Robustesse et Commade Adaptative

Dimitri PEAUCELLE

LAAS-CNRS - Toulouse, FRANCE

Séminaire de groupe

10-13 Janvier 2007, Bolquere

Plan de la présentation

① **Passivité et commande adaptative**

② Formules LMI pour les systèmes LTI

③ Commande adaptative robuste

④ Exemple

Passivité

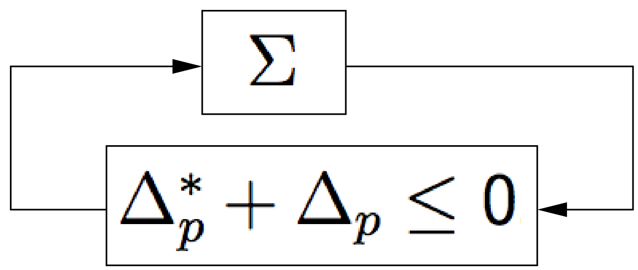
Passivité

Le système $y = \Sigma(u)$ est passif

si le produit scalaire $< u|y >= u^* y \geq 0$.

$\Leftrightarrow$ Σ est dissipatif [Willems] vis-à-vis du ”supply rate” $u^* y$.

$\Leftrightarrow$ Σ est robustement stable vis-à-vis de $u = \Delta_p y$ avec $\Delta_p^* + \Delta_p \leq 0$.



$\Leftrightarrow$ Le problème de Lur’e est résolu pour $u = -\phi(y)$ avec $y^* \phi(y) \geq 0$.

Remarque : Σ est stable s’il est passif.

Si Σ est passif

→ Tout bouclage rétroactif $u = -\Sigma_K(y)$ avec Σ_K passif conserve la passivité.

→ Toute commande statique $u(t) = Fy(t)$ avec $F + F^* \leq 0$ est pacificatrice.

→ Idem avec $u(t) = K(t)y(t)$ si $K^*(t) + K(t) \leq 0$.

→ Idem avec $F = -k\mathbf{1}$ et $k \geq 0$ (un paramètre de réglage)

→ ou encore $u(t) = -k(t)y(t)$ et faire n'importe quel réglage en ligne qui préserve $k(t) \geq 0$.

D'où l'importance de la passivité en commande adaptative.

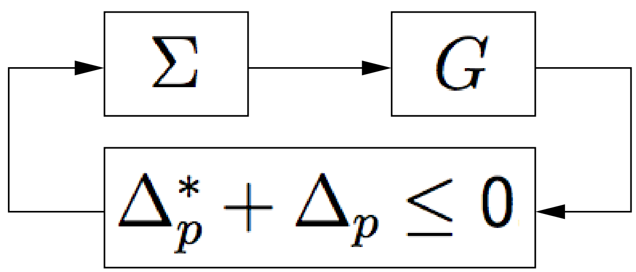
Cas des systèmes non-carrés

→ Si $u \in \mathrm{R}^m$, $y \in \mathrm{R}^p$ avec $p > m$

→ ou $p = m$ mais le systèmes n'est pas passif ?

Il peut exister G (combinaison linéaire des sorties) tel que $G\Sigma$ est passif :

$$\exists G \in \mathrm{R}^{m \times p} \quad : \quad \hat{y} = Gy = G\Sigma(u) \ , \quad u^* \hat{y} \geq 0$$



On dit alors que le système est **G-passif**

G-passification par retour de sortie

Les conditions équivalentes :

→ Le système $G\Sigma$ est à <u>hyper minimum de phase</u>

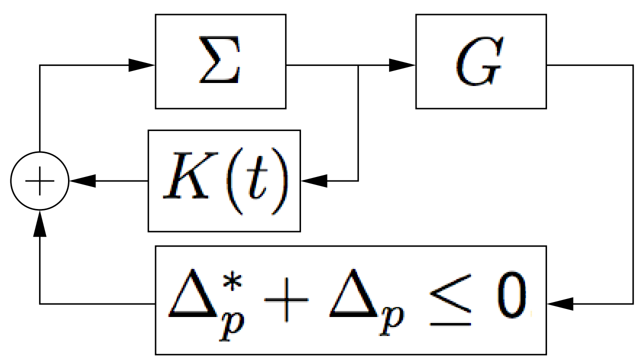
(zéros stables, nb zéros $\geq$ nb pôles -1)

