

Réseaux de Petri

Documents autorisés : cours polycopié et notes de cours
Durée 1 heure

Problème 1 : On considère le réseau de Petri (partie gauche) de la figure 1.

Considérons un système de gestion des ressources dans un petit aéroport. On dispose de 4 salles d'embarquement et de 3 passerelles. Pour les vols au départ, il faut d'abord réserver une salle d'embarquement libre ("**e.libre**") pour exécuter l'événement "**dEr**" ("début d'enregistrement") ce qui permet d'exécuter l'activité "**Er**" ("enregistrement"). Ensuite, tout en maintenant la salle d'embarquement réservée, pour réaliser l'événement "**dEb**" ("début d'embarquement") il faut réserver une passerelle libre ("**p.libre**"). Cela permet d'exécuter l'activité "**Eb**" ("embarquement"). Enfin l'événement "**fEb**" ("fin d'embarquement") entraîne la libération de la salle d'embarquement et de la passerelle. Pour les vols à l'arrivée, il faut réserver une passerelle disponible pour l'événement "**dD**" ("début de débarquement") ce qui permet d'exécuter l'activité "**D**" ("débarquement"). L'événement "**fD**" termine cette activité en libérant la ressource passerelle.

1) Montrer que ce système peut être représenté par le réseau de Petri de la figure 1 en associant les états et les activités à des places et les événements à des transitions.

2) Analyser les "bonnes propriétés" par réduction (bien justifier les règles). Les résultats seraient-ils modifiés si l'on agrandissait l'aéroport en rajoutant des salles d'embarquement et des passerelles ?

3) Chercher une base de composantes conservatives positives. Que peut-on en déduire ?

4) Chercher une base de composantes répétitives stationnaires positives. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 : On considère le réseau de Petri de la partie droite de la figure 1 (attention au poids de l'arc (p_5, t_d)).

1) Analyser les "bonnes propriétés" par réduction (bien justifier les règles).

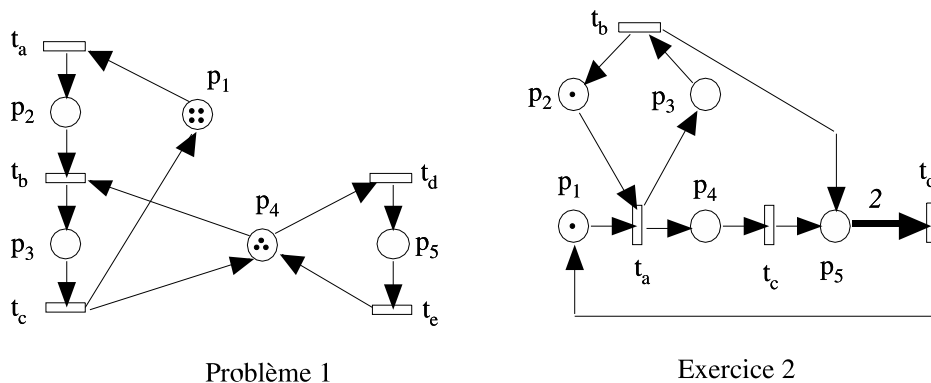


FIG. 1 – Les deux réseaux à étudier

Correction du Problème 1

1) On peut en effet faire les associations suivantes :

- la place p_1 représente l'état "e_libre", $M_0(p_1) = 4$ car il y a 4 salles d'embarquement,
- la place p_2 représente l'activité "Er",
- la place p_3 représente l'activité "Eb",
- la place p_4 représente l'état "p_libre", $M_0(p_4) = 3$ car il y a 3 passerelles,
- la place p_5 représente l'activité "D",
- la transition t_a représente l'événement "dEr" comprenant l'action de réservation d'une salle d'embarquement
- la transition t_b représente l'événement "dEb",
- la transition t_c représente l'événement "fEb",
- la transition t_d représente l'événement "dD",
- la transition t_e représente l'événement "fD".

2) Deux places sont substituables. Il s'agit des places p_3 et p_5 . Leur transition de sortie (respectivement t_c et t_e) n'ont pas d'autre place en entrée, ce qui veut dire que le franchissement de leur transitions d'entrée (respectivement t_b et t_e) rend inévitable le franchissement de leurs transitions de sortie. De plus pour le marquage initial ces deux places sont vides ($M_0(p_3) = 0$ et $M_0(p_5) = 0$). Enfin ces deux places sont telles que leurs transitions de sortie possèdent elles mêmes des places en sortie (la place p_4 par exemple dans les deux cas). Donc on peut supprimer ces places en conservant l'équivalence vis-à-vis des trois bonnes propriétés entre le réseau réduit et le réseau initial. Nous obtenons le réseau de Petri de la figure 2.

