

# Commande périodique pour le contrôle d'attitude

---

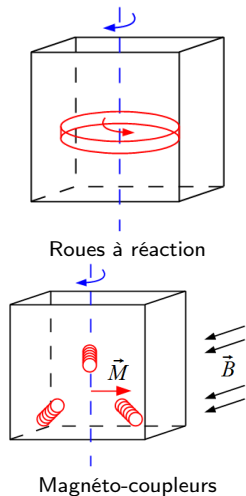
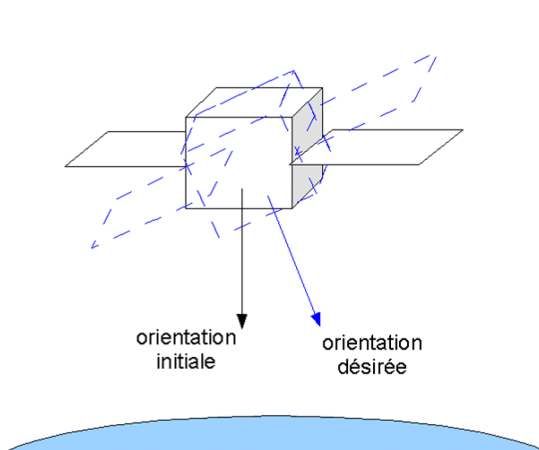
Jean-François Trégouët, Dimitri Peaucelle et Denis Arzelier

**LAAS-CNRS**

travaux financés et encadrés par le CNES (Christelle Pittet) et Astrium (Alexandre Falcoz)

3 avril 2013

# Contrôle d'attitude



# Modélisation mathématique (pointage inertiel)

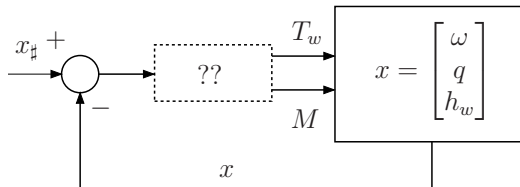
## Equations du mouvement d'attitude

$$J\dot{\omega} + \omega^\times (J\omega + h_w) = -T_w - B^\times(t, q)M + T_{\text{ext}} \quad (1a)$$

$$\dot{h}_w = T_w \quad (1b)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\omega^\times & \omega \\ -\omega^T & 0 \end{bmatrix} q \quad (1c)$$

$$B^\times = \begin{bmatrix} 0 & -B_z & B_y \\ B_z & 0 & -B_x \\ -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$



## Nomenclature

### Satellite :

- $\omega$  : vitesse angulaire
- $q$  : quaternion
- $J$  : matrice d'inertie
- $T_{\text{ext}}$  : couple extérieur de perturbation

### Roues à réaction :

- $h_w$  : moment cinétique
- $T_w$  : couple de commande

### Magnéto-coupleurs :

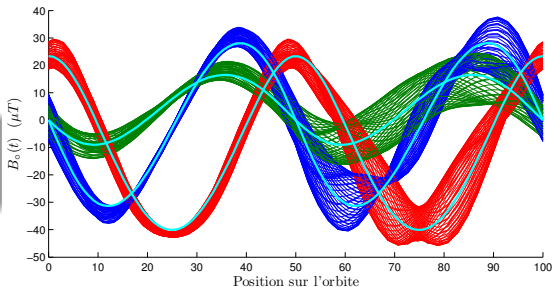
- $B(t, q)$  : champ géomagnétique
- $M$  : moment magnétique

# Difficulté du problème de commande

## Roues à réaction

Si  $T_w$  est constant alors  $h_w = T_w t$

✗ risque de saturation de  $h_w$



## Magnéto-coupleurs

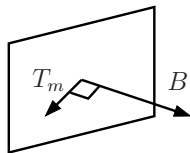
$$T_m = -B^\times(t, q)M = -(C(q)B_o(t))^\times M$$

- $C(q)$  : matrice de rotation
- $B_o(t)$  : champ géomagnétique dans le référentiel inertiel local

✗  $C(q)$  : modèle non-linéaire

✗  $B_o(t)$  : variation périodique et incertaine du modèle

✗  $( )^\times$  : commandabilité instantanée restreinte à 2 axes



✗ Possibles interactions néfastes entre les actionneurs

## Cas du couple de commande idéal

$$J\dot{\omega} + \omega^\times J\omega = T_{id}$$

- solutions disponibles dans la littérature [Mayhew, 2009]

$$T_{id} = u_T^*(\omega, q)$$

✗ ne tient pas compte des limitations des actionneurs

## Allocation [Forbes, 2010]

- $\forall t, \sum \text{actionneurs} = u_T^*(\omega, q)$
- ✓ convergence de l'attitude
- ✗ possible divergence de  $h_w$

