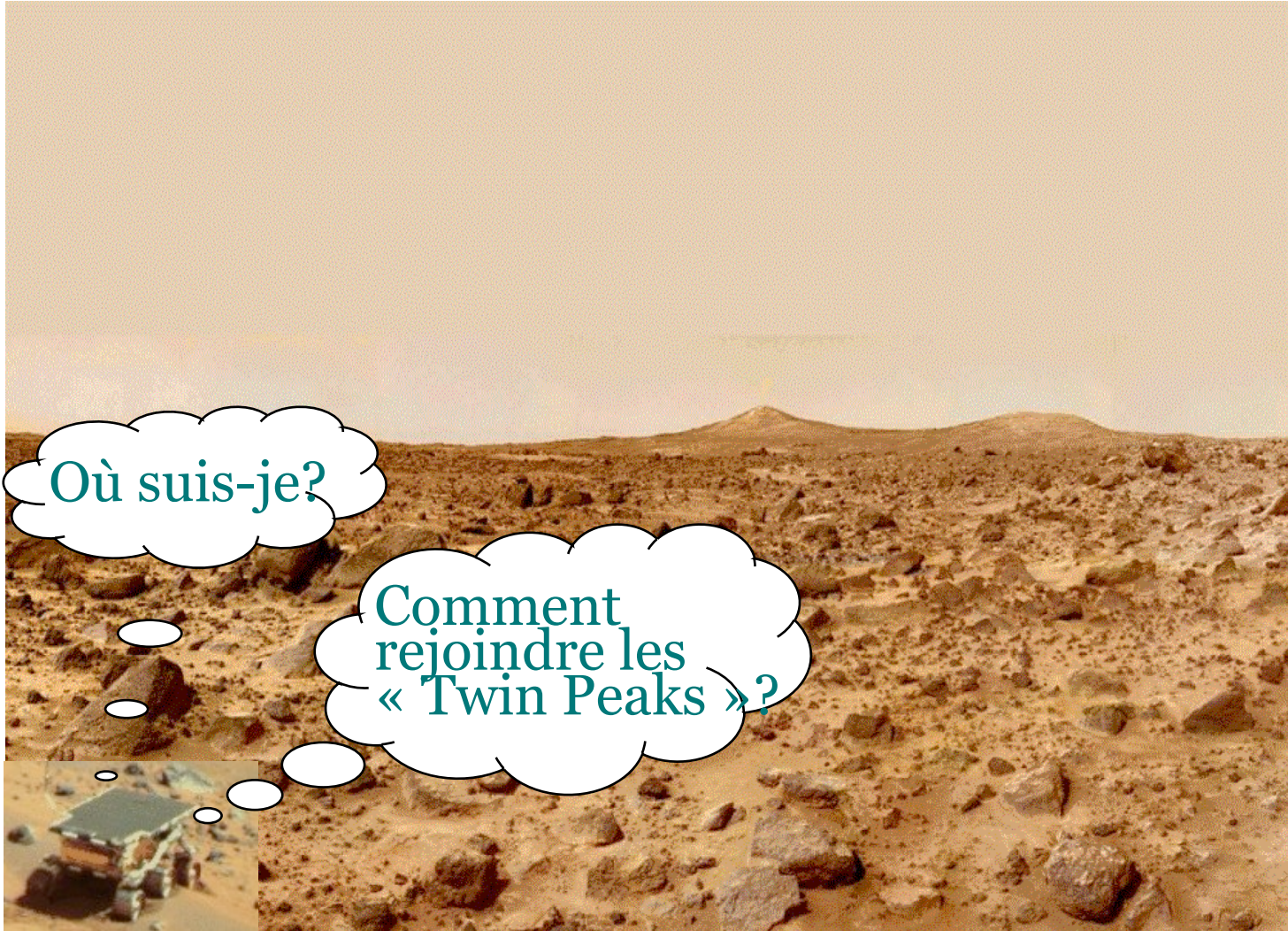


La navigation

Navigation



Navigation



Localisation

- Localisation à l'estime: estimation de la position en mesurant les déplacements (capteurs proprioceptifs: odométrie, centrale inertielle, ...).
- Localisation par moyens spécifiques (GPS, balises)
- Localisation par perception de l'environnement (capteurs extéroceptifs).

Localisation : insuffisance des capteurs proprioceptifs

- Exemple: odométrie; déplacement linéaire



- Distance: $d_1 = \hat{d}_1 + \tilde{d}_1$

- Modèle d'erreur:
$$\begin{aligned} E(\tilde{d}_1) &= \mu_1 \\ \text{Var}(\tilde{d}_1) &= \sigma_1^2 \end{aligned}$$

Erreur odométrique

Gaussienne

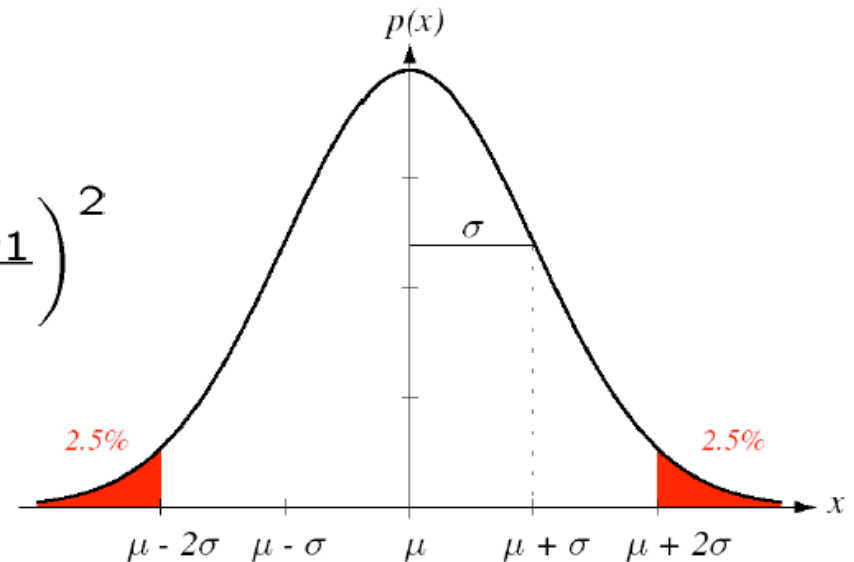
Souvent:

$$\mu_1 = 0$$

$$\sigma_1 = 0.1 \cdot \hat{d}_1$$

$$\tilde{d}_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$p(\tilde{d}_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{d}_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2}$$



$$Pr \left\{ | \tilde{d}_1 - \mu_1 | \leq \sigma_1 \right\} \simeq 0.68$$

$$Pr \left\{ | \tilde{d}_1 - \mu_1 | \leq 2\sigma_1 \right\} \simeq 0.95$$

$$Pr \left\{ | \tilde{d}_1 - \mu_1 | \leq 3\sigma_1 \right\} \simeq 0.997$$

Odométrie

- Erreur

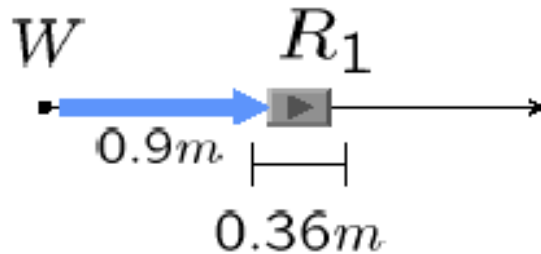
$$\tilde{d}_1 = \hat{d}_1 + \tilde{d}_1$$

$$\tilde{d}_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\sigma_1 = 0.1 \cdot \hat{d}_1$$

- Exemple: déplacement 0.9m



$$\hat{x}_{WR_1} = \hat{d}_1$$

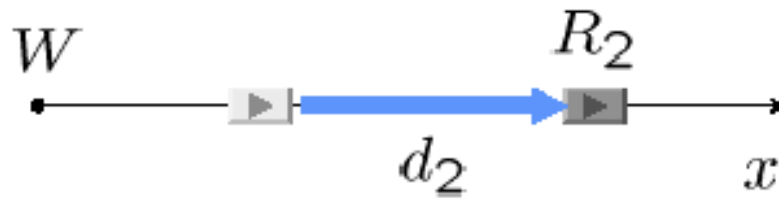
$$= 0.9m$$

$$\sigma_{x_{WR_1}} = 0.09m$$

$$Pr \left\{ |\tilde{d}_1| \leq 0.18m \right\} \simeq 0.95$$

Odométrie

- Nouveau déplacement 0.85m $\hat{d}_2 = 0.85m$

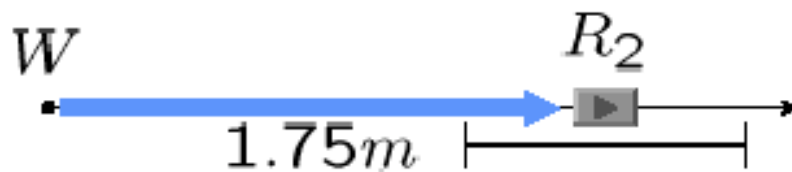


$$x_{WR_2} = \hat{d}_1 + \tilde{d}_1 + \hat{d}_2 + \tilde{d}_2$$

$$E(\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2) = \mu_1 + \mu_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2) &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\ &= 0.1^2 (\tilde{d}_1^2 + \tilde{d}_2^2) \end{aligned}$$

