

Robustesse de la commande adaptative directe : résultats LMI

Dimitri PEAUCELLE[†] & Alexander L. FRADKOV[‡]

[†] LAAS-CNRS - Université de Toulouse, FRANCE 

[‡] IPME-RAS - St Petersburg, RUSSIA 

CNRS-RAS cooperative research project

"Robust and adaptive control of complex systems: Theory and applications"

CNRS-RAS cooperation objectives

- ➔ Investigate robustness issues of adaptive algorithms for control
both theoretically and through experiments
- ➔ Adaptive Identification (CCA'07, ALCOSP'07)
- ➔ Direct adaptive control (ROCOND'06, ALCOSP'07, ACC'07, ACA'07)
- ➔ State-estimation in limited-band communication channel

Other cooperations

- ➔ Also part of ECO-NET project "Polynomial optimization for complex systems", funded by French Ministry of Foreign Affairs, and handled by Egide.
Concerned countries : Czech Republic, France, Russian Federation, Slovakia.
- ➔ Submitted a PICS project "Robust and adaptive control of complex systems" (funded by CNRS and RFBR).

① **Passivité et commande adaptative**

② Formules LMI pour les systèmes LTI

③ Commande adaptative robuste

④ Exemple

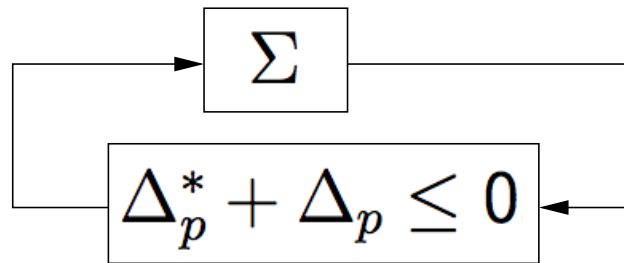
Passivité

Le système $y = \Sigma(u)$ est passif

si le produit scalaire $\langle u|y \rangle = \int_0^\infty u^*(t)y(t)dt \geq 0$.

$\Leftrightarrow \Sigma$ est dissipatif [Willems] vis-à-vis du "supply rate" $\langle u|y \rangle$.

$\Leftrightarrow \Sigma$ est robustement stable vis-à-vis de $u = \Delta_p y$ avec $\Delta_p^* + \Delta_p \leq 0$.



\Leftrightarrow Le problème de Lur'e est résolu pour $u = -\phi(y)$ avec $y^* \phi(y) \geq 0$.

Remarque : Σ est stable s'il est passif.

Si Σ est passif

- Tout bouclage rétroactif $u = -\Sigma_K(y)$ avec Σ_K passif conserve la passivité.
- Toute commande statique $u(t) = Fy(t)$ avec $F + F^* \leq 0$ est pacificatrice.
- Idem avec $u(t) = K(t)y(t)$ si $K^*(t) + K(t) \leq 0$.
- Idem avec $F = -k1$ et $k \geq 0$ (un paramètre de réglage)
- ou encore $u(t) = -k(t)y(t)$ et faire n'importe quel réglage en ligne qui préserve $k(t) \geq 0$.

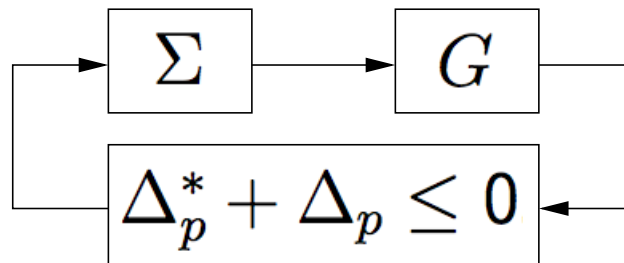
D'où l'importance de la passivité en commande adaptative.

→ Si $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ avec $p > m$

→ ou $p = m$ mais le système n'est pas passif ?

Il peut exister G (combinaison linéaire des sorties) tel que $G\Sigma$ est passif :

$$\exists G \in \mathbb{R}^{m \times p} : \hat{y} = Gy = G\Sigma(u) , \quad \langle u | y \rangle \geq 0$$



On dit alors que le système est **passif vis-à-vis du couple $(u, z = Gy)$**

Les conditions équivalentes :

→ Le système $G\Sigma$ est à hyper minimum de phase

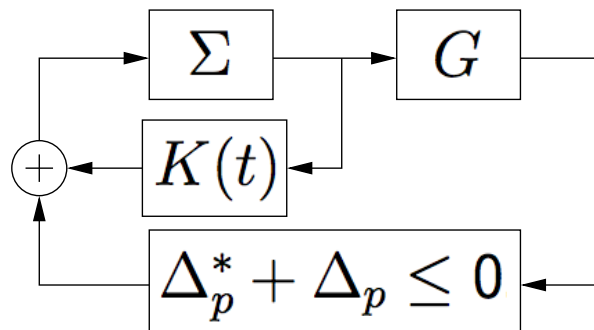
(zéros stables, nb zéros \geq nb pôles -1)

→ Le système Σ est passifiable vis-à-vis de $(v, z = Gy)$ par retour de sortie statique :

$$u = v + Fy, \quad z = G[\Sigma \star F](v) : \quad \langle u|y \rangle \geq 0$$