## Séparation fréquentielle [Camillo, 1980]

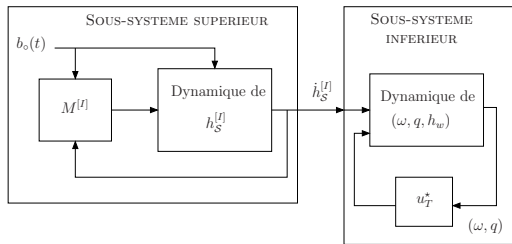
- commande d'attitude assurée via  $T_w$
- régulation de  $h_w$  par  $M$
- découplage fréquentiel entre  $M$  et  $T_w$
- ✗ perturbation de l'attitude par  $M$

# Approche basée sur le moment cinétique total

## Découplage physique

- roues : contrôle sur 3 axes mais pas d'action sur  $h_S^{[I]}$
- magnéto-coupleurs : commandabilité réduite mais agit sur  $h_S^{[I]}$

## Structure en cascade



## Equation sous-sys. sup.

$$\dot{h}_S^{[I]} = -B_o^\times(t)M^{[I]}$$

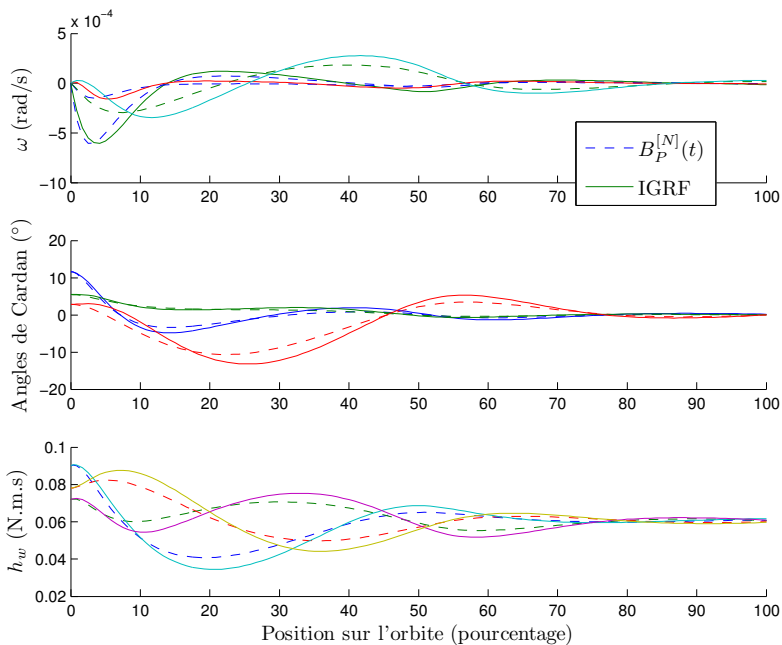
## Preuve de stabilité (résumé)

- $M^{[I]} = -k_m \frac{B_o^\times(t)}{\|B_o(t)\|^2} h_S^{[I]}$
- $T_w = -u_T^*(\omega, q) - \omega^\times h_w$  tel que sous-sys. inf. soit ISS

✓ ‡ est UGAS

## Hypothèse sur le champ

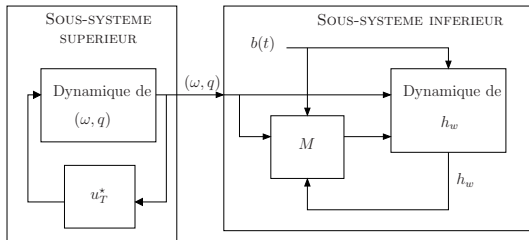
$B_o(t)$  périodique de période  $T_0/2$  et  $\exists \gamma > 0$ ,  $-\frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} \frac{B_o^\times(\tau)B_o^\times(\tau)}{\|B_o(\tau)\|^2} d\tau \succeq \gamma \mathbf{1}_3$



# Approche par allocation

## Démarche

- $\forall t, \sum \text{actionneurs} = u_T^*(\omega, q)$   
 $-T_w - (C(q)B_o(t))^{\times} M - \omega^{\times} h_w = u_T^*(\omega, q)$
- structure en cascade