- Nouvelle estimation

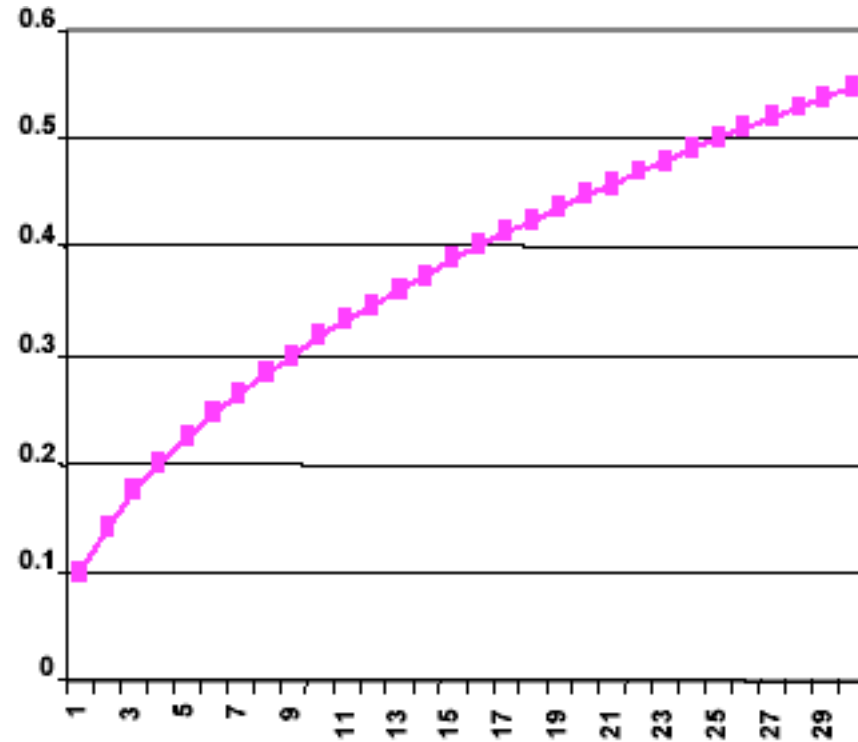


Accroissement
de l'erreur
0.49m

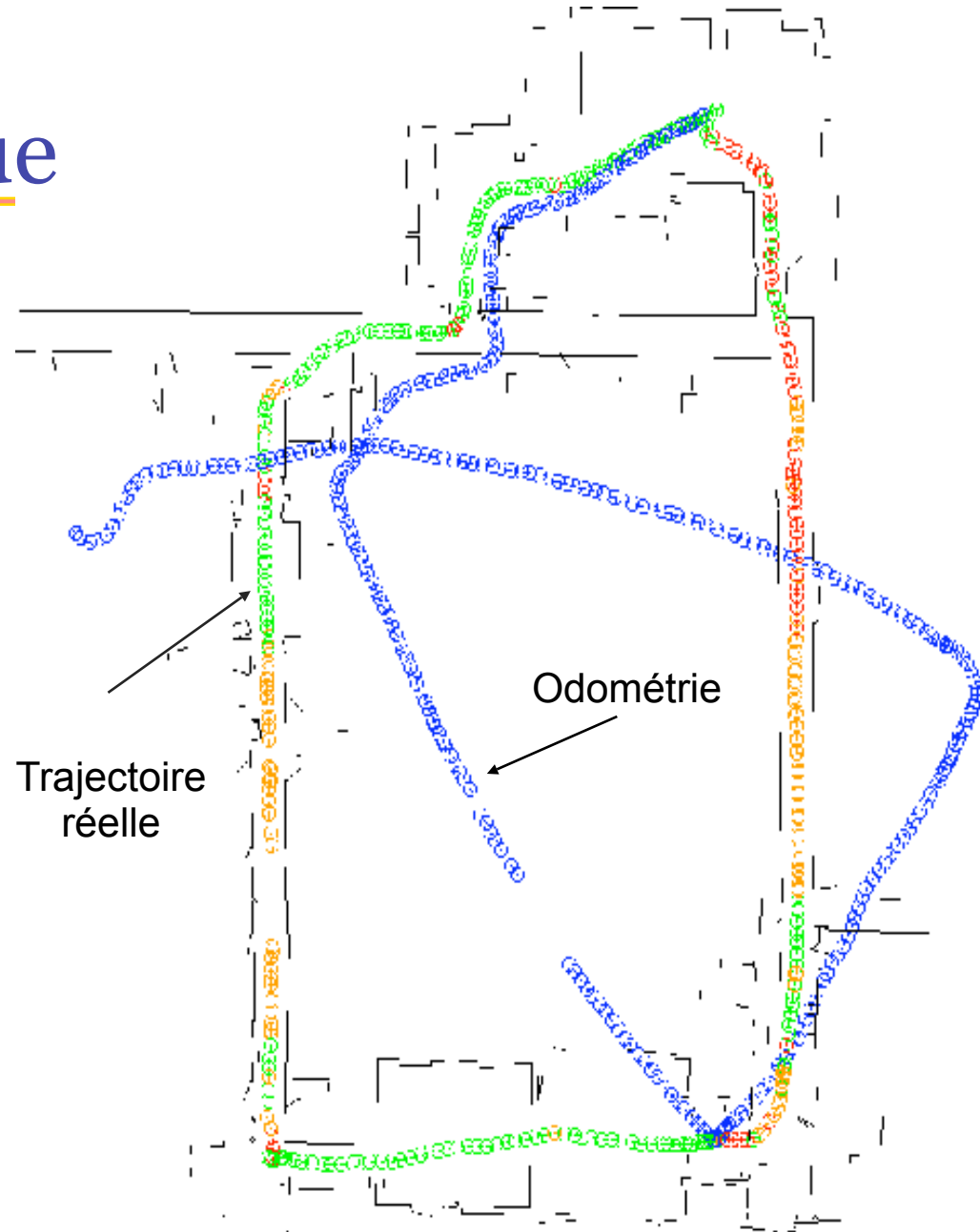
$$\hat{x}_{WR_2} = 1.75m$$

$$\sigma_{x_{WR_2}} \simeq 0.12m$$

Erreur odométrique

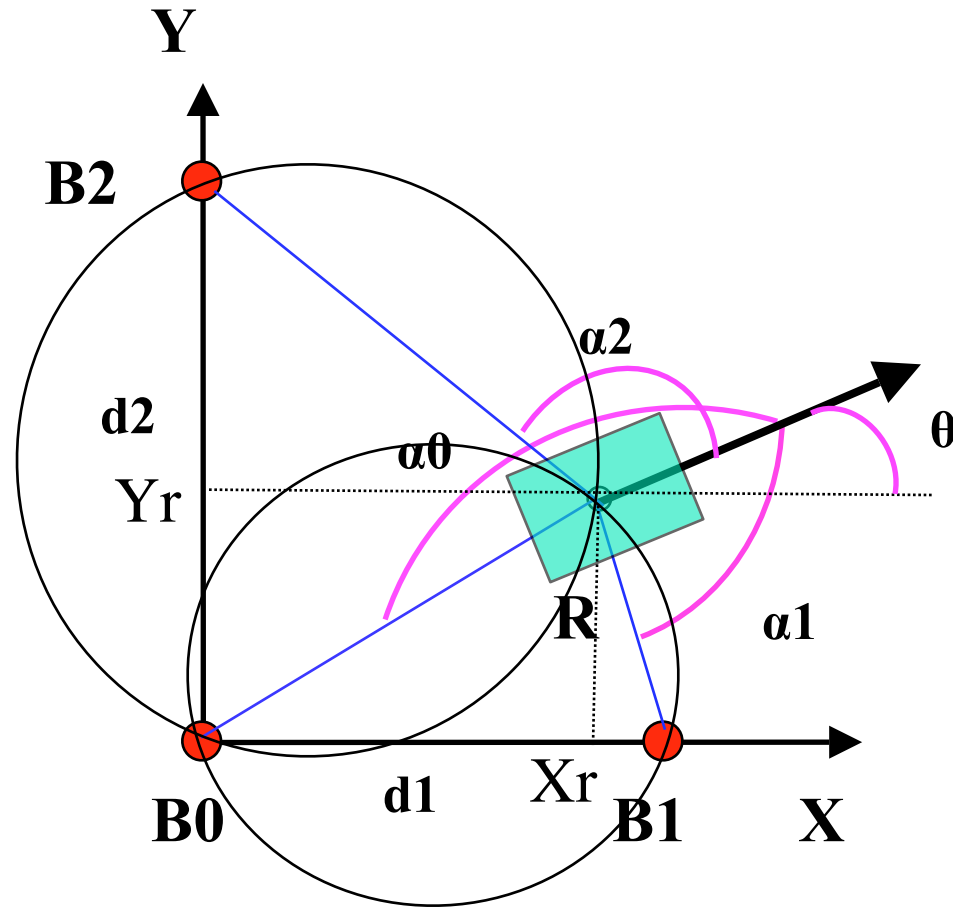


L'erreur odométrique est non bornée



Localisation absolue sur balises par triangulation

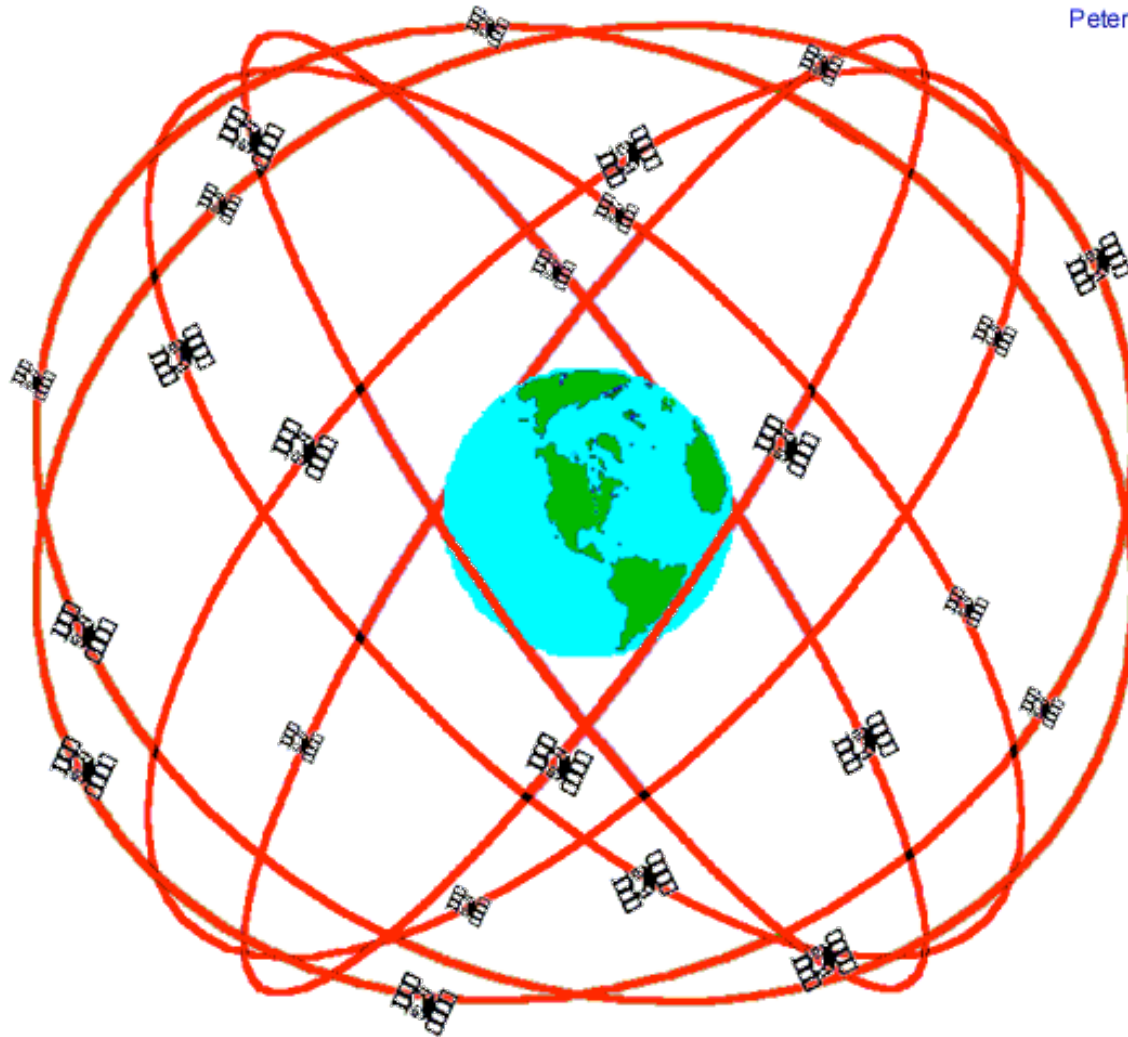
X_r Y_r θ_r ?



Localisation absolue

GPS (Global Positioning System) :

- 24 satellites répartis sur 6 plans orbitaux inclinés de 55° sur l'équateur (orbite circulaire de rayon 20000 km).
- Chaque satellite envoie des informations permettant de l'identifier et de le localiser.
- Les mesures de plusieurs satellites (au moins 3) sont nécessaires pour estimer les coordonnées (longitude, latitude, altitude) du mobile à localiser.
- Précision : quelques mètres; GPS différentiel, GPS kinodynamique: quelques centimètres.

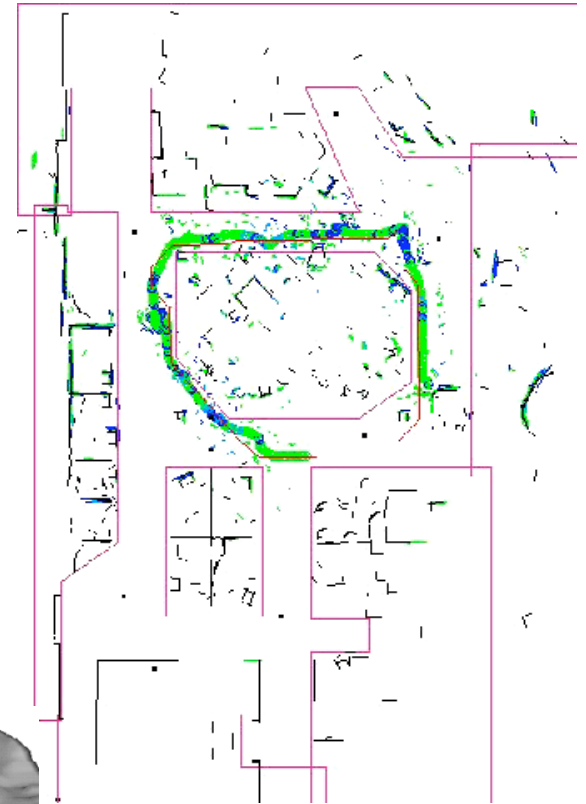
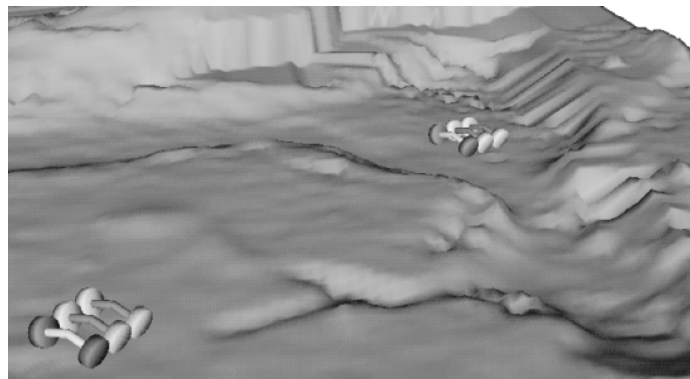


GPS Nominal Constellation
24 Satellites in 6 Orbital Planes
4 Satellites in each Plane
20,200 km Altitudes, 55 Degree Inclination

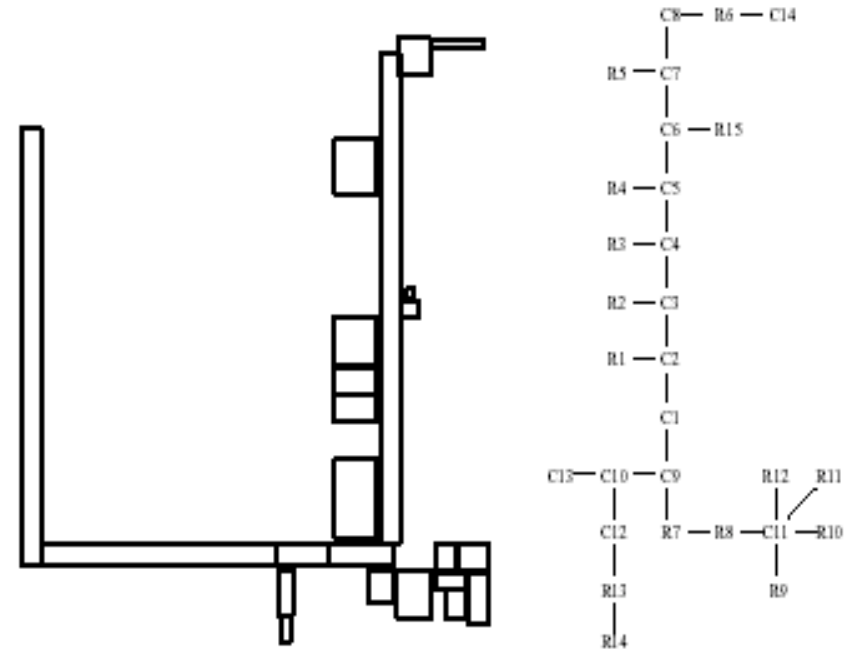
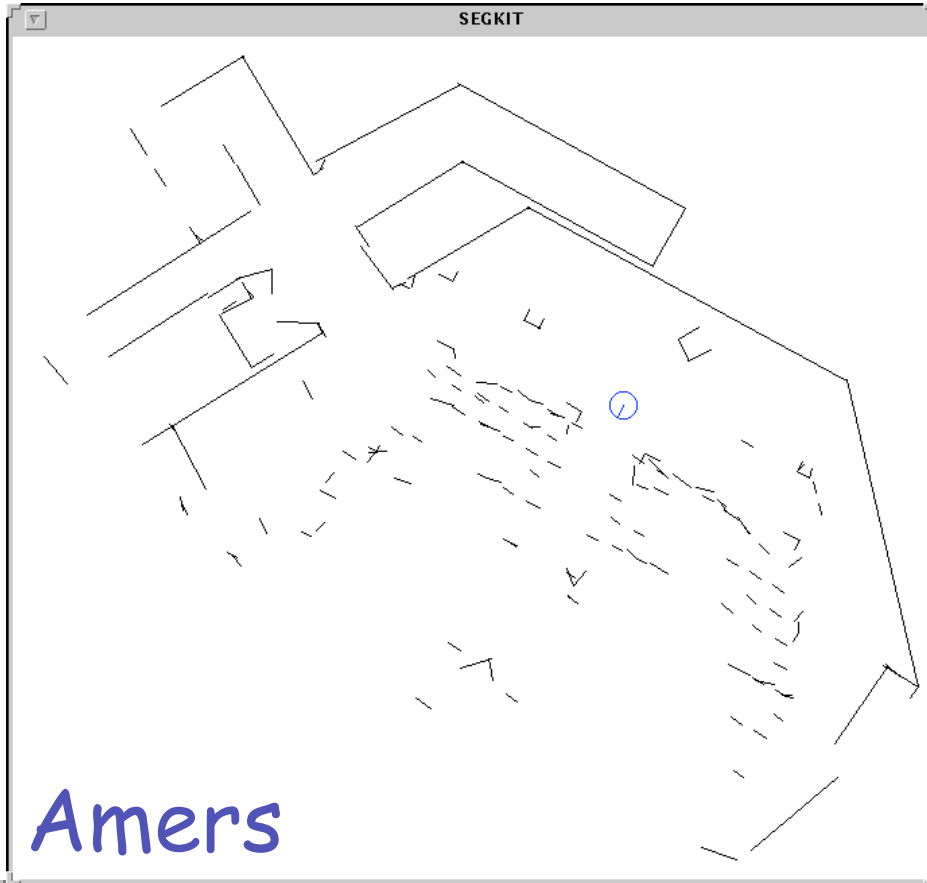
Navigation