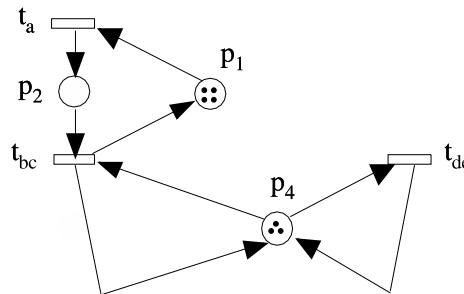


FIG. 2 – Le réseau après élimination des places redondantes

Attention la place p_2 n'est pas substituable car la transition t_b possède également la place p_4 en entrée. Il peut y avoir des marquages accessibles à partir du marquage initial tel que cette place soit vide.

Maintenant la place p_4 est implicite dégénérée. En effet elle n'est reliée au reste du réseau de Petri que par des boucles élémentaires (son marquage est donc constant). La condition pour que cette place puisse être éliminée en ayant l'équivalence vis-à-vis des trois bonnes propriétés est

$$M_0(p_4) \geq 1 \quad (1)$$

Cette condition est bien entendu vérifiée puisque initialement la place compte 3 jetons. Nous obtenons alors le réseau de Petri de la figure 3.

Ce n'est que dans cette étape que la place p_2 est substituable (l'arc reliant la place p_4 à la transition t_b , devenue t_{bc} ayant été éliminé). Son marquage initial étant $M_0(p_2) = 0$ et la place p_1 étant place de sortie de t_{bc} nous avons l'équivalence vis-à-vis des trois bonnes propriétés entre le réseau réduit et le réseau de départ. Nous obtenons alors le réseau de la figure 4.

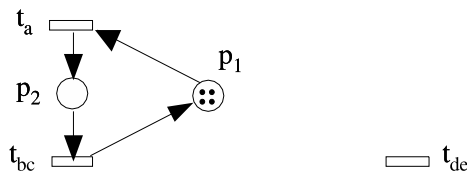


FIG. 3 – Le réseau après élimination de la place implicite

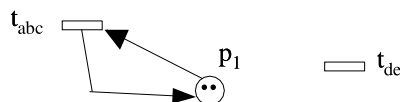


FIG. 4 – Le réseau après élimination de la place p_2

Maintenant la place p_1 est implicite dégénérée car elle n'est reliée au reste du réseau de Petri que par des boucles élémentaires. La condition pour qu'elle puisse être éliminée est

$$M_0(p_1) \geq 1 \tag{2}$$

est remplie puisque $M_0(p_1) = 4$. Nous obtenons alors le réseau de Petri de la figure 5.

Dans ce réseau de Petri il y a deux transitions identiques, et l'une peut être éliminée ce qui produit le réseau complètement réduit (ne comprenant qu'une unique transition) de la figure 6. Ce réseau est borné, vivant et réinitialisable pour son marquage initial. Comme nous avons chaque fois conservé l'équivalence vis-à-vis des trois bonnes propriétés lors de chaque réduction, le réseau de Petri à gauche de la figure 1 est *k-borné, vivant et réinitialisable* pour son marquage initial.

Pour pouvoir mener à bien la réduction, il faut, en particulier, que le marquage initial du réseau de Petri vérifie les inéquations 1 et 2. Or $M_0(p_1)$ représente le nombre de salles d'embarquement et $M_0(p_4)$ représente le nombre de passerelles. Donc il suffit que l'aéroport comporte au moins une salle d'embarquement et au moins une passerelle pour que le comportement spécifié par le réseau de Petri soit logiquement cohérent, c'est-à-dire qu'il soit *k-borné, vivant et réinitialisable*. On peut donc agrandir l'aéroport tout en conservant ce comportement.