→ Le système Σ est G-passifiable par retour de sortie statique :

$$u = v + Fy \ , \ \ \hat{y} = G[\Sigma \star F](v) \quad : \quad v^* \hat{y} \geq 0$$

→ Le système Σ est G-passifiable par la commande adaptative suivante

$$u(t) = v(t) + K(t)y(t) \ , \ \ \dot{K}(t) = -Gy(t)y^*(t)\Gamma \quad : \quad \Gamma > 0$$



Principe de la commande adaptative :

→ La loi d'adaptation consiste à faire "décroître" le gain de commande
$\dot{K}(t) = -Gy(t)y^*(t)\Gamma$

→ Au delà d'une certaine limite la boucle fermée devient G-passive

→ Rien n'empêche le gain $K(t)$ de diverger

Robustesse aux bruits de mesure :

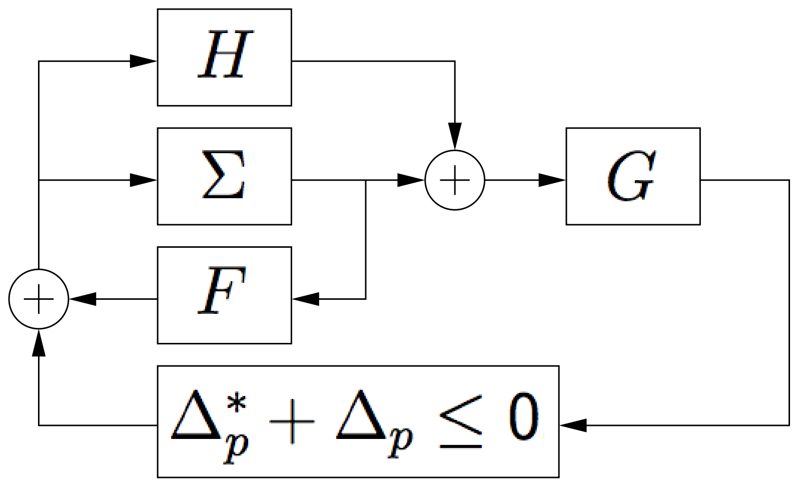
→ Ajouter un terme "correctif" : $\dot{K}(t) = -Gy(t)y^*(t)\Gamma - \alpha(K(t) - F)$
où F est un gain statique stabilisant...

→ Ajouter un terme "correctif" : $\dot{K}(t) = -Gy(t)y^*(t)\Gamma - \phi_{\boldsymbol{F}}(K(t))\Gamma$
où $\phi_{\boldsymbol{F}}(K) = 0$ si $K \in \boldsymbol{F}$, ensemble contenant un gain stabilisant...

→ Autres versions élaborées pour le mode glissant (surface $Gy = 0$) ou pour suivre un modèle de référence.

Quid des systèmes pour lesquels il n’existe pas de solution (F, G) telles que $\Sigma \star F$ est G-passif ?

Dans ce cas on peut rechercher (F, G) et H (”shunt”, système LTI) tel que $[\Sigma \star F + H]$ est G-passif.



Une solution existe pour tout système stabilisable ?

Plan de la présentation

① Passivité et commande adaptative

② **Formules LMI ou BMI pour les systèmes LTI**

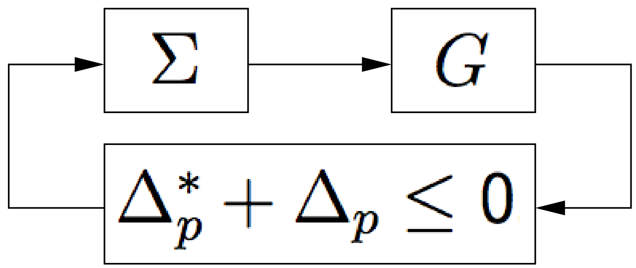
③ Commande adaptative robuste

④ Exemple

Analyse LMI : Σ est-il G-passif ?