Besoin d'une **carte** représentant l'environnement

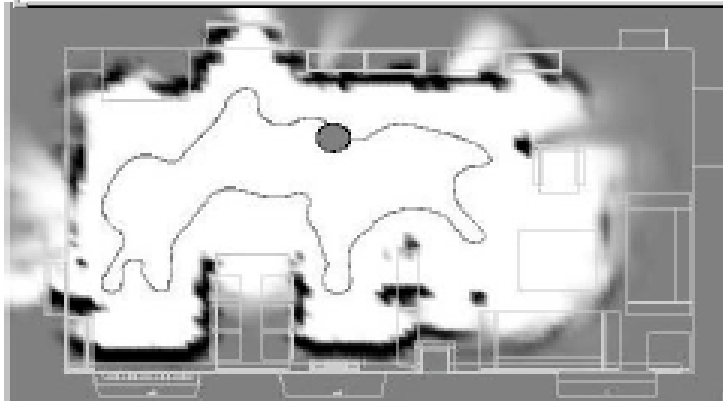
- pour la localisation
- pour la planification



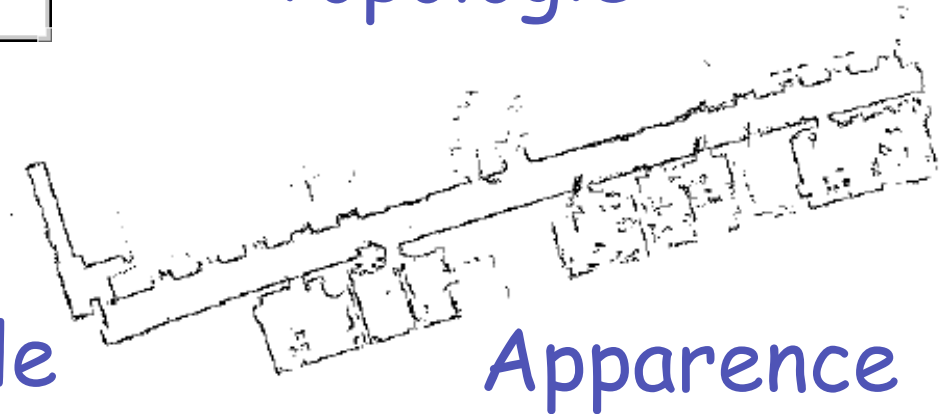
Représentations et cartes



Topologie



Grille



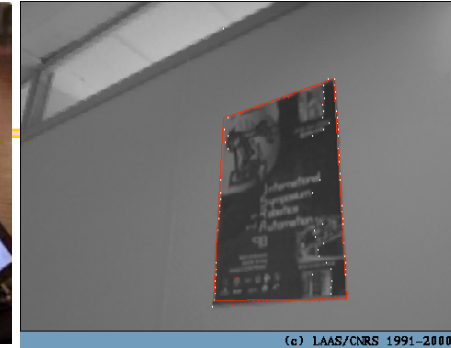
Apparence

Localisation et modélisation: Notations

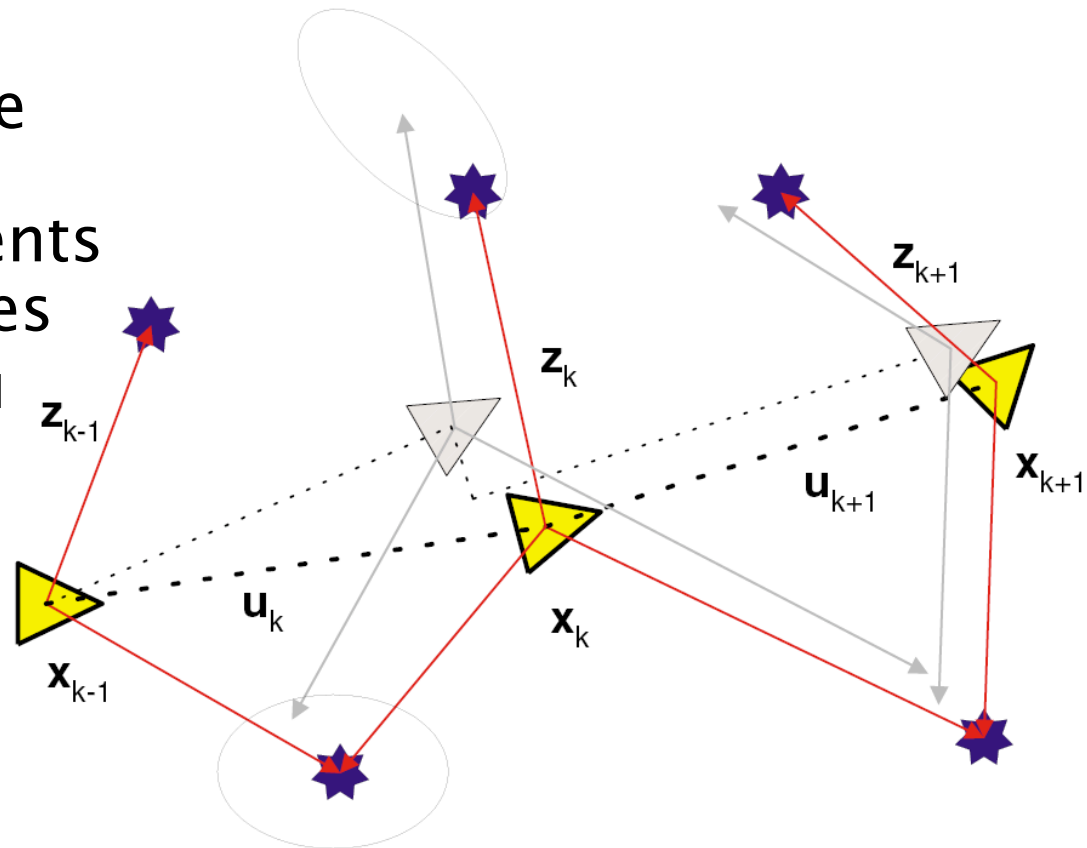
- Instants discrets $k = 1, 2, \dots$.
- x_k : véritable position du robot à l'instant k .
- u_k : vecteur de commande, connu, appliqué à l'instant $k - 1$ pour amener le robot de x_{k-1} à x_k à l'instant k .
- m_i : la véritable position de l'amer i .
- $z_{k,i}$: observation (mesure) de l'amer i à partir de la position x_k au temps k .
- z_k : l'observation (générique, de l'un des amers) à k .
- Sont connus:
- L'historique des états: $X^k = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} = \{X^{k-1}, x_k\}$.
- L'historique des commandes: $U^k = \{u_1, u_2, \dots, u_k\} = \{U^{k-1}, u_k\}$.
- L'ensemble des amers: $m = \{m_1, m_2, \dots, m_M\}$.
- L'historique des observations: $Z^k = \{z_1, z_2, \dots, z_k\} = \{X^{k-1}, z_k\}$.

Localisation avec une carte

- Carte m (géométrique, d'amers, d'occupation,...) connue a priori.

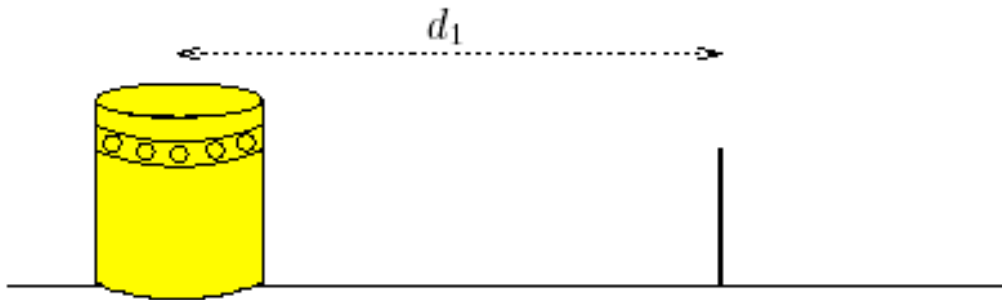


- A partir d'une séquence de commandes U^k , et d'observations d'éléments m_i de la carte, inférer les positions inconnues du robot X^k

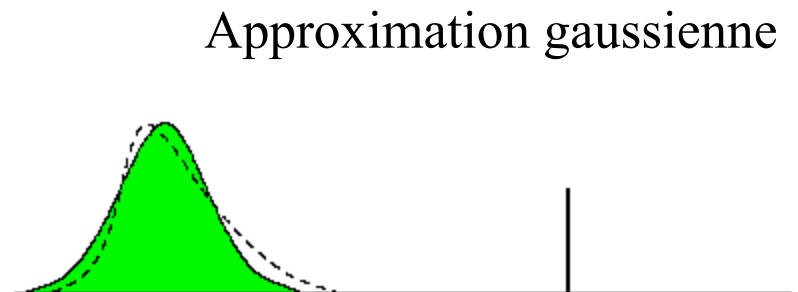
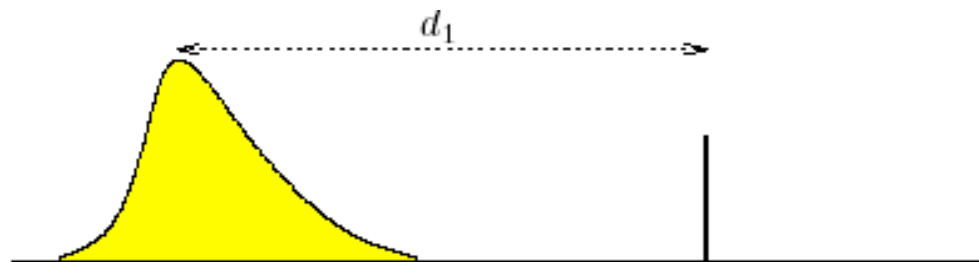


Localisation avec une carte

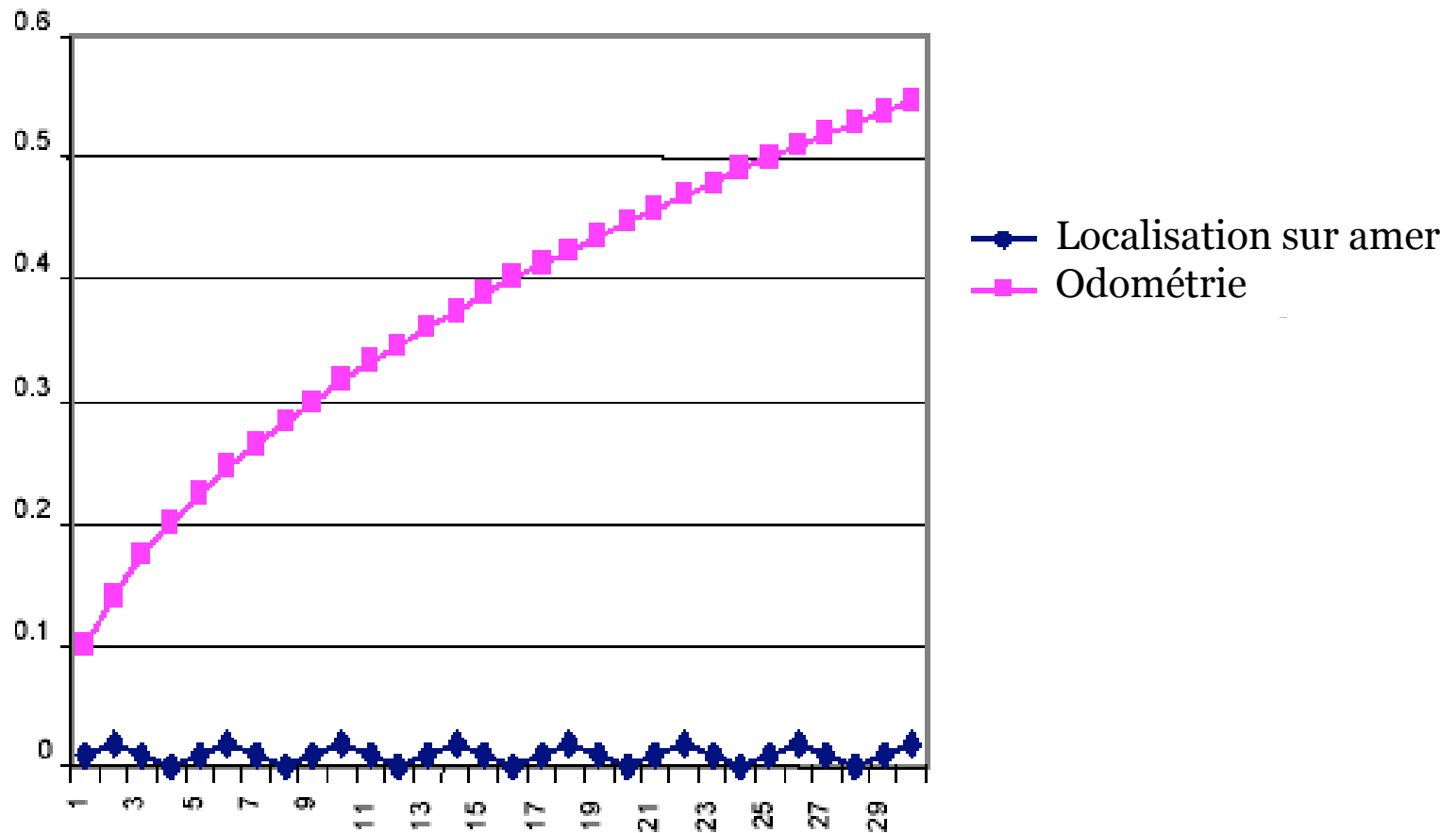
- Position (x, y, θ) : variable aléatoire.
- Éléments de l'environnement connus (amers).