3) Construisons d'abord la matrice d'incidence C du réseau de Petri et cherchons la base des solutions de l'équation (inconnue f , T est le symbole de transposition des matrices) :

$$C^T \cdot f = 0 \tag{3}$$

$$C = \begin{matrix} & t_a & t_b & t_c & t_d & t_e \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{4}$$

Il n'y a aucune colonne ne comprenant qu'un élément différent de zéro, par contre toutes les colonnes sont dans le cas où, il n'y a qu'un seul élément d'un signe donné. Prenons par exemple la colonne t_a . Elle sera éliminée,

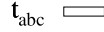
FIG. 5 – Le réseau après élimination de la place p_1 

FIG. 6 – Le réseau complètement réduit

ainsi que la ligne p_1 après remplacement de la ligne p_2 par $p_1 + p_2$. Nous obtenons alors la matrice C_1 .

$$C_1 = \begin{array}{c} p_1 + p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{array} \begin{array}{cccc} t_b & t_c & t_d & t_e \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (5)$$

On se retrouve dans la situation précédente, c'est-à-dire que toutes les colonnes sont dans le cas où, il n'y a qu'un seul élément d'un signe donné. Prenons par exemple la colonne t_b . Elle sera éliminée, ainsi que la ligne p_3 après remplacement de la ligne $p_1 + p_2$ par $p_1 + p_2 + p_3$ et de la ligne p_4 par $p_3 + p_4$. Nous obtenons alors la matrice C_2 .

$$C_2 = \begin{array}{c} p_1 + p_2 + p_3 \\ p_3 + p_4 \\ p_5 \end{array} \begin{array}{ccc} t_c & t_d & t_e \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (6)$$

Nous continuons maintenant avec la colonne t_d en éliminant la ligne p_5 après remplacement de la ligne $p_3 + p_4$ par $p_3 + p_4 + p_5$ et nous obtenons la matrice C_3 .

$$C_3 = \begin{array}{c} p_1 + p_2 + p_3 \\ p_3 + p_4 + p_5 \end{array} \begin{array}{cc} t_c & t_e \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad (7)$$

La matrice C_3 ne comporte que des zéros, ce qui veut dire que nous avons trouvé deux variables libres. La base de composantes conservatives comporte donc les deux vecteurs f^1 et f^2 suivants :

$$f^1 = \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f^2 = \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Il s'agit d'une base de composante conservatives positives (il n'y a pas de composante négatives) qui est telle que chaque place appartient à au moins un vecteur de la base. Il existe donc une couverture de composantes conservatives positive. Ici par exemple le vecteur $f^{12} = f^1 + f^2$ affecte une pondération positive à chaque place (f_i^j est le poids associé à la place p_i pour la composante f^j). Donc *le réseau de Petri est k-borné pour tout marquage initial*. Ce résultat est cohérent avec la réponse trouvée en 2).

Ecrivons pour chaque vecteur de la base f^1 et f^2 , l'invariant de place correspondant $(f^i)^T \cdot M = (f^i)^T \cdot M_0$.

$$M(p_1) + M(p_2) + M(p_3) = 4 \quad (9)$$

$$M(p_3) + M(p_4) + M(p_5) = 3 \quad (10)$$

De 9 nous déduisons $M(p_1) \leq 4$, $M(p_2) \leq 4$ et $M(p_3) \leq 4$. De 10 nous déduisons $M(p_3) \leq 3$, $M(p_4) \leq 3$ et $M(p_5) \leq 3$. La borne obtenue pour la place p_3 donnée par 10 est la meilleure.

4) Il faut maintenant chercher une base de composantes répétitives stationnaires, c'est-à-dire chercher une base positives de solutions de l'équation (inconnue \bar{s}) :

$$C \cdot \bar{s} = 0 \quad (11)$$

On repart de la matrice C (formule 4) et on applique le même algorithme, mais en interchangeant les lignes et les colonnes. On remarque que la première ligne (p_1) comprend un seul élément strictement positif et un seul élément strictement négatif. On peut donc éliminer cette ligne (et la colonne t_a) après avoir remplacé la colonne t_c par $t_a + t_c$. Cela donne :

$$C_4 = \begin{matrix} & & t_b & t_a + t_c & t_d & t_e \\ \begin{matrix} p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (12)$$

On voit que l'on peut encore éliminer la première ligne et la première colonne après avoir remplacé la colonne $t_a + t_c$ par $t_a + t_b + t_c$. On obtient :

$$C_5 = \begin{matrix} & & t_a + t_b + t_c & t_d & t_e \\ \begin{matrix} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (13)$$

On recommence la même procédure avec la ligne p_4 et la colonne t_d en remplaçant la colonne t_e par $t_d + t_e$. On obtient :

$$C_6 = \begin{matrix} & & t_a + t_b + t_c & t_d + t_e \\ \begin{matrix} p_3 \\ p_5 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (14)$$