Eq. sous-sys. inf. pour  $(\omega, q)_{\#}$

$$\dot{h}_w = -B_o^{\times}(t)M$$

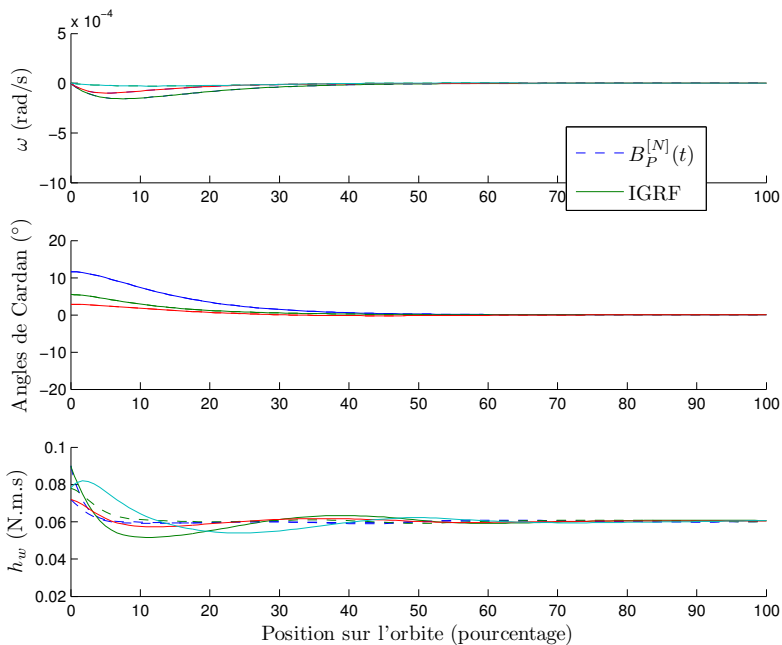
Preuve de stabilité (résumé)

- $T_w = -(C(q)B_o(t))^{\times} M - \omega^{\times} h_w - u_T^*(\omega, q)$
  - $M = -k_m \frac{B_o^{\times}(t)}{\|B_o(t)\|^2} h_w$
- ✓  $\#$  est UGAS

## Bilan

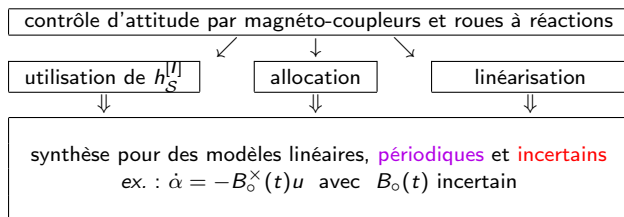
- ✓ formalisation mathématique rigoureuse
- ✓ faible hypothèse sur  $B_o(t) =$  robustesse
- ✓ pas de propriété ISS requise
- ✓ dynamique d'attitude indépendante de  $h_w$





# Amélioration de la performance

## Bilan des solutions proposées



## Problème général

boucle ouverte : 
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = M(t, \theta) \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad M(t+T, \theta) = M(t, \theta)$$

correcteur : 
$$u = K(t)x \quad \text{avec} \quad K(t+T) = K(t)$$

Comment définir  $K(t)$  pour que le modèle asservi satisfasse certaines propriétés ?

➡ **Cadre à temps discret**

# Enoncé général du problème

## Cadre de l'étude

$$\Sigma(k, \theta) \star (u_k = K_k x_k) = \Sigma_{cl}(k, \theta, K_k)$$

- période  $N$  :  $\Sigma(k + N, \theta) = \Sigma(k, \theta)$  et  $K_{k+N} = K_k$
- incertitudes polytopiques invariantes dans le temps :  $\theta$  appartient au simplexe unitaire

**Prob. d'analyse robuste** : Pour un correcteur  $K_k$  donné, prouver que  $\Sigma_{cl}(k, \theta, K_k)$  est stable robustement et calculer ses normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  :

$$\nu_{wc} = \max_{\theta \in \Theta} \|\Sigma_{cl}(k, \theta, K_k)\|_\infty^2, \quad \gamma_{wc} = \max_{\theta \in \Theta} \|\Sigma_{cl}(k, \theta, K_k)\|_2^2$$