$$\begin{aligned}\hat{d} &= 1.1m \\ \mu_d &= 0 \\ \sigma_d &= 0.01 \cdot \hat{d} \\ &= .011m\end{aligned}$$



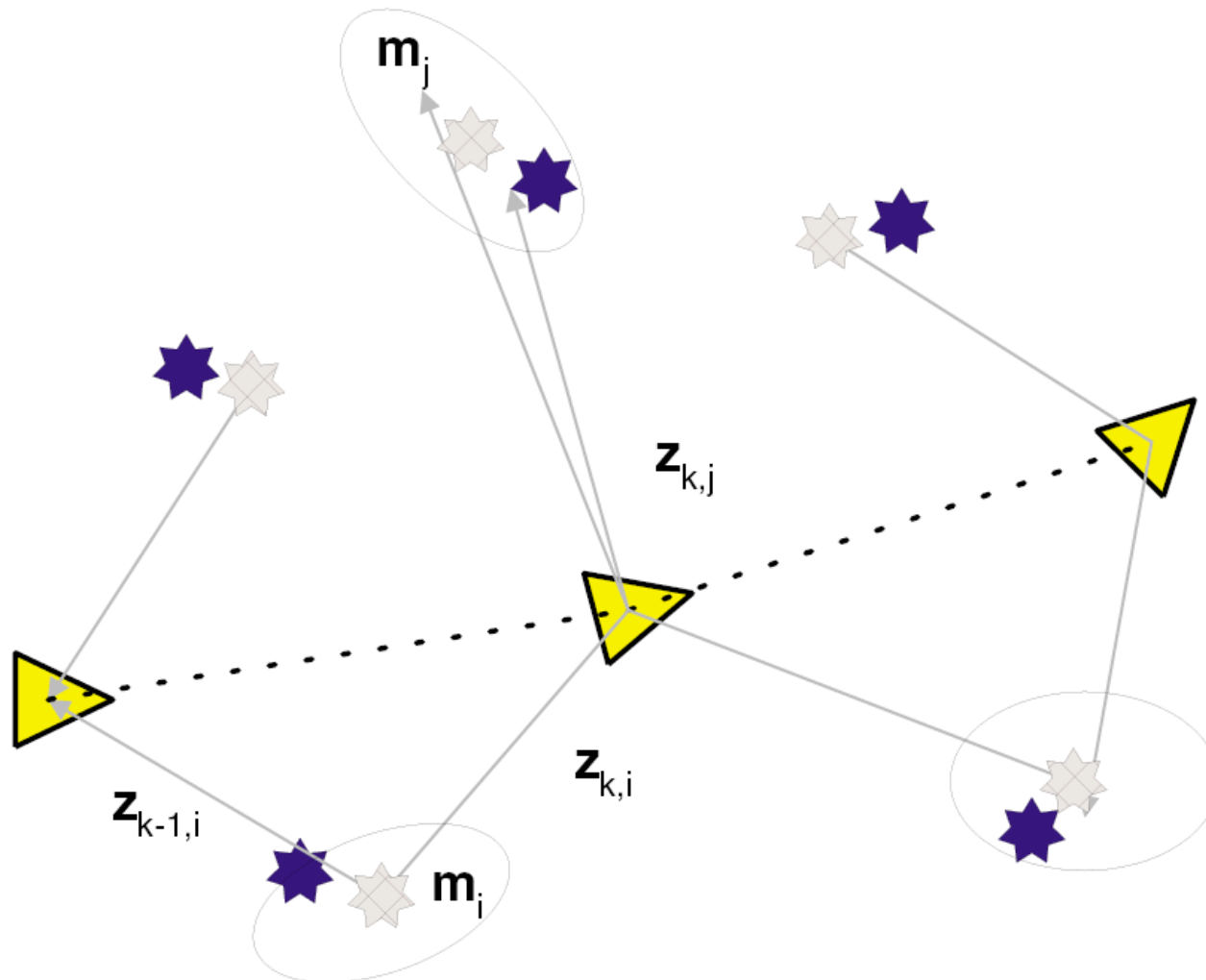
Localisation: erreur de position bornée



Cartographie

- Les position du robots X^k sont connues (par un moyen indépendant).
- Inférer (construire) la carte m

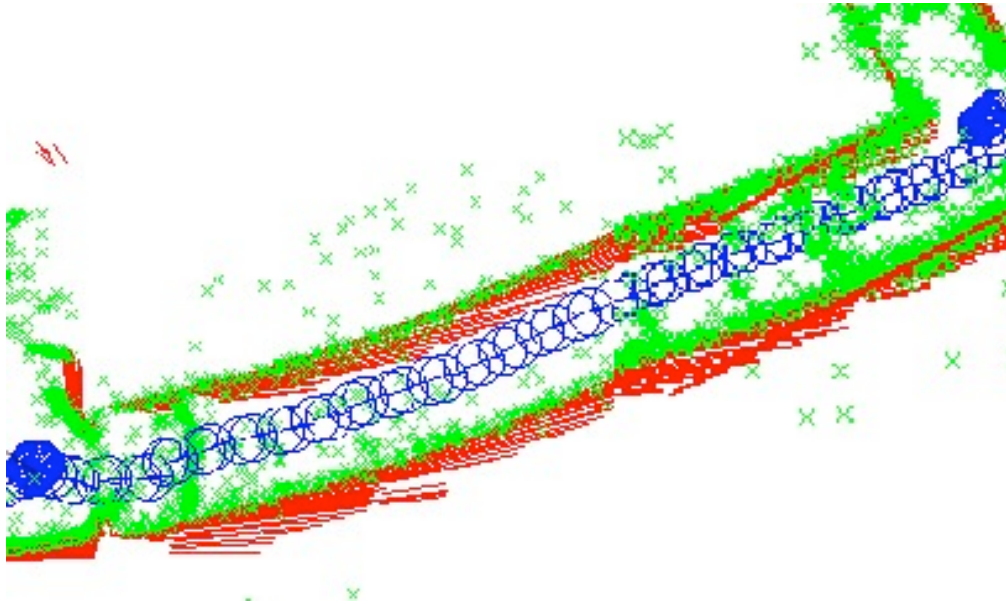
Cartographie



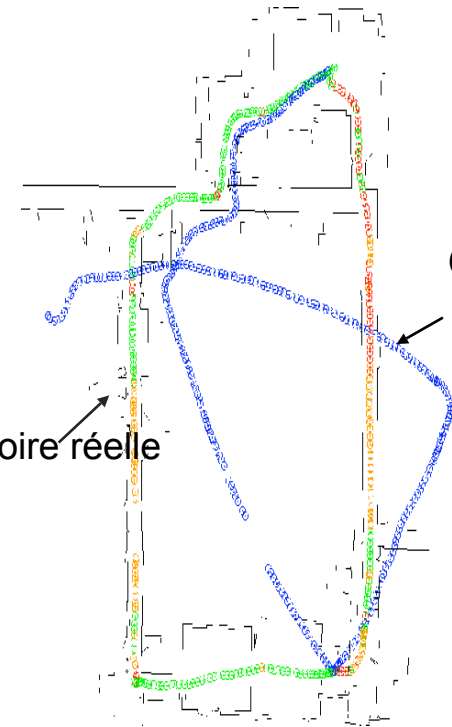
Construction d'une carte

1. Choix des types de représentation:
Amers, grilles, apparence...
3. Exploration et fusion de perceptions locales:
traitement explicite des **incertitudes** et maintien
d'une carte globale.

Perceptions imprécises



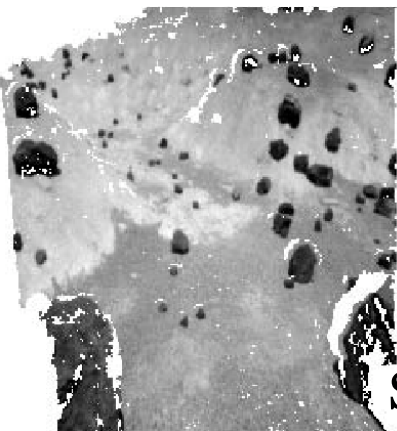
Laser et ultrasons



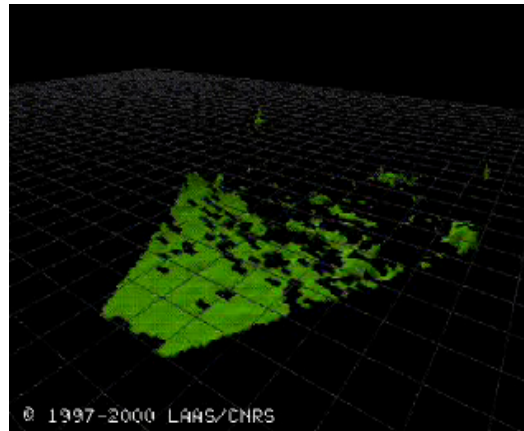
Odométrie

Trajectoire réelle

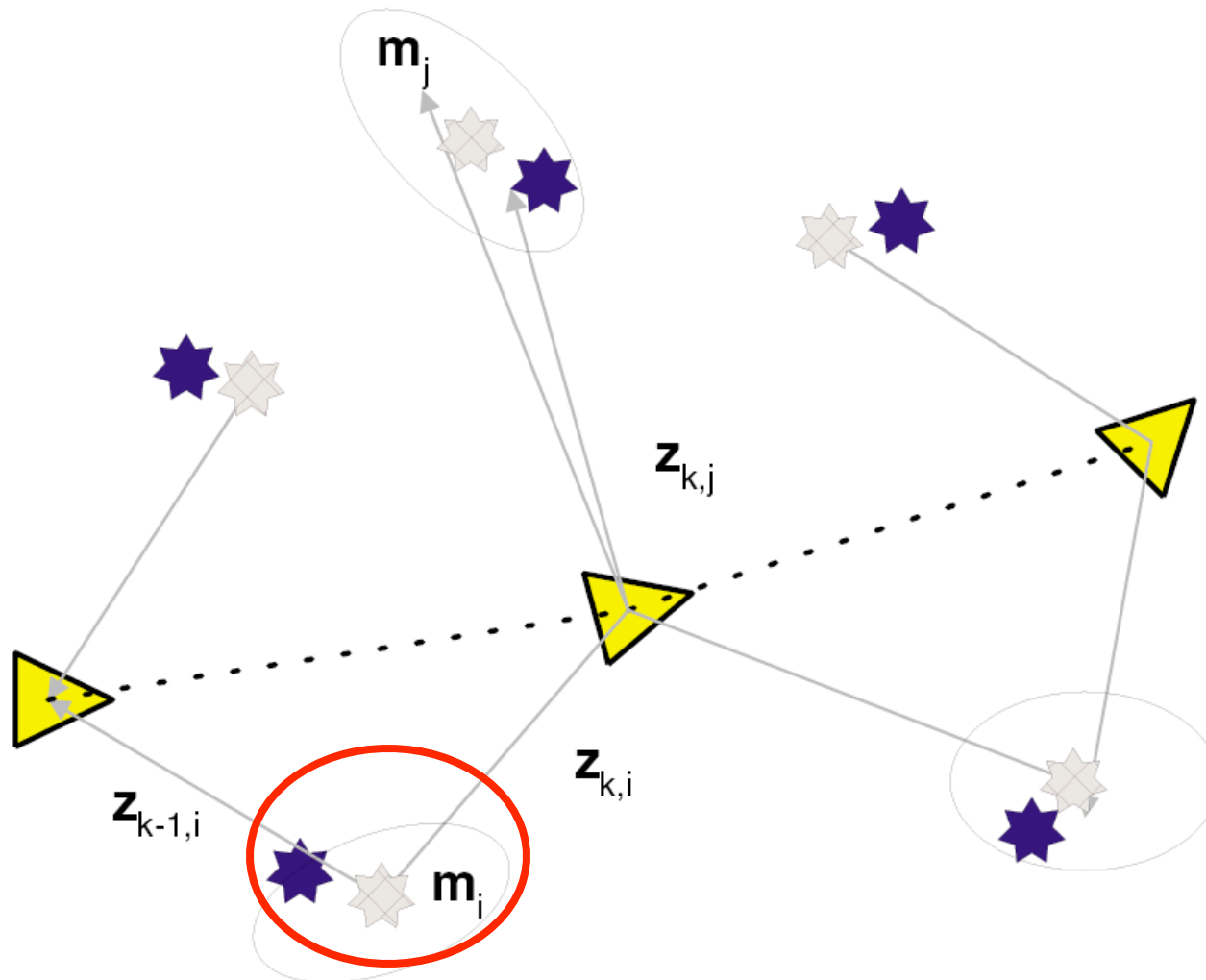
Carte
d'élévation



Stéréo



Cartographie: fusion de deux mesures

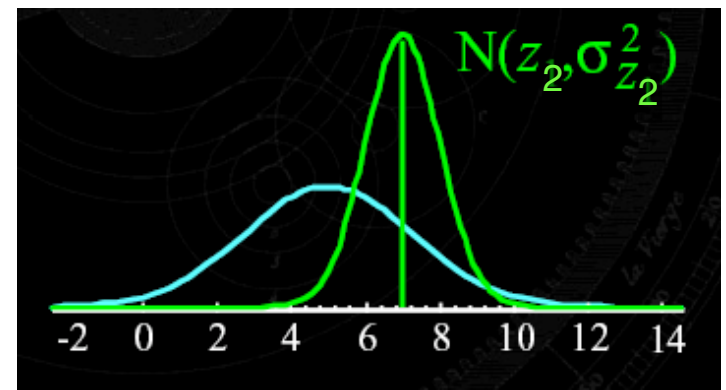
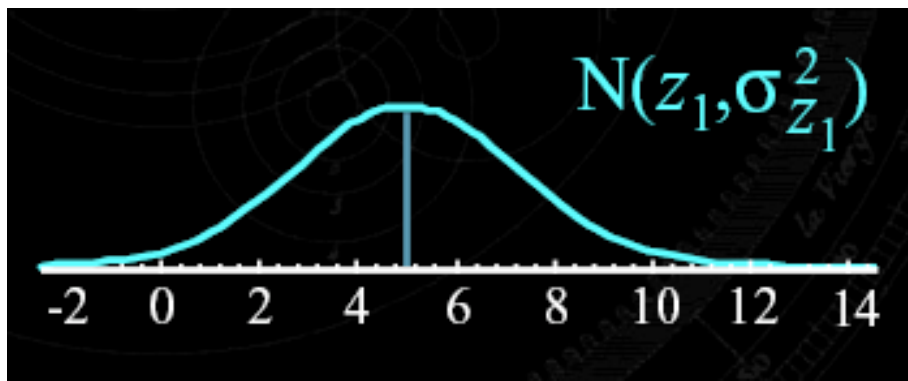


