  $p_0$  après remplacement de la ligne  $p_1$  par  $p_0 + p_1$  et

de la ligne  $p_2$  par  $p_0 + p_2$ . Nous obtenons alors la matrice  $C_1$ .

$$C_1 = \begin{array}{c} p_0 + p_1 \\ p_0 + p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array} \begin{array}{c} t_b \quad t_c \quad t_d \\ \left[ \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad (18)$$

Nous sommes dans la même situation. Prenons la colonne  $t_b$  et éliminons la ligne  $p_3$  après avoir remplacé  $p_0 + p_1$  par  $p_0 + p_1 + p_3$  et  $p_5$  par  $p_3 + p_5$ . Nous obtenons la matrice  $C_2$ .

$$C_2 = \begin{array}{c} p_0 + p_1 + p_3 \\ p_0 + p_2 \\ p_4 \\ p_3 + p_5 \\ p_6 \end{array} \begin{array}{c} t_c \quad t_d \\ \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad (19)$$

Maintenant nous éliminons la colonne  $t_c$  et la ligne  $p_4$  après avoir remplacé la ligne  $p_0 + p_2$  par  $p_0 + p_2 + p_4$  et la ligne  $p_6$  par  $p_4 + p_6$ . Nous obtenons la matrice  $C_3$  qui est une matrice nulle.

$$C_3 = \begin{array}{c} p_0 + p_1 + p_3 \\ p_0 + p_2 + p_4 \\ p_3 + p_5 \\ p_4 + p_6 \end{array} \begin{array}{c} t_d \\ \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \end{array} \quad (20)$$

Nous obtenons donc une base de composantes conservatives positives formée des quatre vecteurs  $f^1, f^2, f^3$  et  $f^4$  suivants :

$$f^1 = \begin{array}{c} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{array} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \end{array} \quad f^2 = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \end{array} \quad f^3 = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \end{array} \quad f^4 = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \end{array} \quad (21)$$

**b)** La base obtenue donne les 4 invariants de place suivants :

$$M(p_0) + M(p_1) + M(p_3) = 1 \quad (22)$$

$$M(p_0) + M(p_2) + M(p_4) = 1 \quad (23)$$

$$M(p_3) + M(p_5) = 1 \quad (24)$$

$$M(p_4) + M(p_6) = 1 \quad (25)$$

En retranchant l'équation 22 de l'équation 24, nous obtenons :

$$M(p_5) = M(p_0) + M(p_1) \quad (26)$$

c) En retranchant l'équation 23 de l'équation 25, nous obtenons :

$$M(p_6) = M(p_0) + M(p_2) \quad (27)$$

d) Pour qu'une place soit implicite par rapport à un ensemble de places, il faut que l'on puisse calculer à tout instant son marquage en fonction de celui des autres places et que ce calcul permette de montrer que la place implicite ne restreint jamais le franchissement de ses transitions aval.

Considérons la place  $p_5$ . L'expression 26 donne son marquage en fonction des places  $p_0$  et  $p_1$ . Elle n'a qu'une transition aval, la transition  $t_b$ . Pour que  $t_b$  soit franchissable, il faut nécessairement que la place  $p_1$  contienne au moins un jeton. Or de l'expression 26 on peut déduire que  $M(p_1) \geq 1$  implique  $M(p_5) \geq 1$  ( $M(p_0)$  est un nombre positif ou nulle). Donc la place  $p_5$  ne peut jamais restreindre le franchissement de  $t_b$ . S'il y a assez de jetons dans la place  $p_1$  il y n a assez dans la place  $p_5$ . Donc la place  $p_5$  est implicite par rapport aux places  $p_0$  et  $p_1$ .

Considérons la place  $p_6$ . L'expression 27 donne son marquage en fonction des places  $p_0$  et  $p_2$ . Elle n'a qu'une transition aval, la transition  $t_c$ . Pour que  $t_c$  soit franchissable, il faut nécessairement que la place  $p_2$  contienne au moins un jeton. Or de l'expression 27 on peut déduire que  $M(p_2) \geq 1$  implique  $M(p_6) \geq 1$ . Donc la place  $p_6$  est implicite par rapport aux places  $p_0$  et  $p_2$ .

e) Commençons par éliminer les places  $p_5$  et  $p_6$  puisqu'elles sont implicites. Nous obtenons le réseau de la figure 6.