**Prob. de synthèse robuste** : Calculer  $K_k$  stabilisant robustement  $\Sigma_{cl}(k, K_k, \theta)$  tout en minimisant sa norme  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  :

$$\nu_{wc} = \min_{K_k} \max_{\theta \in \Theta} \|\Sigma_{cl}(k, \theta, K_k)\|_\infty^2, \quad \gamma_{wc} = \min_{K_k} \max_{\theta \in \Theta} \|\Sigma_{cl}(k, \theta, K_k)\|_2^2$$

~~X~~ variation temporelle    ~~X~~ incertitudes    ~~X~~ problème min – max pour la synthèse

➡ **Problèmes d'analyse et de synthèse NP-difficiles**

## Traitement de la périodicité (état de l'art)

Reformulation invariante dans le temps (lifting monodromique) [Meyer, 1975]

$$\Sigma_{cl}(k, \theta, K_k) \qquad \Gamma_m(\theta, K_k)$$
$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_q \\ \hat{w}_q \end{bmatrix}$$

linéaire en  $\theta$  et  $K_k$       polynomial en  $\theta$  et  $K_k$  de degré  $N$

- ✓ outils LTI applicables (moment, Pólya, SOS, variables de relaxation)
- ✗ difficulté numérique

Fonction de Lyapunov périodique [Bittanti, 1984]

$$V(k, x_k, \theta) = x_k^T P(k, \theta) x_k \quad \text{avec} \quad P(k + N, \theta) = P(k, \theta)$$

- ✓ traitement direct de  $\Sigma_{cl}$  (linéaire en  $K_k$  et  $\theta$ )
- ✓ solution au problème de synthèse grâce à la dualité des systèmes [De Souza, 2000 et Farges, 2006]
- ✗ conditions LMI uniquement suffisantes

➡ **Comment réduire le conservatisme tout en maîtrisant l'effort de calcul ?**

# Nouvelle démarche vers la réduction du conservatisme

## Nouvelle reformulation invariante dans le temps

$$\Sigma_{cl}(k, \theta, K_k) \qquad \Gamma_e(\theta, K_k)$$
$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{nl} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{A} \\ -\sigma & \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{nl} & \begin{bmatrix} D & -\mathbf{1}_{pN} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

linéaire en  $\theta$  et  $K_k$

linéaire en  $\theta$  et  $K_k$

- élaboration d'outils adaptés d'analyse
- ✓ nouvelle condition d'analyse : conservatisme plus faible pour un effort équivalent
- construction du dual de  $\Gamma_e$
- ✓ condition de synthèse LMI

✓ Permet de considérer les correcteurs à mémoire

## Correcteurs à mémoire (3-périodique)

### Sans mémoire

$$\begin{cases} u_{3q} & = & K_{0,0} \times 3q \\ u_{3q+1} & = & K_{1,0} \times 3q+1 \\ u_{3q+2} & = & K_{2,0} \times 3q+2 \end{cases}$$

### Avec mémoire

$$\begin{cases} u_{3q} & = & K_{0,0} \times 3q + \dots + K_{0,\alpha_0} \times 3q - \alpha_0 \\ u_{3q+1} & = & K_{1,0} \times 3q+1 + \dots + K_{1,\alpha_1} \times 3q+1 - \alpha_1 \\ u_{3q+2} & = & K_{2,0} \times 3q+2 + \dots + K_{2,\alpha_2} \times 3q+2 - \alpha_2 \end{cases}$$

➡  $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}$  définit la structure du correcteur

### Les PFMC

$$\begin{cases} u_{3q} & = & & K_{0,0} \times 3q + & K_{0,1} \times 3q-1 + & K_{0,3} \times 3q-2 \\ u_{3q+1} & = & & K_{1,0} \times 3q+1 + & K_{1,1} \times 3q + & K_{1,3} \times 3q-2 \\ u_{3q+2} & = & K_{2,0} \times 3q+2 + & K_{2,1} \times 3q+1 + & K_{2,2} \times 3q + & K_{2,3} \times 3q-1 + & K_{2,4} \times 3q-2 \end{cases}$$