La base de composantes répétitives stationnaires est donc formée des deux vecteurs positifs :

$$\bar{s}^1 = \begin{matrix} \bar{s}_1 \\ \bar{s}_2 \\ \bar{s}_3 \\ \bar{s}_4 \\ \bar{s}_5 \end{matrix} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad \bar{s}^2 = \begin{matrix} \bar{s}_1 \\ \bar{s}_2 \\ \bar{s}_3 \\ \bar{s}_4 \\ \bar{s}_5 \end{matrix} \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] \quad (15)$$

Nous avons donc une couverture de composantes répétitives stationnaires positives puisque toutes les transitions ont une pondération non nulle dans au moins un vecteur. Cela veut dire qu'il est possible que le réseau de Petri soit à la fois k-borné et vivant pour le marquage initial donné. Ce résultat est cohérent avec la réponse trouvée en 2).

À partir de ces composantes, on trouve deux séquences cycliques qui sont effectivement franchissables depuis le marquage initial M_0 . Il s'agit des séquences :

$$s^1 = t_a; t_b; t_c \quad (16)$$

$$s^2 = t_d; t_e \quad (17)$$

Elles correspondent bien aux deux procédures de base décrites dans l'énoncé. La séquence 16 correspond à la procédure d'embarquement des passagers, alors que la séquence 17 correspond au débarquement.

Correction de l'Exercice 2

1) Les transitions t_c et t_b n'ont qu'un seul arc en entrée. Les places p_3 et p_4 n'ont qu'une transition en entrée et une en sortie. Le franchissement de t_a rend donc inévitable celui de t_b et celui de t_c . De plus le marquage initial M_0 du réseau de Petri est tel que $M_0(p_3) = 0$ et $M_0(p_4) = 0$. Enfin les transitions de sortie de ces places possèdent au moins une place en sortie (la place p_5 par exemple). Les places p_3 et p_4 sont donc substituables avec une équivalence des trois bonnes propriétés entre le réseau initial et le réseau réduit. Nous obtenons après l'élimination de ces deux places le réseau de Petri de la figure 7.

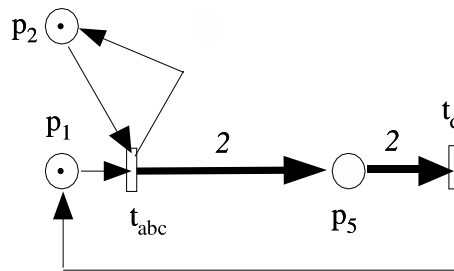


FIG. 7 – Le réseau après élimination des places p_3 et p_4

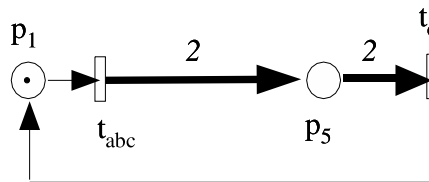


FIG. 8 – Le réseau après élimination de la place p_2

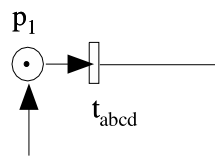


FIG. 9 – Le réseau après élimination de la place p_5

Attention à l'apparition du poids "2" sur l'arc reliant la transition t_{abc} à la place p_5 . Il résulte de la fusion de l'arc reliant t_b à p_5 avec l'arc reliant t_c à p_5 . Deux jetons sont effectivement produits dans la place p_5 par le franchissement de la séquence " $t_a; t_b; t_c$ ".

Maintenant, la place p_2 est implicite dégénérée car elle n'est reliée au reste du réseau de Petri que par une boucle élémentaire. Son marquage initial est égal à un, ce qui est suffisant pour autoriser le franchissement de la transition t_{abc} . Elle peut donc être éliminée, ce qui donne le réseau de Petri de la figure 8.

Maintenant la place p_5 est substituable puisque le poids de son arc d'entrée est égal au poids de son arc de sortie et que la transition t_d n'a aucune autre place en entrée. De plus initialement elle est vide et sa transition de sortie (t_d) possède une place en sortie (p_1). Elle peut donc être éliminée. Son élimination donne le réseau de la



FIG. 10 – Le réseau complètement réduit

figure 9. Dans ce nouveau réseau la place p_1 est implicite dégénérée. Son marquage initial est suffisant et elle peut être éliminée. Nous obtenons alors le réseau complètement réduite de la figure 10.

Comme nous avons appliqué les règles de réduction dans des conditions qui assurent l'équivalence vis-à-vis des trois bonne propriétés, le réseau de Petri de la partie droite de la figure 1 est *k-borné, vivant et réinitialisable pour le marquage initial donné*.