Cas des systèmes LTI

$$\Sigma \quad : \quad \dot{x} = Ax + Bu \ , \quad y = Cx$$



Stabilité robuste

$$\text{ssi } \exists P > 0 \ : \quad \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 & C^T G^T \\ GC & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ssi } \exists P > 0 \ : \quad A^T P + PA < 0 \ , \quad PB = C^T G^T \ .$$

Théorème

Le système $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ est G-passifiable par retour de sortie

ssi

pour une valeur de $k \geq 0$ suffisamment grande, il existe une solution (P, G) à

$$A^T P + PA < 2kC^T G^T GC \ , \quad PB = C^T G^T \ , \quad P > 0 \ .$$

Dans ce cas $F = -kG$ est un retour de sortie statique G-passifiant.

Remarques :

→ La propriété est robuste à de petites variations paramétriques $A(\Delta)$

→ Les incertitudes $B(\Delta)$ et $C(\Delta)$ sont (quasiment) interdites !

→ $F = -kG$ n'est pas la seule solution, il peut y en avoir de gain plus faible

Théorème

Le système $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ est G-passifiable par retour de sortie

ssi

il existe une solution (P, F) à

$$A^T P + PA + C^T(G^T F + F^T G)C < 0 \ , \quad PB = C^T G^T \ , \quad P > 0 \, .$$

Remarques :

→ F étant une variable il est simple d'imposer $F \in \boldsymbol{F}$ si $\boldsymbol{F}$ est LMI

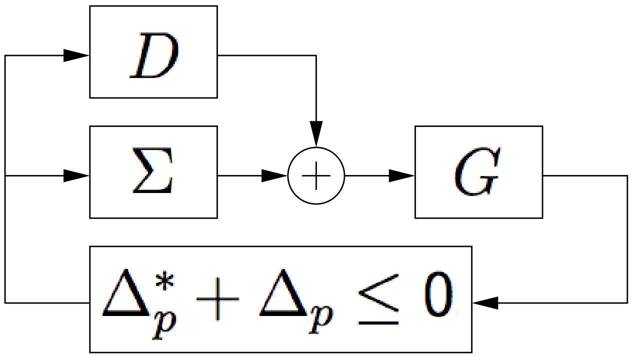
→ Si $A(\Delta) \in \mathrm{co}\{A^{[1]}, \ldots, A^{[N]}\}$ et il existe $P > 0$ et $F \in \boldsymbol{F}$ tels que

$$A^{[i]^T} P + PA^{[i]} + C^T(G^T F + F^T G)C < 0 \ , \quad PB = C^T G^T$$

alors Σ est robustement G-passifié par $F \in \boldsymbol{F}$.

→ Résultat analogue pour les systèmes LFT (incertitudes uniquement sur $A(\Delta)$).

"Shunt" nécessaire pour le cas général :



robustement stable ssi $\exists P > 0$:

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 & C^T G^T \\ GC & GD + D^T G^T \end{bmatrix}$$

En admettant le "shunt" D comme paramètre de synthèse on peut relâcher la contrainte égalité en

$$(PB(\Delta) - C^T(\Delta)G^T)^T(PB(\Delta) - C^T(\Delta)G^T) \leq \tau 1$$

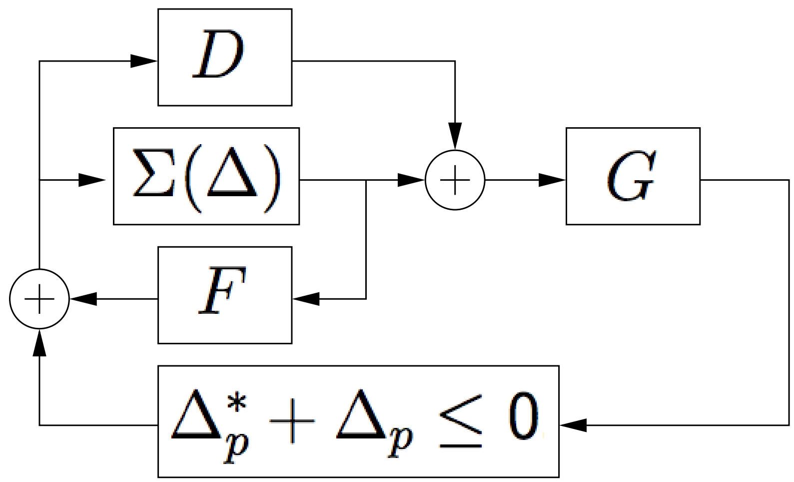
et faire de la synthèse LMI robuste (G supposée fixée a priori).