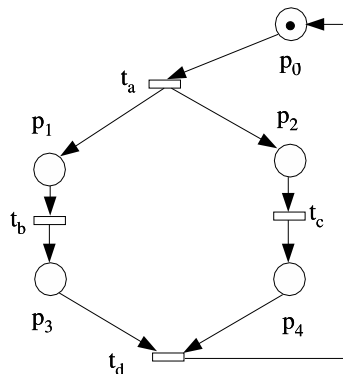
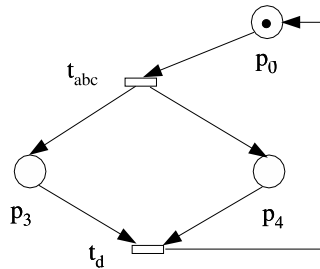
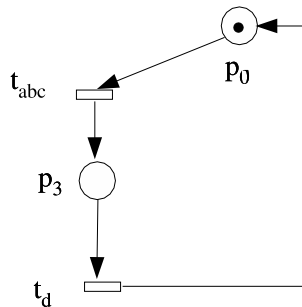


FIG. 6: Élimination des places  $p_5$  et  $p_6$

Maintenant (et seulement maintenant), les places  $p_1$  et  $p_2$  sont substituables. En effet, le franchissement de la transition  $t_a$  entraîne nécessairement celui de  $t_b$  (et de  $t_c$ ). Il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante. De plus le marquage initial de ces deux places est égal à 0 et les transitions de

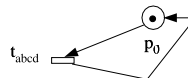
FIG. 7: Élimination des places  $p_1$  et  $p_2$ 

sortie de ces deux places possèdent chacune une place en sortie (respectivement  $p_3$  et  $p_4$ ). Donc nous aurons l'équivalence vis-à-vis des trois bonnes propriétés après élimination des deux places substituables  $p_1$  et  $p_2$ . Nous obtenons le réseau de Petri de la figure 7.

FIG. 8: Élimination de la place  $p_4$ 

Maintenant la place  $p_4$  est identique à la place  $p_3$ . Elles possèdent les mêmes places en entrée et en sortie et leurs marquages initiaux sont égaux (il est nul). Nous pouvons donc supprimer la place  $p_4$  (c'est un cas particulier de place implicite) et nous obtenons le réseau de la figure 8.

**Remarque :** Attention, la place  $p_3$  n'est pas substituable avant l'élimination de la place  $p_4$  par la règle " $p_4$  est identique à  $p_3$ ". En effet, la transition  $t_d$  n'a pas qu'une seule place en entrée avant l'élimination de  $p_4$ .

FIG. 9: Élimination de la place  $p_3$ 

Maintenant la place  $p_3$  est substituable. Elle ne sert plus que de relais entre les transitions  $t_{abc}$  et  $t_d$ . Son marquage initial est nul et la transition  $t_d$  possède la place  $p_0$  en sortie. Donc nous avons équivalence vis-à-vis des trois bonnes propriétés. Nous obtenons le réseau de Petri de la figure 9.

Maintenant, la place  $p_0$  est implicite dégénérée. Elle n'est reliée au reste du réseau de Petri que par une boucle élémentaire et son marquage initial est suffisant pour franchir sa transition de sortie ( $t_{abc}$ ). On obtient alors le réseau de Petri de la figure 10. Il s'agit du réseau complètement réduit qui est *borné*, *vivant* et *réinitialisable*. Comme lors du processus de réduction nous avons toujours eu équivalence vis-à-vis des trois bonnes propriétés, le réseau "Réseau 2" est *borné*, *vivant* et *réinitialisable* pour son marquage initial.

f) On ne peut pas directement éliminer les places  $p_5$  et  $p_6$  du réseau de Petri "Réseau1" car le réseau est différent et rien ne nous prouve que ces places sont également implicite dans ce réseau. Par contre nous allons commencer à réduire le réseau "Réseau 1" jusqu'à obtenir le réseau "Réseau 2" pour pouvoir alors récupérer les résultats des questions précédentes.

La place  $p_8$  est substituable. Elle ne sert que de relais entre les transitions  $t_e$  et  $t_f$ . Elle n'est pas initialement marquée et la transition  $t_f$  possède la place  $p_{10}$  en sortie. Donc nous avons équivalence vis-à-vis des trois bonnes propriétés. Nous obtenons le réseau de Petri de la figure 11.

Maintenant la place  $p_{10}$  est implicite dégénérée. Elle n'est reliée au reste du réseau de Petri que par une boucle élémentaire et son marquage initial est suffisant pour franchir sa transition de sortie ( $t_{ef}$ ). Nous obtenons le réseau de Petri de la figure 12.

Maintenant la place  $p_7$  est substituable. Le franchissement de la transition  $t_d$  est une condition suffisante pour franchir  $t_{ef}$  et cette dernière sera nécessairement franchie. Le marquage initial de  $p_7$  est nul et sa transition de sortie ( $t_{ef}$ ) possède une place en sortie ( $p_0$  par exemple). Donc nous avons équivalence vis-à-vis des trois bonnes propriétés. Nous obtenons le réseau de Petri de la figure 13.