Fusion de deux mesures: Exemple simple

- Deux mesures

$$z_1, \sigma_{z_1}^2$$
$$\hat{x}_1 = z_1$$
$$\hat{\sigma}_1^2 = \sigma_{z_1}^2$$

$$z_2, \sigma_{z_2}^2$$
$$\hat{x}_2 = \dots?$$
$$\hat{\sigma}_2^2 = \dots?$$



Moyenne pondérée

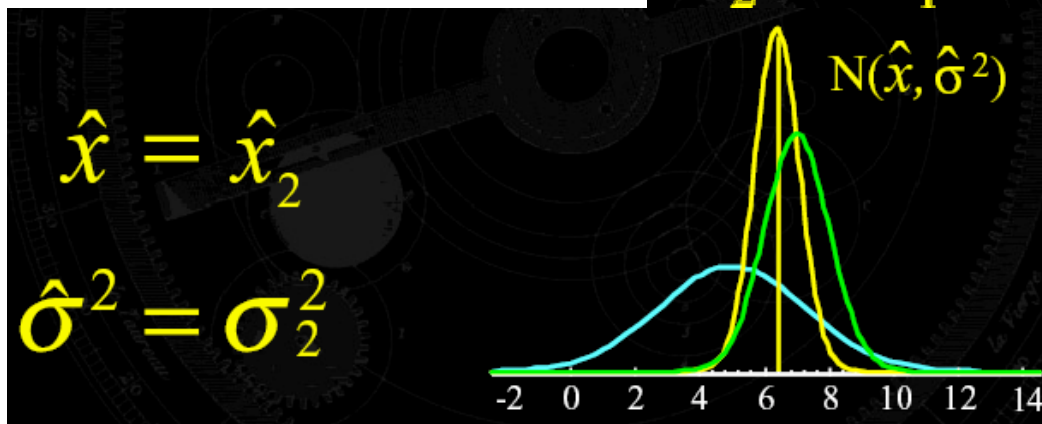
- Combinaison:

$$\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + K_2 (z_2 - \hat{x}_1)$$

$$K_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_{z_2}^2}$$

- Variance:

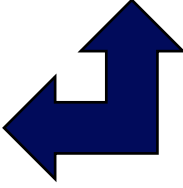
$$\frac{1}{\sigma_2^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_{z_2}^2}$$



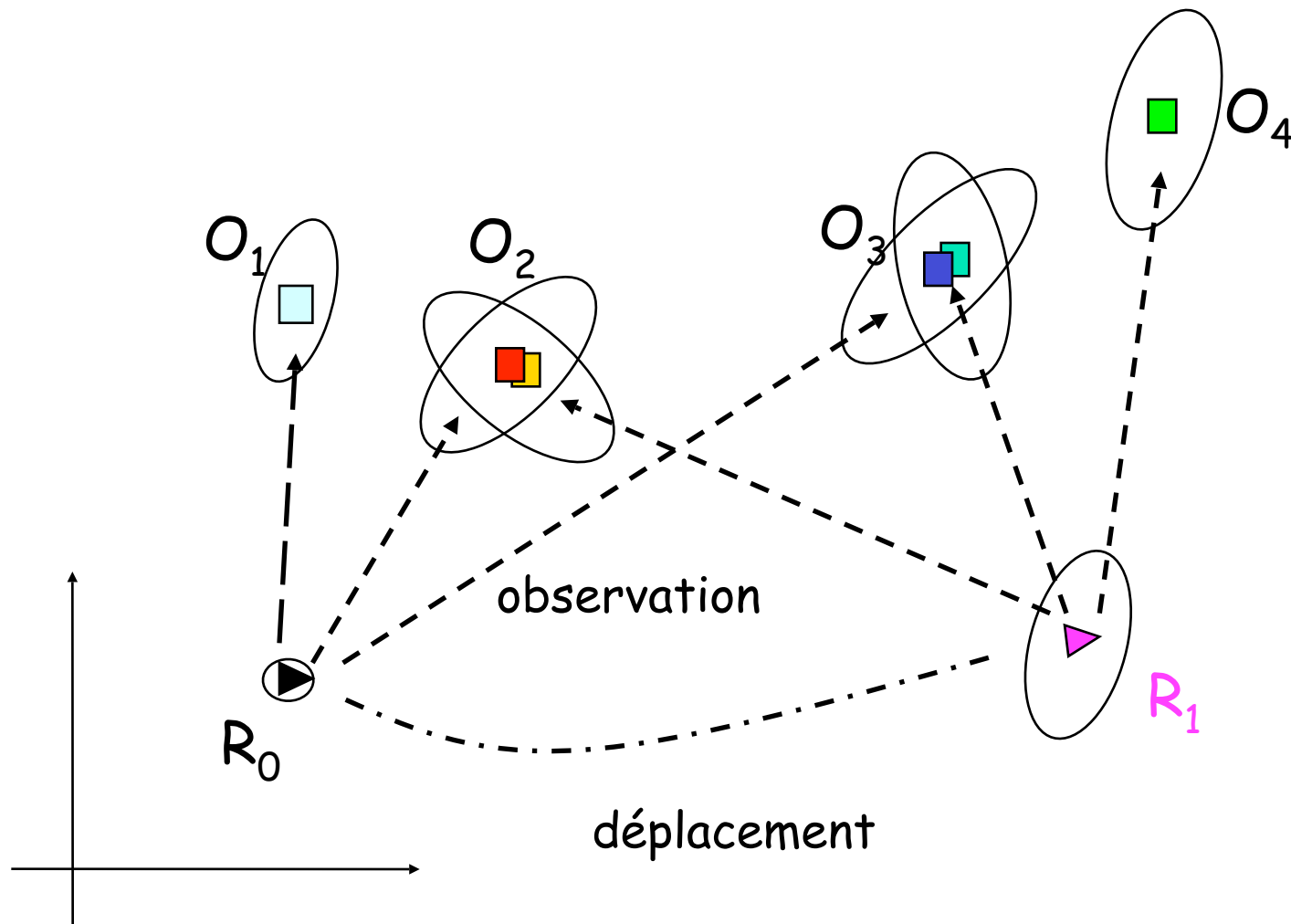
Localisation et cartographie simultanées (SLAM)

- Pas d'information sur m .
- La position initiale x_0 est seule connue (origine)
- La séquence de commandes U^k est donnée
 - Construire la carte m
 - Simultanément, inférer les positions du robot X^k

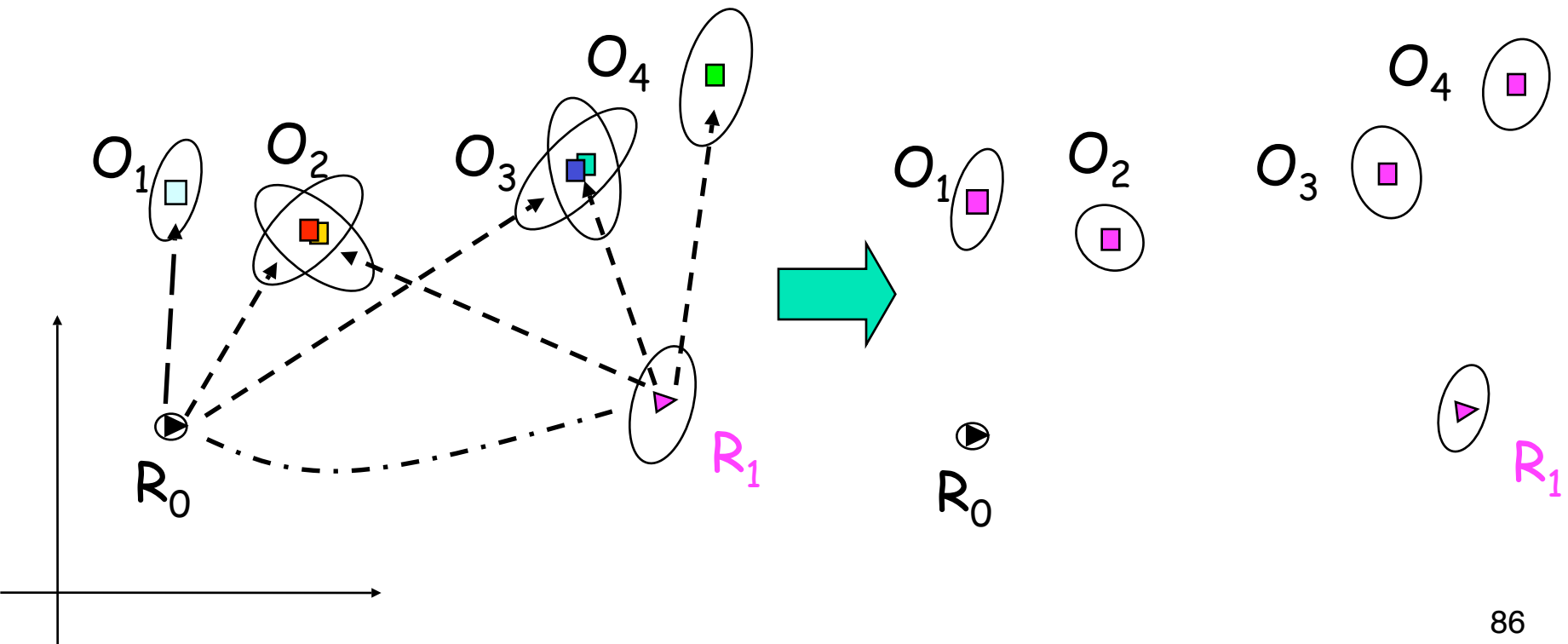
Navigation

- Construction *incrémentale* de carte cohérente de l'environnement
- Localisation 
- Planification et exécution du mouvement

Cartographie incrémentale: incertitudes

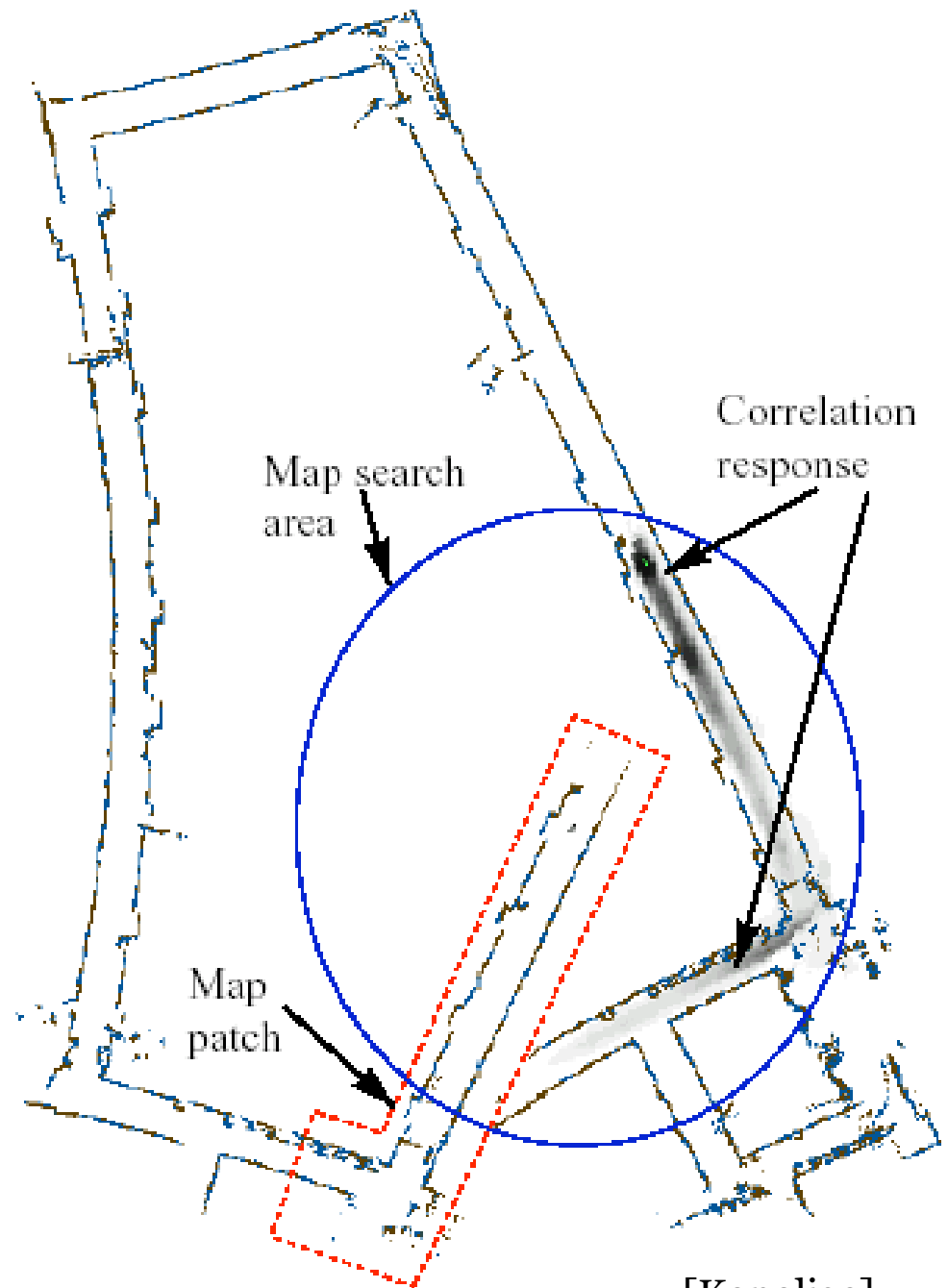


Cartographie incrémentale: réduction des incertitudes



Cartographie incrémentale

- Cumul des erreurs (odométrie, inertiel).
- Nécessité de moyens de correction externes.
- Seule correction possible: par les **éléments de l'environnement** eux-mêmes.