Résumé des conditions BMI et LMI

➞ **BMI "simple" :** trouver G tq $\Sigma(0)$ est G-passifiable

➞ **LMI :** Trouver D et $F \in \boldsymbol{F}$ tq $[\Sigma(\Delta) \star F + D]$ est robustement G-passif

i.e.



est robustement stable.

Plan de la présentation

① Passivité et commande adaptative

② Formules LMI ou BMI pour les systèmes LTI

③ **Commande adaptative robuste**

④ Exemple

Robustesse et commande adaptative

→ Idéalement : gains de commande s'adaptent aux paramètres

→ Mais - preuves de convergence que s'il existe un gain statique

→ Approche basée sur l'existence de grands gains

→ Mais - existence de gains bornés pour assurer robustesse aux perturbations

→ Algorithmes adaptatifs utilisés pour l'estimation des paramètres

→ Robustesse assurée par l'ajustement en fonction des estimés

→ Suppose des variations lentes

→ Preuve par les LMI que la commande s'adapte aux paramètres

Théorème :

Soient

→ une matrice G donnée et

→ une partition $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Delta}_1 \cup \boldsymbol{\Delta}_2 \ldots \cup \boldsymbol{\Delta}_p$ de l'espace des incertitudes

Trouver D et $F_i \in \boldsymbol{F}$ telles que pour tout $i = 1 \ldots p$

$[\Sigma(\Delta) \star F_i + D]$ est robustement G-passif vis-à-vis de $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}_i$,

admet une formulation LMI.

Remarques :

→ Formulation LMI pessimiste (P_i indépendant de Δ)

→ Asymptotiquement non pessimiste si on affine la partition.

Commande adaptative G-passifante pour tout l'ensemble $\boldsymbol{\Delta}$

Conséquences pour la commande adaptative :

➞ Si il existent D et $F_i \in \boldsymbol{F}$ telles que pour tout $i = 1 \dots p$

$[\Sigma(\Delta) \star F_i + D]$ est robustement G-passif vis-à-vis de $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}_i$

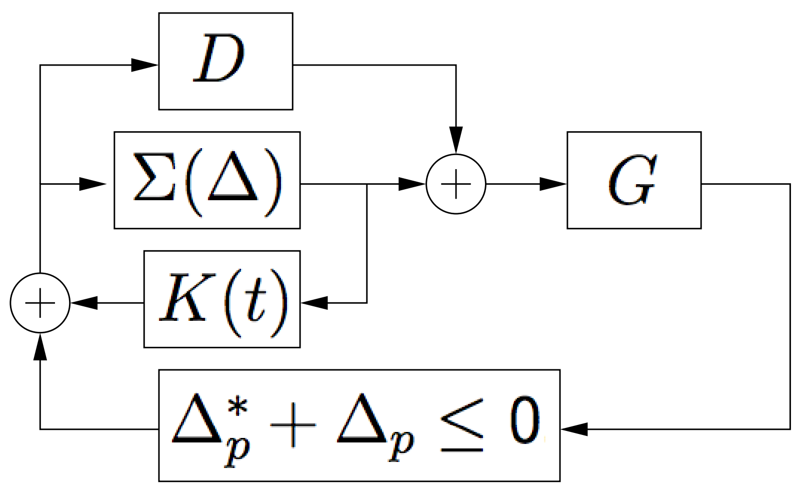
➞ Alors il existe $F(\Delta)$ telle que

$[\Sigma(\Delta) \star F(\Delta) + D]$ est robustement G-passif vis-à-vis de $\Delta \in \boldsymbol{\Delta} = \cup \boldsymbol{\Delta}_i$

➞ Alors la commande adaptative suivante rend $[\Sigma(\Delta) \star K + D]$ G-passif.