**Stabilisation robuste** : S'il existe  $\mathcal{G}$  et  $\check{\mathcal{Y}}$  telles que la condition suivante soit satisfaite quel que soit  $i \in \{1 \cdots L\}$ ,

$$\exists W^{[i]} \in \mathbb{S}_+^{nl} : \mathcal{X}(W^{[i]}) + \text{He} \left\{ \left( \begin{bmatrix} \check{\mathcal{A}}^{op[i]} \\ \check{\mathcal{E}}^{op[i]} \end{bmatrix} \mathcal{G} + \begin{bmatrix} \check{\mathcal{B}}_{u2}^{op[i]} \\ \check{\mathcal{B}}_{u1}^{op[i]} \end{bmatrix} \check{\mathcal{Y}} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_{nN} \end{bmatrix} \right\} \prec 0$$

alors il existe une solution au problème de stabilisation robuste. Les gains du correcteur sont calculés via la relation

$$\check{\mathcal{K}} = \check{\mathcal{Y}} \mathcal{G}^{-1}$$

✓ **Conditions de synthèse LMI : stabilité,  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$**

Choix de  $\check{\mathcal{Y}}$  et  $\mathcal{G}$

- structure de  $\check{\mathcal{K}}$  fonction de  $\alpha_k$
- Cas général :  $\mathcal{G}$  diagonale par blocs et  $\check{\mathcal{Y}}$  conforme à  $\check{\mathcal{K}}$
- Cas des PFMC : idem avec  $\mathcal{G}$  triangulaire

## Choix de la structure $\alpha_k$ du correcteur

### Exemple de correcteurs 3-périodique

	$\alpha_k$	Formes développées
(a)	$\{1, 1, 1\}$	$\begin{cases} u_{3q} = & K_{0,0} \times 3q \\ u_{3q+1} = & K_{1,0} \times 3q+1 \\ u_{3q+2} = & K_{2,0} \times 3q+2 \end{cases}$
(b)	$\{1, 2, 1\}$	$\begin{cases} u_{3q} = & K_{0,0} \times 3q \\ u_{3q+1} = & K_{1,0} \times 3q+1 + K_{1,1} \times 3q \\ u_{3q+2} = & K_{2,0} \times 3q+2 \end{cases}$
(c)	$\{1, 2, 3\}$	$\begin{cases} u_{3q} = & K_{0,0} \times 3q \\ u_{3q+1} = & K_{1,0} \times 3q+1 + K_{1,1} \times 3q \\ u_{3q+2} = & K_{2,0} \times 3q+2 + K_{2,1} \times 3q+1 + K_{2,2} \times 3q \end{cases}$

### Exemple académique

$$A_0^{ol} = \begin{bmatrix} -3 & -\theta_1 & 2 \\ & -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1^{ol} = \begin{bmatrix} -1 & -\theta_1 & 2 \\ & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2^{ol} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_1 & 2 \\ & 2.5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = B_{u0} = \begin{bmatrix} 1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_{u1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.3\theta_2 - 0.2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = B_{u2} = \begin{bmatrix} 0.5(\theta_2 + 1) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_0^{ol} = \begin{bmatrix} -0.5 & -\theta_1 & 0 \\ & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C_1^{ol} = \begin{bmatrix} -\theta_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_2^{ol} = \begin{bmatrix} 1.5 & -\theta_1 & 0 \\ & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D_0 = D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{u0} = D_{u1} = D_{u2} = \begin{bmatrix} -\theta_2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

- $|\theta_1| \leq 0.6$  et  $0 \leq \theta_2 \leq 1 \Rightarrow$  modèle polytopique 3-périodique à 4 sommets

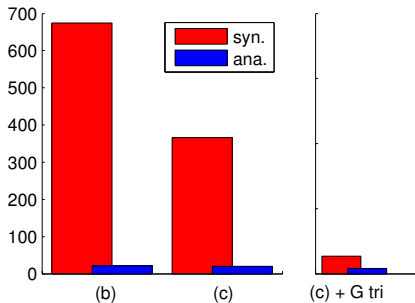


- Enrichissement de la loi ( $\mathcal{G}$  diag.)

- Cas particulier des PFMC ( $\mathcal{G}$  tri.)

➔ Conditions de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  non faisable sans mémoire

	lignes	variables	synthèse	analyse
(a)	64	31	-	-
(b)	64	33	673.9	20.7
(c)	64	37	366.3	20.3
(c) + $\mathcal{G}$ tri.	64	49	54.6	15.8