Localisation et cartographie simultanée



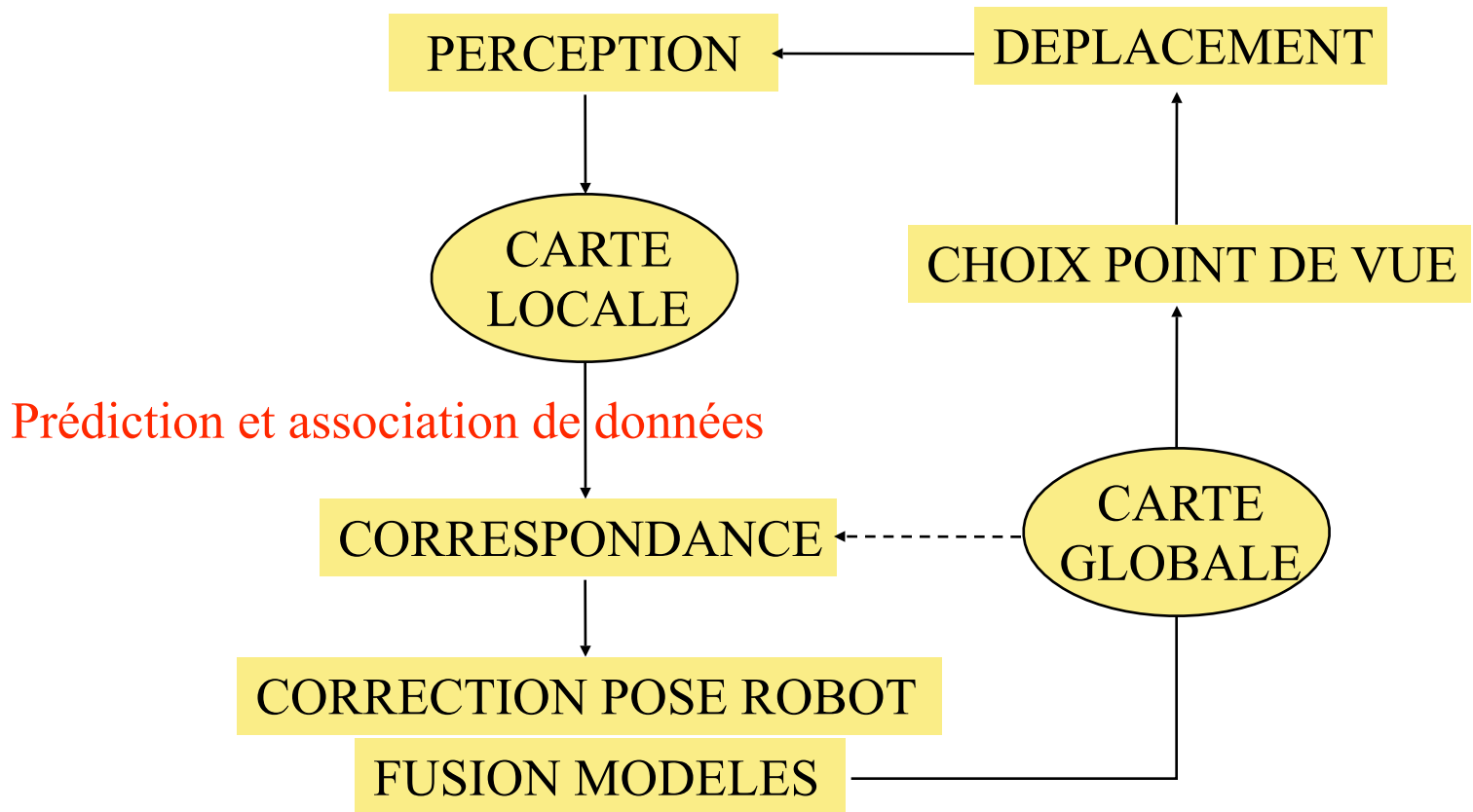
GALLIAE REGNI POTENTISS: NOVA DESCRIPTIO, IOANNE IOLIVETO AVCTORE

le relief de la france



*Localisation et
cartographie
simultanées:
Un vieux problème...*

SLAM

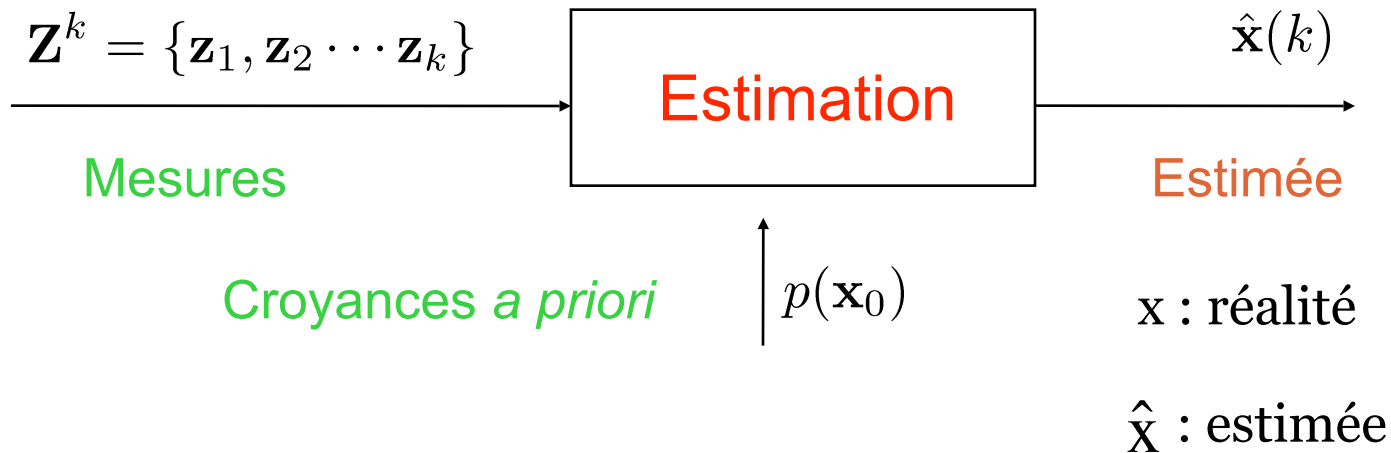


Modèles du processus

- L'incertitude est au cœur du problème.
- Les modèles probabilistes sont les plus rigoureux pour quantifier et manipuler l'incertitude.
- Modèle des capteurs: vraisemblance $P(z_k | x_k, m)$
- Modèle des déplacements: probabilité conditionnelle $P(x_k | x_{k-1}, u_k)$
- Estimation récursive de la probabilité conjointe à posteriori $P(x_k, m | Z^k, U^k, x_0)$.

SLAM: un problème de filtrage

Théorie de l'estimation



Estimation bayésienne récursive

$$\mathbf{Z}^k = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \cdots \mathbf{z}_k\}$$

Séquence de mesures

Calculer la probabilité de \mathbf{x} sachant \mathbf{Z}^k

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{Z}^k) = f(p(\mathbf{x}|\mathbf{Z}^{k-1}), p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}))$$

Bayes:

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{Z}^k) = \frac{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})p(\mathbf{x}|\mathbf{Z}^{k-1})}{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{Z}^{k-1})}$$

$$\underbrace{p(\mathbf{x}|\mathbf{Z}^k)} \propto \underbrace{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})} \underbrace{p(\mathbf{x}|\mathbf{Z}^{k-1})}$$

Estimée
à k

Vraisemblance:
explique la donnée
à k comme fonction
de \mathbf{x}

Dernière
estimée à $k-1$

Outil fondamental: Filtre Bayésien

$$p(x_t | z_{1..t}, u_{1..t}) = \eta p(z_t | x_t) \int p(x_t | u_t, x_{t-1}) p(x_{t-1} | z_{1..t-1}, u_{1..t-1}) dx_{t-1}$$

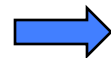
x = état: robot + éléments de l'environnement (amers)

t, k = temps, instants discrets

z = mesure

u = commande

η = constante de normalisation

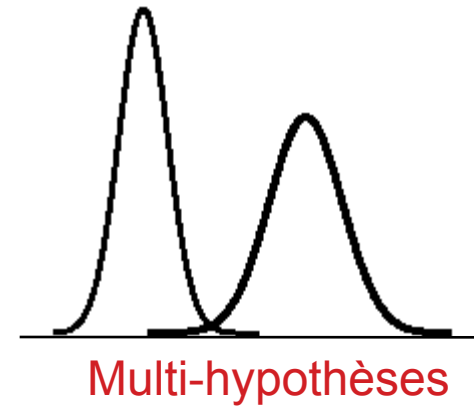
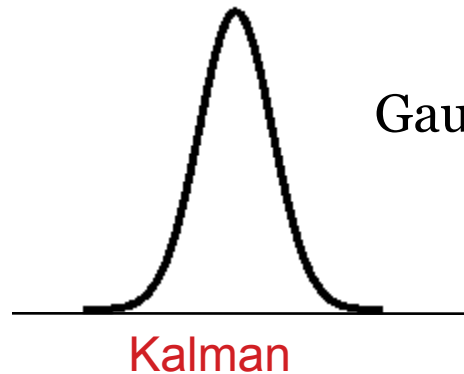


- Kalman
- Particulaire
- Markov

SLAM: Méthodes de filtrage

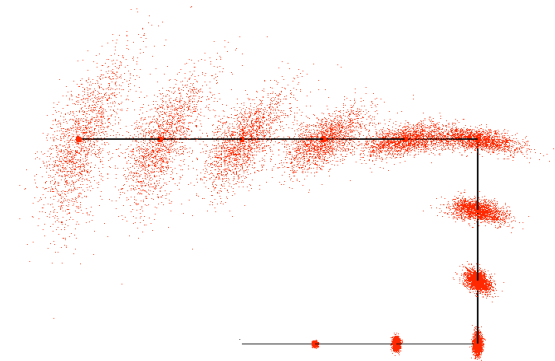
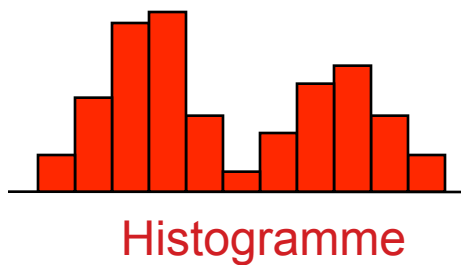
- Filtrage bayésien.
 - Distribution de probabilités gaussienne: Filtre de Kalman étendu (EKF).
 - Problème d'association de données: multi-hypothèses; Monte Carlo - filtrage particulière.
- Complexité : modèles hiérarchiques; décorrélation.

Représentations de l'incertitude



[Moutarlier et al. 89], [Schiele et al. 94], [Weiß et al. 94], [Borenstein 96],
[Gutmann et al. 96, 98], [Arras 98]

[Weckesser et al. 98], [Jensfelt et al. 99]

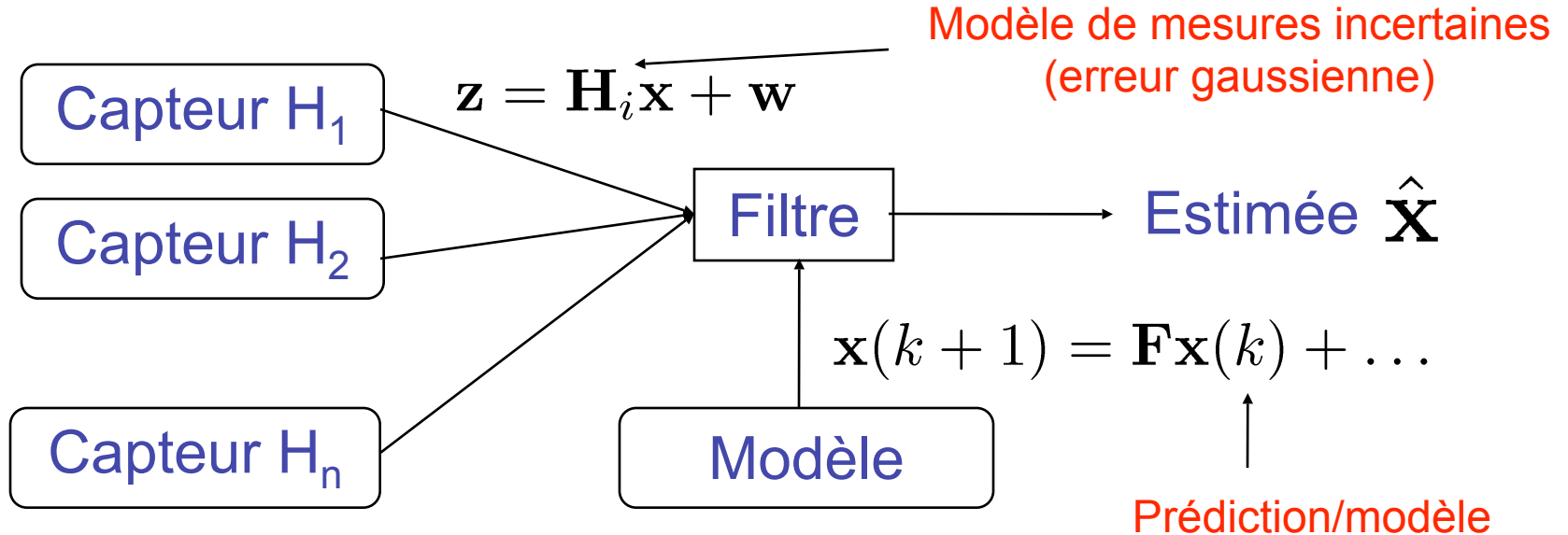


[Nourbakhsh et al. 95], [Simmons et al. 95], [Kaelbling et al. 96],
[Burgard et al. 96], [Konolige et al. 99]

[Kanazawa et al 95] [de Freitas 98]
[Isard/Blake 98] [Doucet 98] 96

Filtre de Kalman

Algorithme récursif produisant une estimée de d'état à partir d'observations incertaines de cet état (mesures) et d'un modèle incertain d'évolution de l'état.