Maintenant la place  $p_9$  est implicite dégénérée car elle n'est reliée au réseau de Petri que par une boucle élémentaire et son marquage initial est suffisant pour franchir sa transition de sortie ( $t_{def}$ ). Nous obtenons alors le réseau de Petri de la figure 14.

Ce réseau de Petri est identique au réseau "Réseau 2". il est donc *borné*, *vivant* et *réinitialisable* pour son marquage initial. Donc le réseau de Petri "Réseau 1" est *borné*, *vivant* et *réinitialisable* pour son marquage initial.

**Remarque** Il est à noter que cette preuve est fondée sur l'utilisation des équations 26 et 27 qui dépendent du marquage initial respectif des places  $p_0$ ,  $p_5$  et  $p_6$ . Si on rajoute des jetons initialement dans la place  $p_0$ , par exemple, sans en ajouter dans les places  $p_5$  et  $p_6$ , la preuve est caduque. Les places  $p_5$  et  $p_6$  ne sont plus implicites (ce qui ne veut pas dire que le réseau n'a plus les bonnes propriétés...).

$t_{abcd} \square$

FIG. 10: Élimination de la place  $p_0$

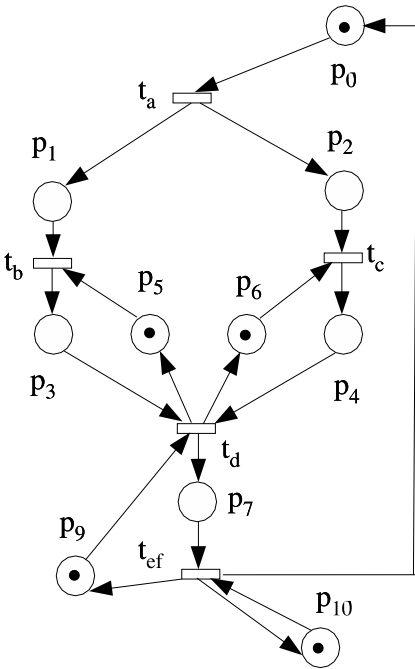


FIG. 11: Élimination de la place  $p_8$

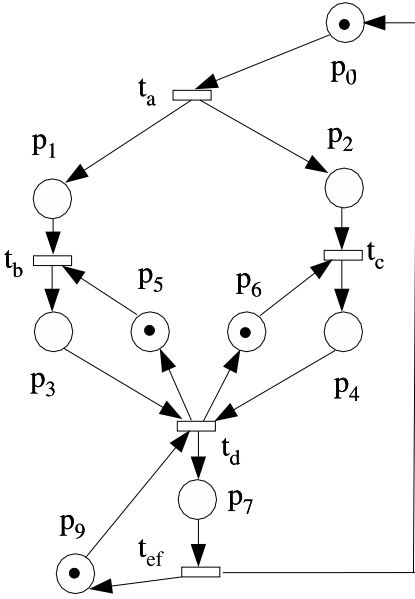


FIG. 12: Élimination de la place  $p_{10}$

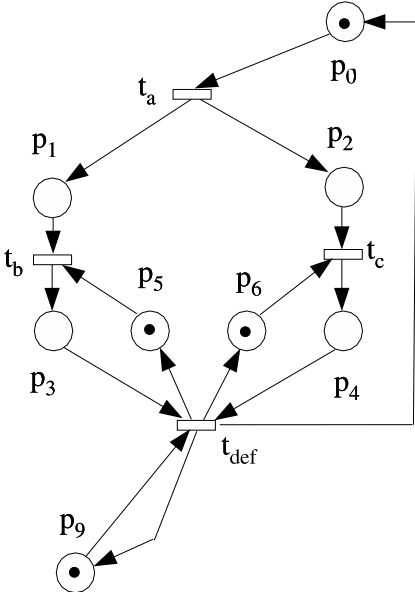


FIG. 13: Élimination de la place  $p_7$

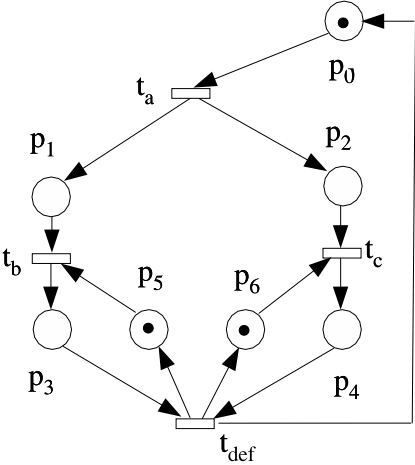


FIG. 14: Élimination de la place  $p_9$