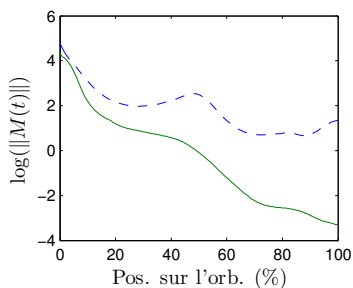
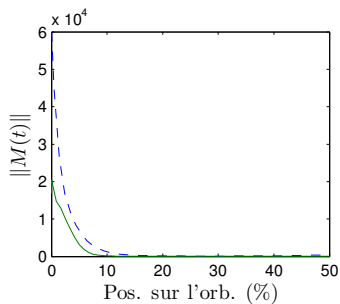
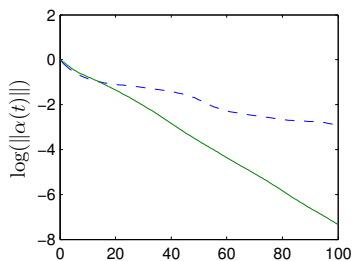
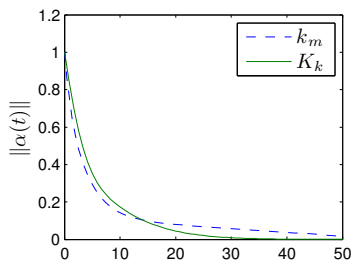
- ✓ Ajouter des degrés de liberté et considérer  $\mathcal{G}$  triangulaire peut réduire le conservatisme tout en maîtrisant l'effort de calcul

## Modèle de synthèse

- intégrateur simple avec champ incertain

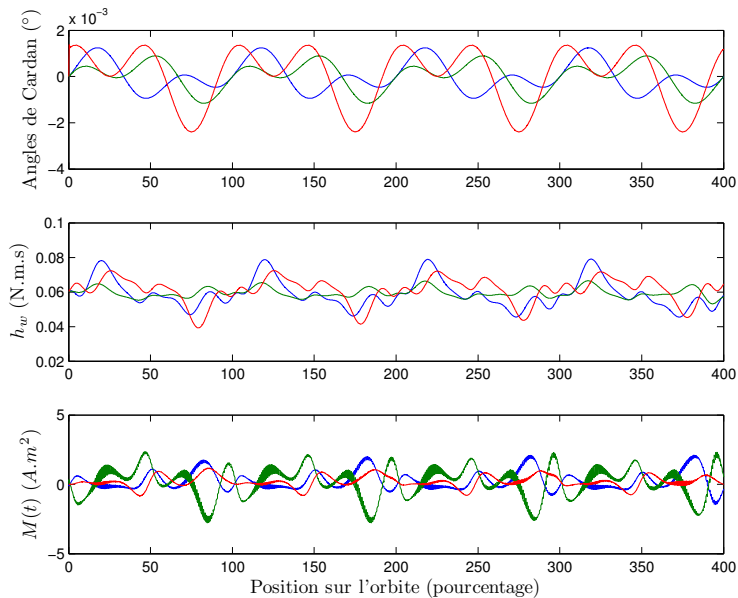
$$\dot{\alpha} = -(B_o(t) + \Delta B_o(t))^\times M$$

- synthèse d'un correcteur stabilisant qui minimise l'influence de  $\Delta B_o$  sur  $\alpha$  et  $M$



✓ Diminution de l'effort de commande

## Simulation finale avec allocation + $T_{ext}$



# Conclusions

## Contrôle d'attitude

- ✓ deux nouvelles stratégies de commande
- ✓ pour la loi d'allocation : schéma d'asservissement en conformité avec les objectifs de commande

### Perspectives :

- décloisonnement du rôle des actionneurs (participation des magnéto-coupleurs au contrôle d'attitude)
- prendre en compte l'expression des perturbations dès la synthèse

## Synthèse pour les modèles périodiques incertains

- ✓ approche systématique pour l'analyse et la synthèse de correcteurs périodiques à mémoire

### Perspectives :

- liens avec les modèles périodiques polynomiaux en  $\sigma$
- vérification d'exactitude
- retour de sortie

**Merci de votre attention !**

- dimension du modèle test
  - $n = 2, p = 6, m = 3, N = 3, L = 4$
  - matrices polynomiales en  $\theta$  de degré 3
- analyse  $\mathcal{H}_\infty$  :

$$\begin{bmatrix} \Psi^T(\theta)P(\theta)\Psi(\theta) - P(\theta) + \mathfrak{C}^T(\theta)\mathfrak{C}(\theta) & \Psi^T(\theta)P(\theta)\mathfrak{B}(\theta) + \mathfrak{C}^T(\theta)\mathfrak{D}(\theta) \\ \mathfrak{B}^T(\theta)P(\theta)\Psi(\theta) + \mathfrak{D}^T(\theta)\mathfrak{C}(\theta) & \mathfrak{B}^T(\theta)P(\theta)\mathfrak{B}(\theta) + \mathfrak{D}^T(\theta)\mathfrak{D}(\theta) - \nu\mathbf{1}_{mN} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2)$$

- 5 lignes
- $\Psi, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  polynomiale de degré 3 en  $\theta$
- linéaire en  $P(\theta)$
- $P(\theta)$  polynomiale de degré inconnu
- synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  :
  - $\Psi = (A_2(\theta) + B_2(\theta)K_2) (A_2(\theta) + B_2(\theta)K_1) (A_2(\theta) + B_2(\theta)K_0)$
  - ...