Véritable état sous-jacent \mathbf{x}

Filtre de Kalman

Etat $\mathbf{x}_k = F\mathbf{x}_{k-1} + G\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}$

Observation $\mathbf{z}_k = H\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$

Prédiction $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = F\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + G\mathbf{u}_{k-1}$

Covariance $P_{k|k-1} = F P_{k-1|k-1} F^T + Q_{k-1}$

$$S_k = H P_{k|k-1} H^T + R_k$$

Gain $K_k = P_{k|k-1} H^T S_k^{-1}$

Innovation $\nu_k = \mathbf{z}_k - H\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$

Nouvel Etat $\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k \nu_k$

Covariance $P_{k|k} = (I - K_k H) P_{k|k-1}$

SLAM et Kalman

- Etat

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k^r \\ \mathbf{x}_k^1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^N \end{pmatrix}.$$

- Covariance

$$P_{k|k} = \begin{pmatrix} p^{rr} & p^{r1} & \dots & p^{rN} \\ p^{1r} & p^{11} & \dots & p^{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p^{Nr} & p^{N1} & \dots & p^{NN} \end{pmatrix},$$

- Prédiction

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^r = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^r, \mathbf{u}_k, \mathbf{0})$$

- Observation

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) = \begin{pmatrix} z_k^1 \\ \vdots \\ z_k^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^1(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{x}_k^{o1}, \mathbf{v}_k^1) \\ \vdots \\ h^M(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{x}_k^{oM}, \mathbf{v}_k^M) \end{pmatrix}.$$

- Mise à jour

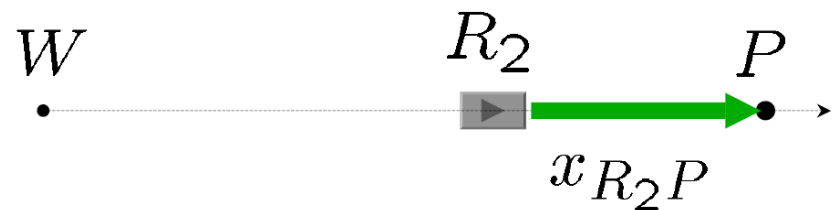
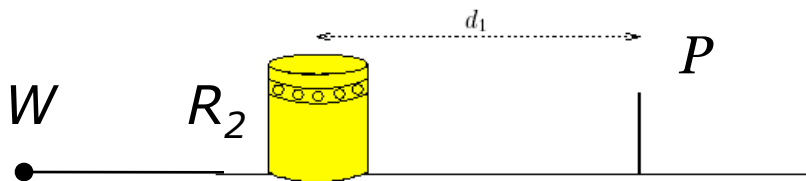
$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{0}))$$

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$$

Prédiction: odométrie

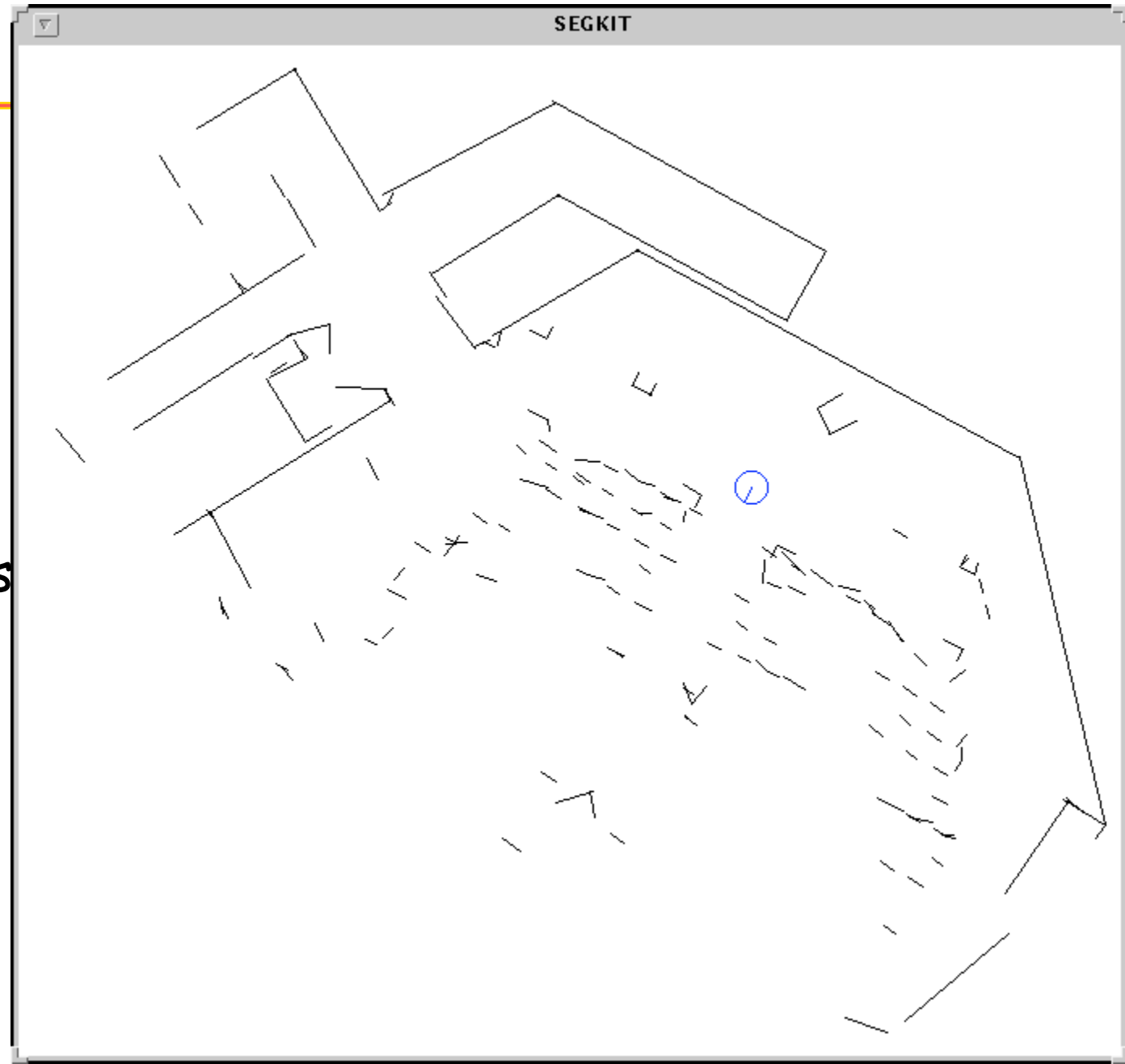
$$\begin{aligned}\hat{d} &= 1.1m \\ \mu_d &= 0 \\ \sigma_d &= 0.01 \cdot \hat{d} \\ &= .011m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{R_2P} &= -\hat{x}_{WR_2} + x_{WP} \\ &= 1.25m \\ \sigma_{x_{R_2P}} &= \sigma_{x_{WR_2}} \\ &\simeq 0.12m\end{aligned}$$

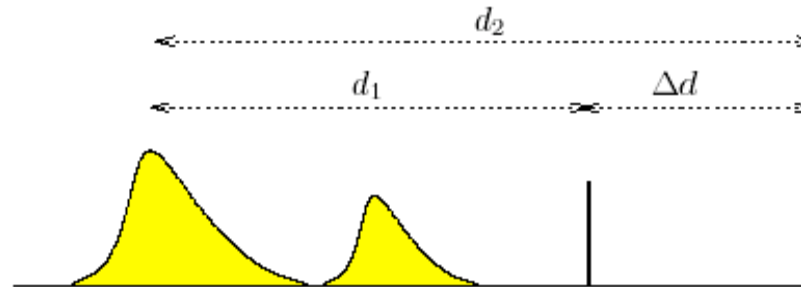
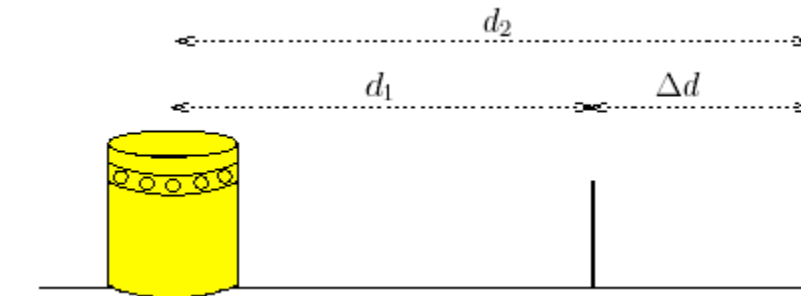


Exemple

- Laser 2D
- Approximations linéaires
- EKF

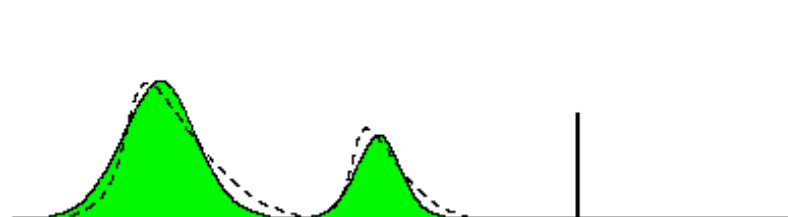


Problème de l'association de données

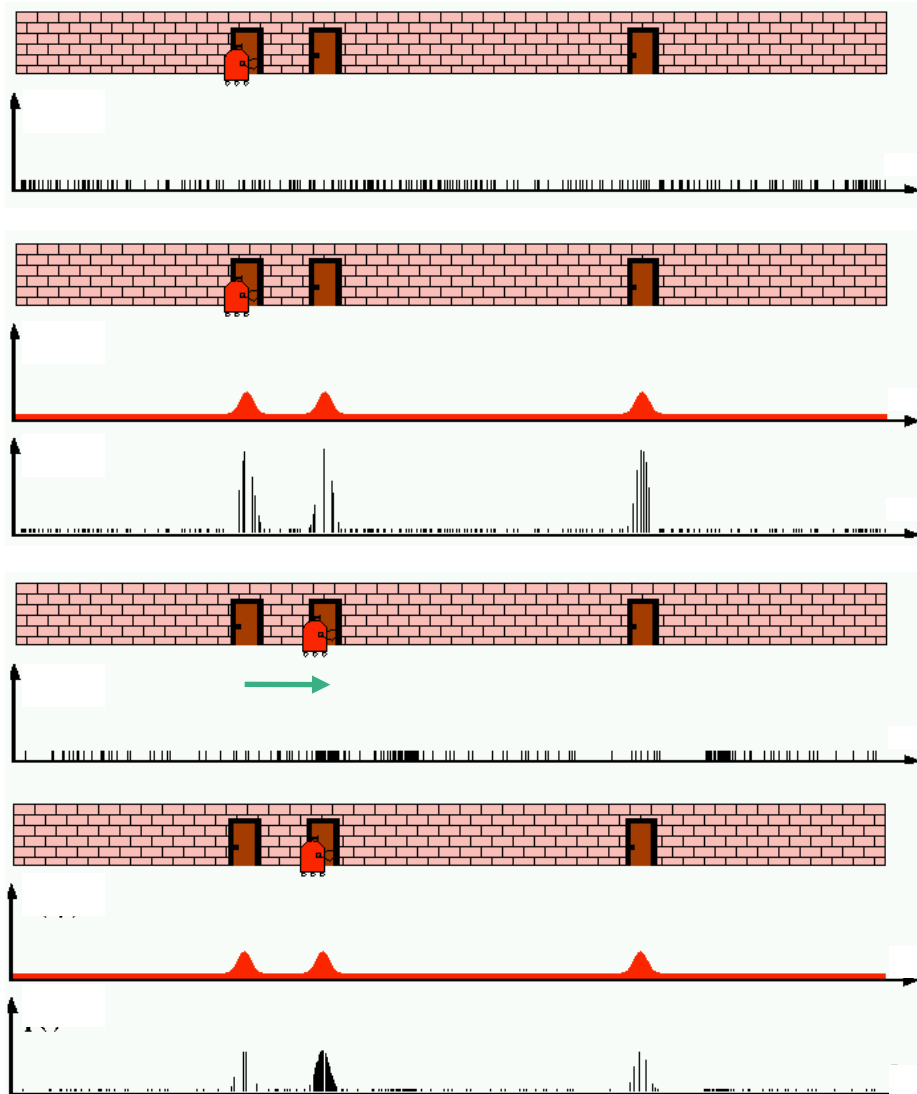


Multi-hypothèses

Approximation
gaussienne



Localisation Monte Carlo



Filtrage particulaire

- **Kalman**
 - Distributions gaussiennes
 - Divergence sur les hypothèses sont violées (mais bon fonctionnement autrement)
- **Filtrage particulaire** (condensation, Markov)
 - Distributions non-gaussiennes
 - Robustesse accrue grâce à l'échantillonnage

Filtrage Particulaire

- Représente les densités de probabilités par N échantillons aléatoires

$$x = \{ \langle x_n, \omega_n \rangle \}_{1 \leq n \leq N}$$

- Les échantillons sont mis à jour en deux étapes:

- **Prediction**: selon le modèle du mouvement

$$x_n^k \rightarrow p(x_n^k | x_n^{k-1}, dt)$$

- **Correction**: Pondération des échantillons en fonction des vraisemblances des observations

$$\omega_n^k \rightarrow p(z(k) | x_n^k)$$

Filtrage particulaire

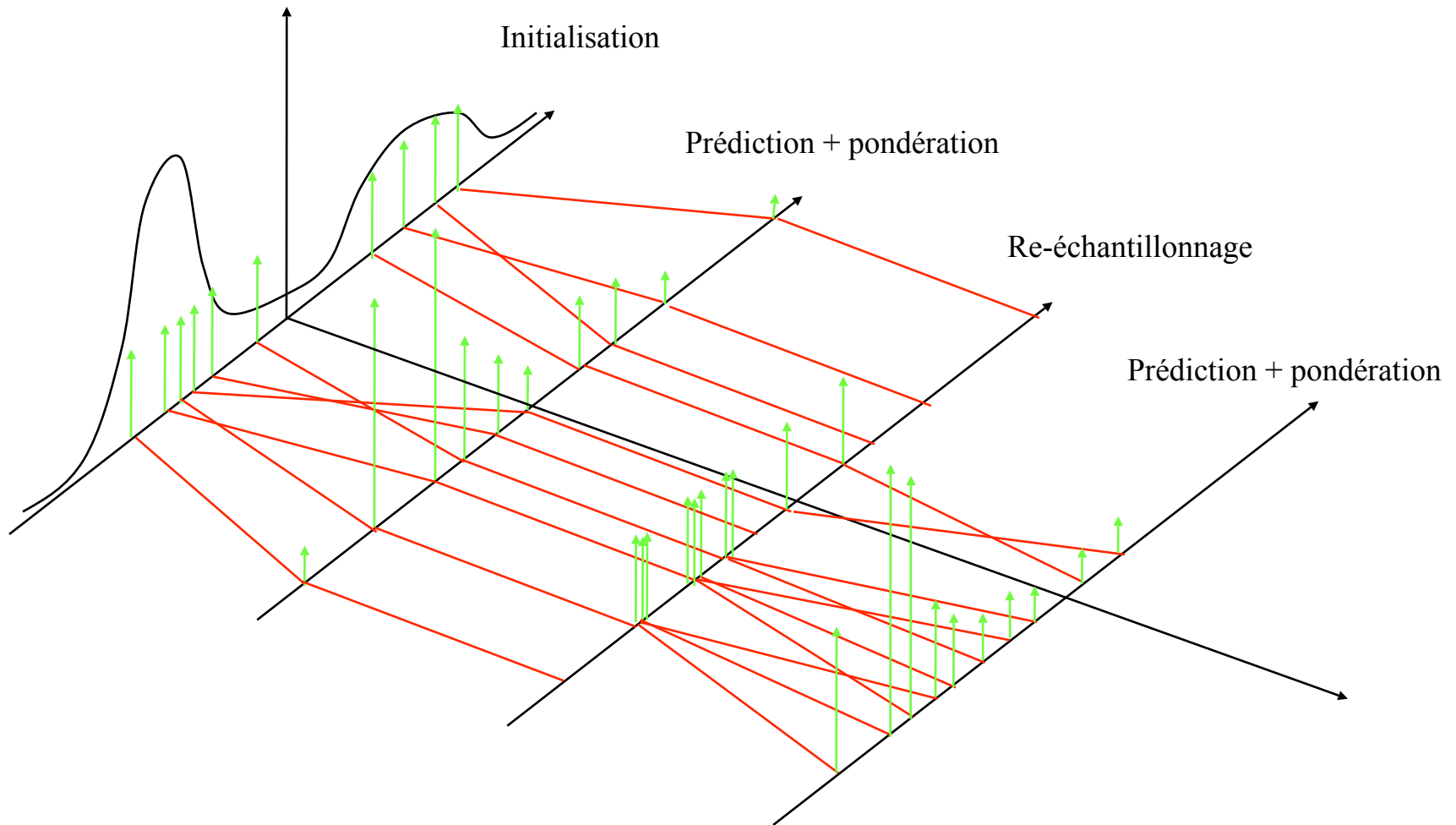
- **Initialisation: à $t=0$**

- Créer un ensemble X_0 de M particules selon une distribution $p(x_0)$.