$$u(t) = v(t) + K(t)y(t) \;\; , \;\; \dot{K}(t) = -Gy(t)y^*(t)\Gamma - \phi_{\boldsymbol{F}}(K(t))\Gamma$$

i.e.



robustement stable

Commande adaptative G-passifante pour tout l'ensemble $\boldsymbol{\Delta}$

Remarques :

→ Si la commande adaptative

$$u(t) = v(t) + K(t)y(t) \;\;,\;\; \dot{K}(t) = -Gy(t)y^*(t)\Gamma - \phi_{\boldsymbol{F}}(K(t))\Gamma$$

converge vers une constante

→ Alors $K(\infty) = F(\Delta) \in \boldsymbol{F}$ est tq $[\Sigma(\Delta) \star F(\Delta) + D]$ est G-passif.

→ Les preuves sont faites avec Δ constante.

→ Cas des systèmes LTV ?

Plan de la présentation

① Passivité et commande adaptative

② Formules LMI ou BMI pour les systèmes LTI

③ Commande adaptative robuste

④ **Exemple**

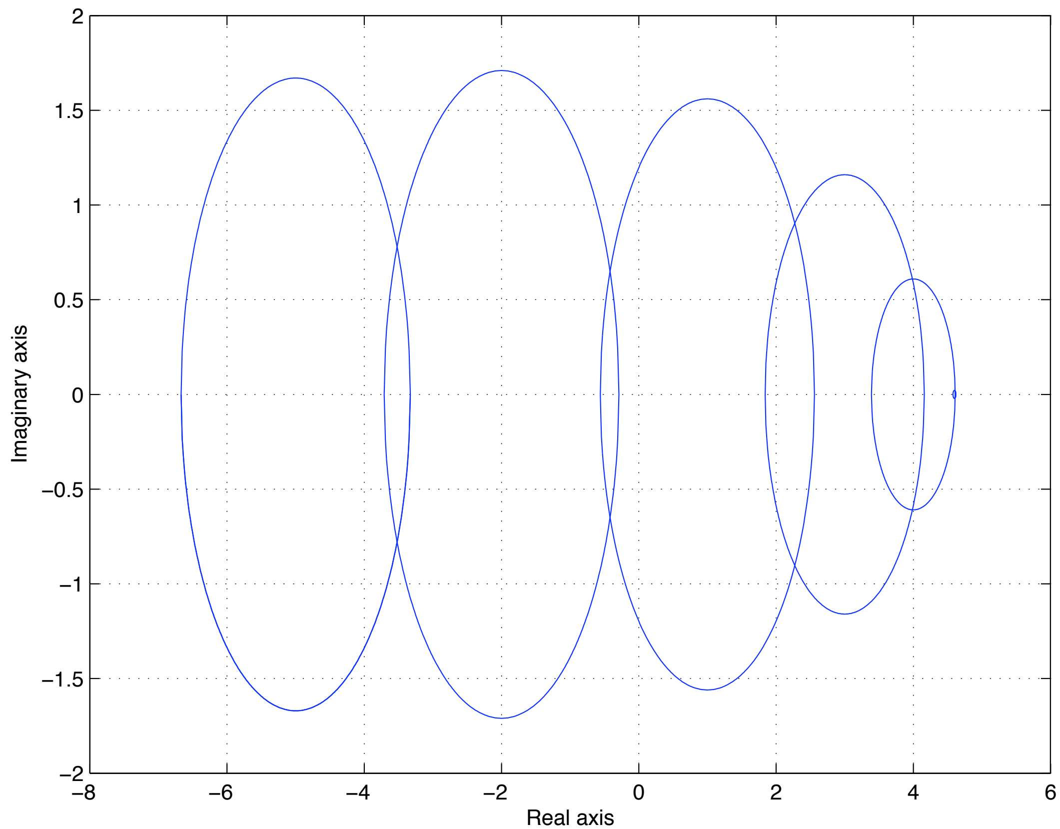
Exemple simple avec 1 paramètre incertain

→ Engin aéronautique, dynamiques latérales - ordre 4, mesures 3, actionneur 1

→ Incertitude : altitude - $A(h)$, B, C - modèle LFT, h bornée en norme

→ Synthèse de G avec PenBMI pour $h = 5$km ($< 1/2$s, SUNblade)