## Synthèse du correcteur périodique

- boucle ouverte

$$\dot{\alpha} = -(B_o + \Delta B_o)^\times(t)M \quad (3)$$

- correcteur

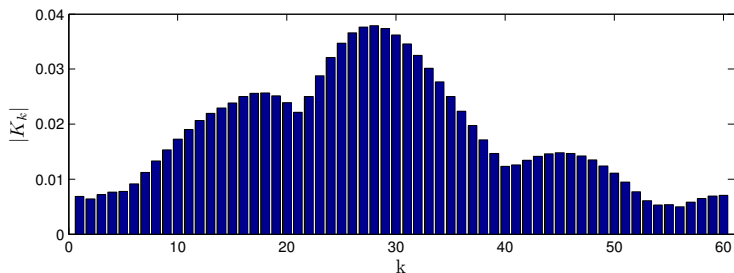
$$M(t, \alpha) = -\frac{b^\times(t)}{\|B(t)\|} M^*(t, \alpha) \quad (4)$$

$$M^*(t, \alpha) = K_k \alpha_k \quad \text{avec } k \in \mathbb{N} \text{ satisfaisant } kT_s \leq t < (k+1)T_s \quad (5)$$

- modèle de synthèse

$$\dot{\alpha} = \frac{(B_o(t) + \Delta B_o(t))^\times (B_o(t) + \Delta B_o(t))^\times}{\|B_o(t) + \Delta B_o(t)\|^2} M^* \quad (6)$$

- discrétisation :  $T_s = 48.9$  sec.  $\Rightarrow N = 60$  échantillons par demi-orbite
- synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  :  $18N + 7 = 1087$  variables et  $9N + 6 = 546$  lignes





# Approche par linéarisation

## Démarche

- linéarisation du modèle autour de  $\sharp$

$$(\omega, q, h_w)_\sharp = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, h_\sharp)$$

- synthèse d'un correcteur valide localement

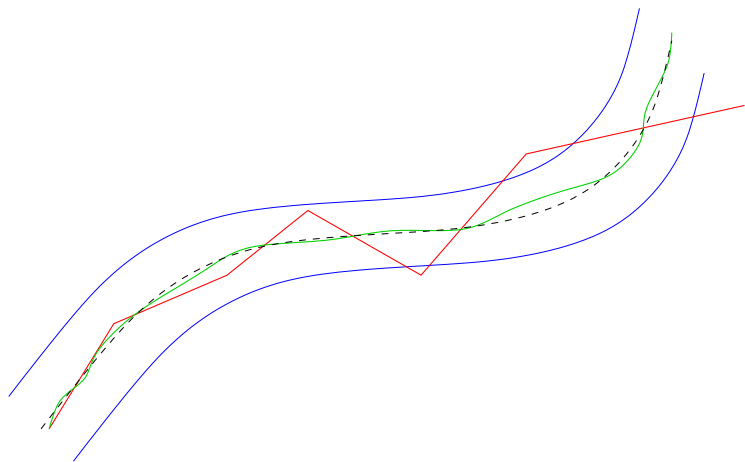
## Définition de la trajectoire de linéarisation

- dans le cas général, il n'existe pas  $(T_w, M)$  tels que  $\sharp$  soit un équilibre stable
- (exception si  $T_{\text{ext}} = \mathbf{0}$  et pointage inertiel)

➡ interprétation via un rejet de perturbation fictive validant la linéarisation

## Choix de la période d'échantillonnage

- ✗ le théorème de Nyquist-Shannon ne s'applique pas au modèle à temps variant
- ✗  $u(t)$  constant pendant une période d'échantillonnage : éloignement de la trajectoire de linéarisation



- $T_s = 147$  sec.  $\Rightarrow N = 20$  et  $T_s = 98$  sec.  $\Rightarrow N = 30$
- 2100 variables et 780 lignes pour  $N = 20$
- 3150 variables et 1170 lignes pour  $N = 30$