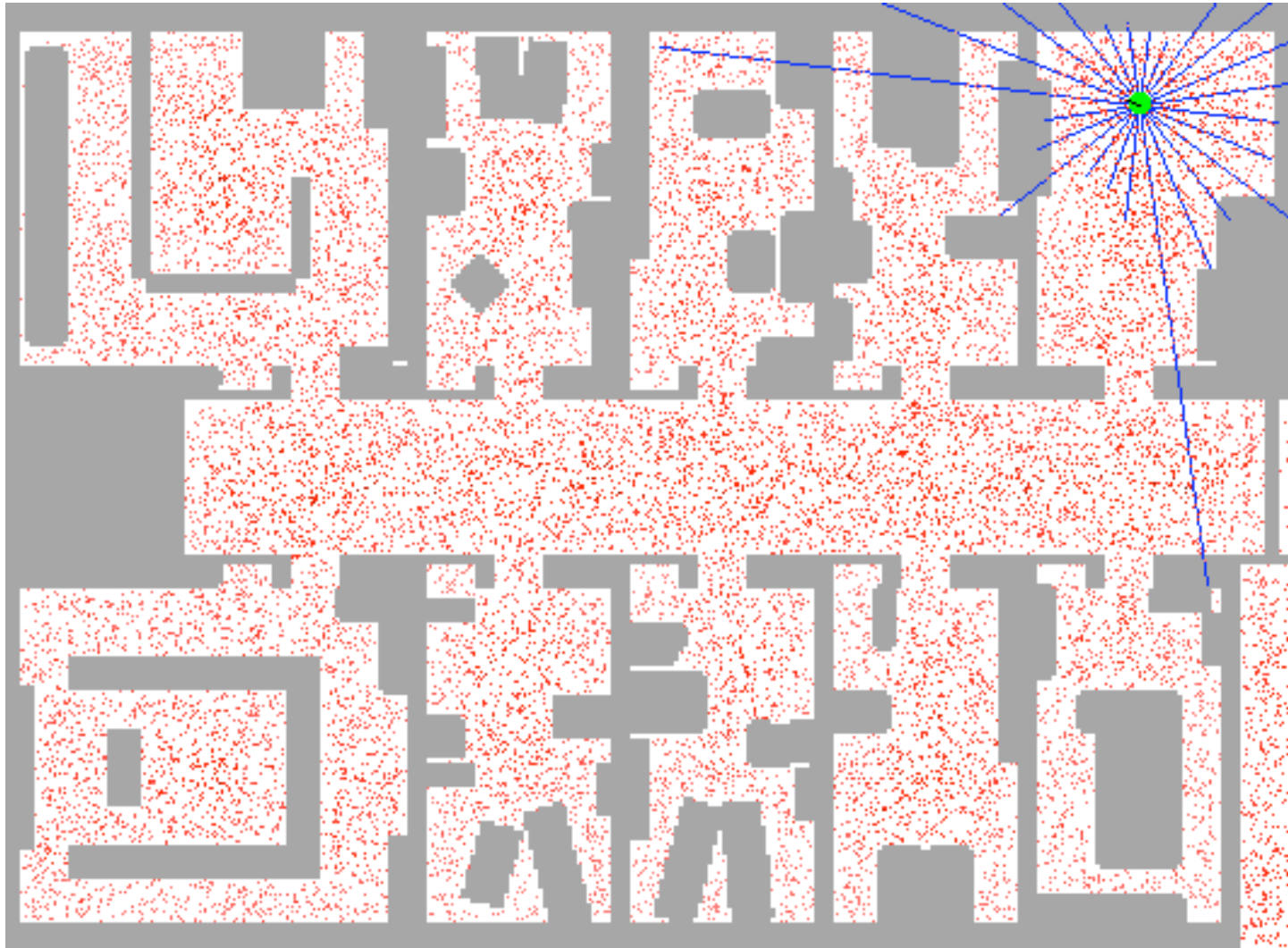
- **Recursion: à $t>0$**

- Pour chaque particule $x_{t-1}^{[i]}$ de X_{t-1} , générer une particule $x_t^{[i]}$ selon $p(x_t | u_t, x_{t-1}^{[i]})$. Soit X_t^a l'ensemble de ces particules.
- Tirer M particules de X_t^a telles que chaque $x_t^{[i]}$ de X_t^a est tiré avec remplacement avec une probabilité proportionnelle à $p(z_t | x_t^{[i]})$. Soit X_t cet ensemble.

Filtrage particulaire



Localisation particulière



S. Thrun, W. Burgard, D. Fox, F. Dellaert

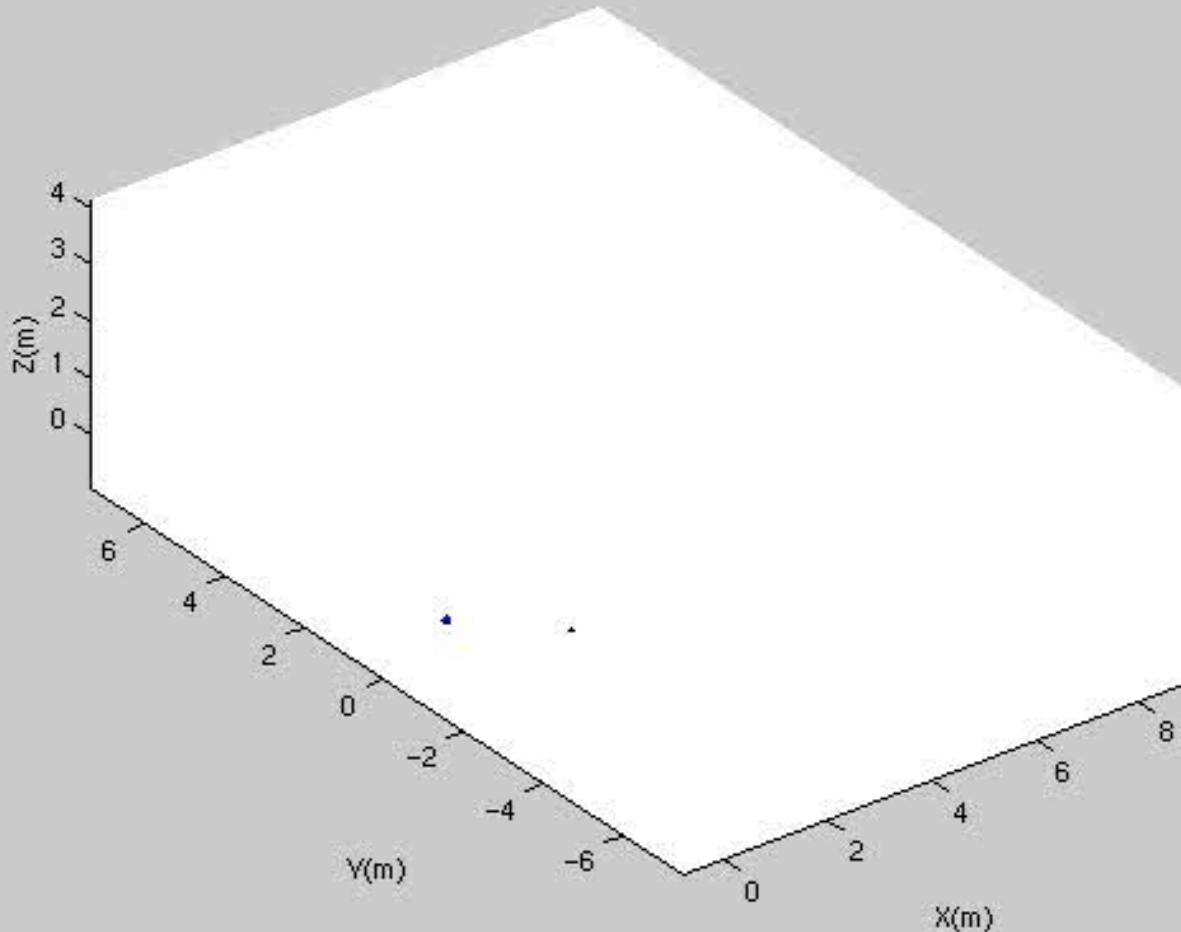
Exemple: Amers = points d'intérêt (1/2)

110 images
Amas de
10m diam.



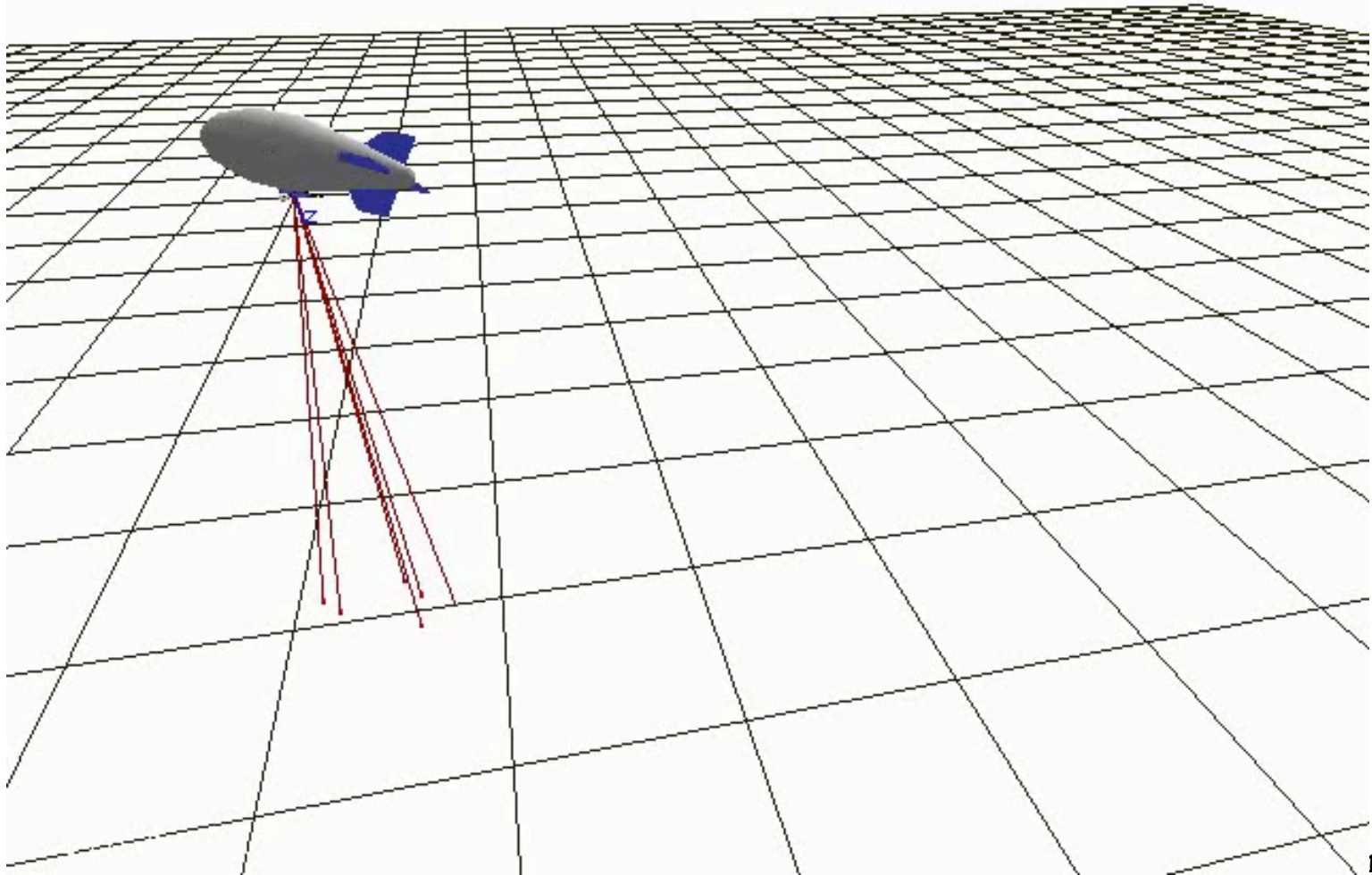
- Points d'intérêt (HARRIS) dans chaque image.
- Points 3D correspondants utilisés par un SLAM EKF

Exemple: Amers = points d'intérêt (2/2)



Erreurs:
angles: $\sim 1^\circ$,
position : $\sim 1-3$ cm

Example: SLAM à partir d'images aériennes (uniquement)



Navigation en environnement naturel



Problèmes ouverts

- Cartographie 3D dense: espace, objets.
- Environnements non structurés et naturels.
- Environnements dynamiques.
- Grands espaces (complexité).
- Association de données.