→ Synthèse de F ($\boldsymbol{F}$: $|F_{ij}| \leq 10$) et h bornée en norme autour de $\neq$ altitudes

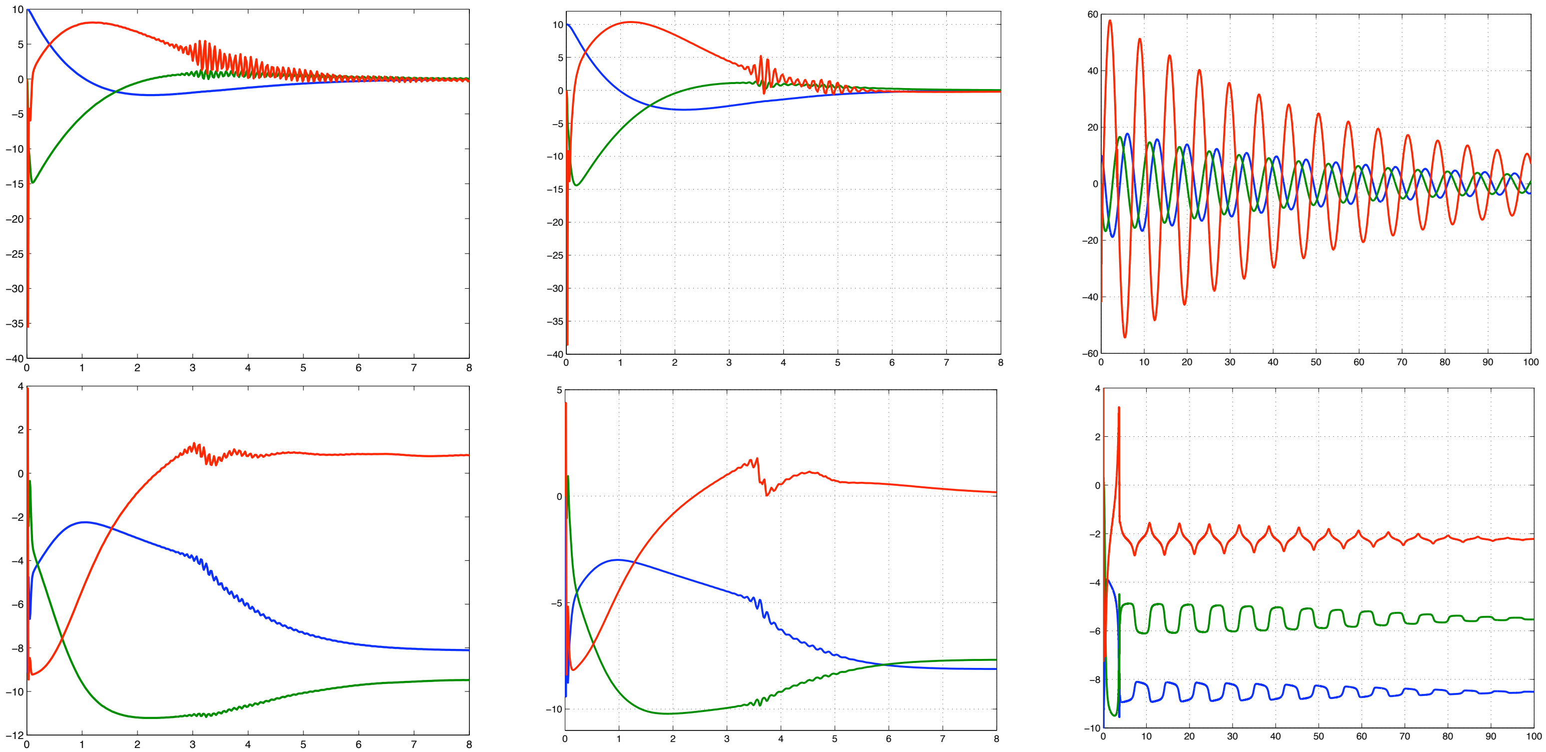


Réponses temporelles à diverses altitudes