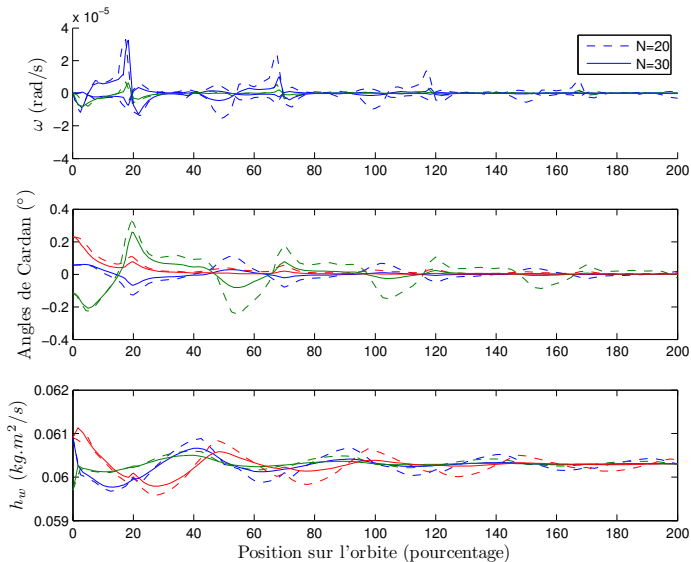


Figure: Résultats de l'approche locale avec  $B_p^{[N]}(t)$  et  $T_{\text{ext}}(t) = 0$

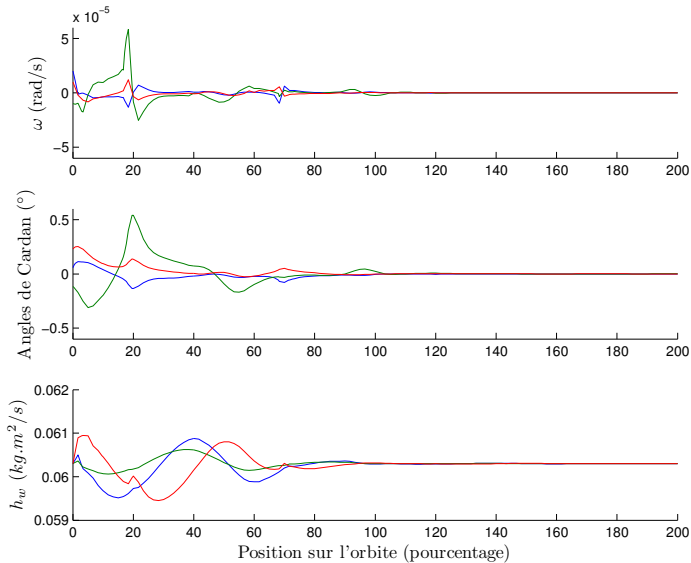


Figure: Résultats de l'approche locale avec le modèle de l'IGRF et  $T_{\text{ext}}(t) = 0$

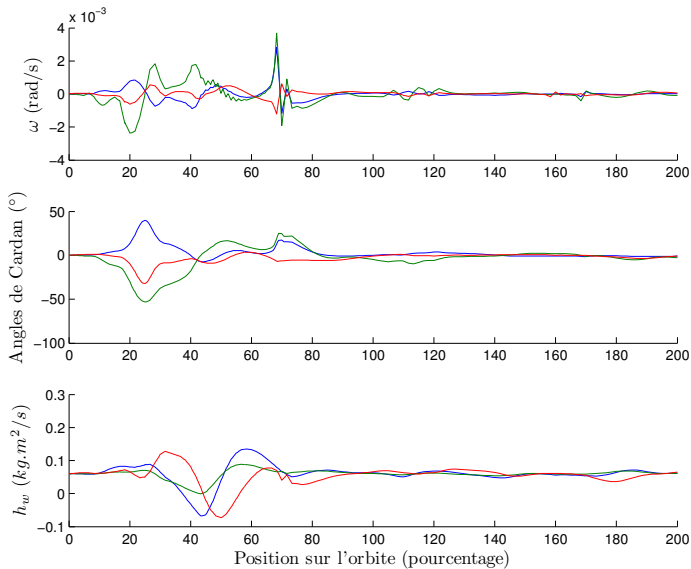


Figure: Résultats de l'approche locale avec le modèle de l'IGRF et avec perturbations