$h = 0$km $\quad h = 5$km $\quad h = 9.6$km

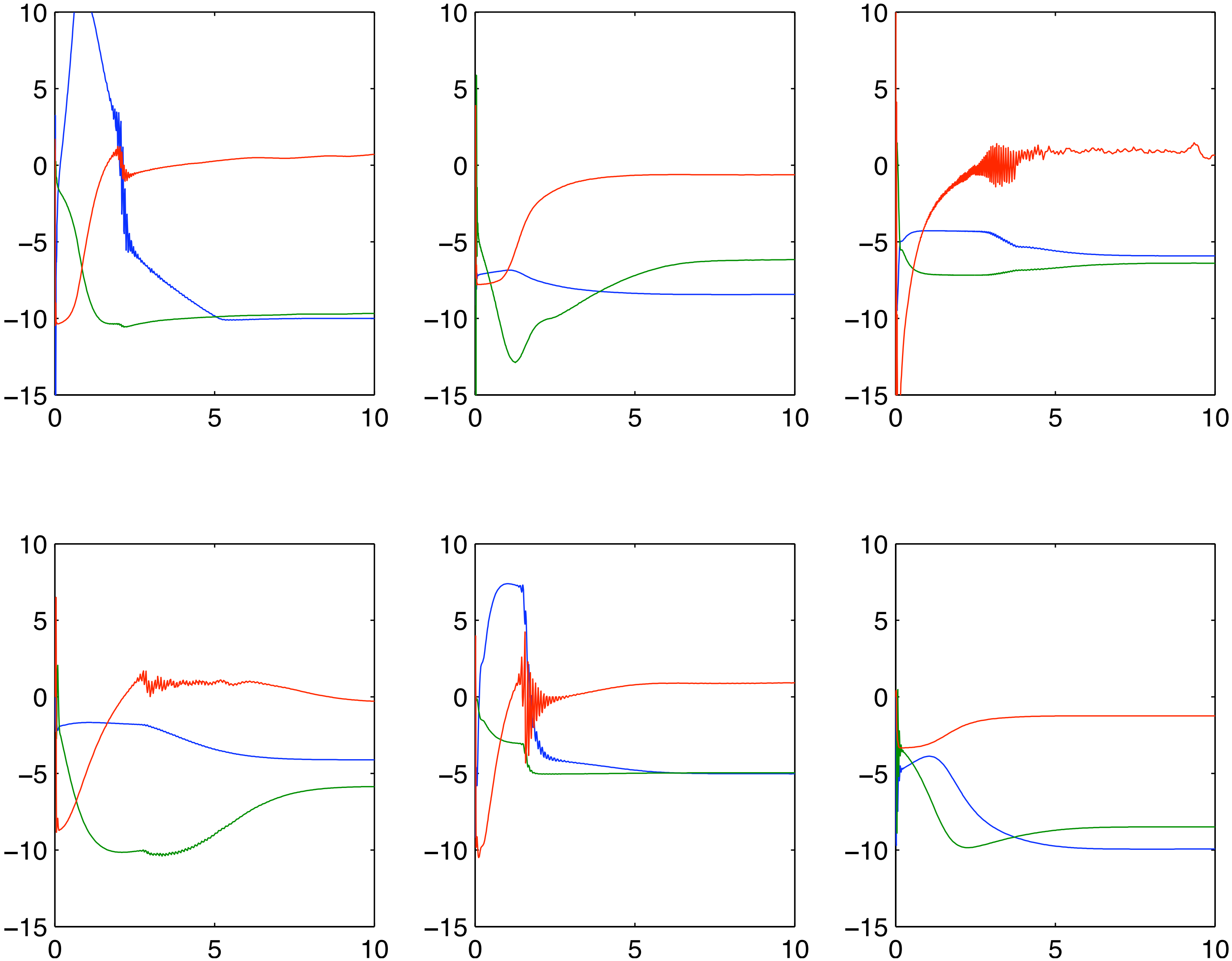
$y(t)$

$K(t)$



(Sans bruits de mesure)

$K(t)$ Pour divers choix de Γ



$y(t)$, $k(t)$ et $u(t)$ en présence de bruits de mesure et saturations