→ Le système Σ est passifiable vis-à-vis de $(v, z = Gy)$ par la commande Non Linéaire (adaptative) suivante

$$u(t) = v(t) + K(t)y(t), \quad \dot{K}(t) = -Gy(t)y^*(t)\Gamma : \quad \Gamma > 0$$



Principe de la commande adaptative :

→ La loi d'adaptation consiste à faire "décroître" le gain de commande

$$\dot{K}(t) = -Gy(t)y^*(t)\Gamma$$

→ Au delà d'une certaine limite la boucle fermée devient passive

→ Rien n'empêche le gain $K(t)$ de diverger

Robustesse aux bruits de mesure :

→ Ajouter un terme "correctif" : $\dot{K}(t) = -Gy(t)y^*(t)\Gamma - \alpha(K(t) - F)$

où F est un gain statique stabilisant...

→ Ajouter un terme "correctif" : $\dot{K}(t) = -Gy(t)y^*(t)\Gamma - \phi_{\mathbf{F}}(K(t))\Gamma$

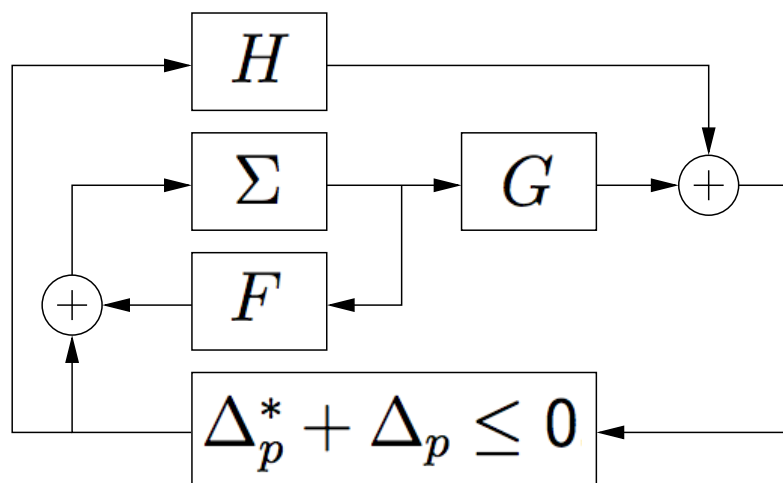
où $\phi_{\mathbf{F}}(K) = 0$ si $K \in \mathbf{F}$, ensemble contenant un gain stabilisant...

→ Autres versions élaborées pour le mode glissant (surface $Gy = 0$) ou pour suivre un modèle de référence.

Le "shunt"

Quid des systèmes pour lesquels il n'existe pas de solution (F, G) telles que $\Sigma \star F$ est passif vis-à-vis de $(v, z = Gy)$?

Dans ce cas on peut rechercher (F, G) et H ("shunt", système LTI) tel que $\Sigma \star F$ est passif vis-à-vis de $(v, z = Gy + Hv)$.



Une solution existe pour tout système stabilisable ?

① Passivité et commande adaptative

→ Commande adaptative non divergente si

$\exists F \in \mathbf{F}, G, H$ tq. $\Sigma \star F$ est passif vis-à-vis de $(v, z = Gy + Hv)$

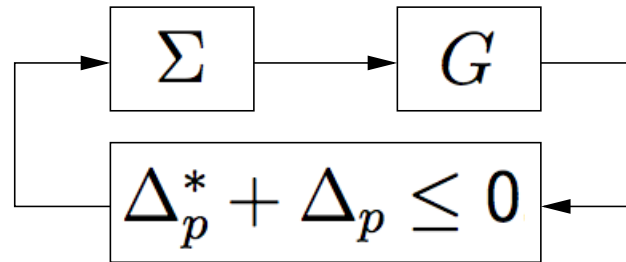
② **Formules LMI ou BMI pour les systèmes LTI**

③ Commande adaptative robuste

④ Exemple

Cas des systèmes LTI

$$\Sigma : \dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$



Stabilité robuste

$$\text{ssi } \exists P > 0 : \begin{bmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 & C^T G^T \\ G C & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ssi } \exists P > 0 : A^T P + P A < 0, \quad P B = C^T G^T.$$

Théorème

Le système $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ est passifiable par retour de sortie ssi

$$\exists F, G, P : (A + BFC)^T P + P(A + BFC) < 0, \quad PB = GC$$

ssi

pour une valeur de $k \geq 0$ suffisamment grande,

$$\exists G, P? : A^T P + PA < 2kC^T G^T GC, \quad PB = C^T G^T.$$

Dans ce cas $F = -kG$ est un retour de sortie statique passifiant.

Remarques :

- La propriété est robuste à de petites variations paramétriques $A(\Delta)$
- Les incertitudes $B(\Delta)$ et $C(\Delta)$ sont (quasiment) interdites !
- $F = -kG$ n'est pas la seule solution, il peut y en avoir de gain plus faible

Théorème

Le système $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ est passifiable par retour de sortie ssi

il existe une solution à

$$A^T P + P A + C^T (G^T F + F^T G) C < 0, \quad P B = C^T G^T, \quad P > 0.$$

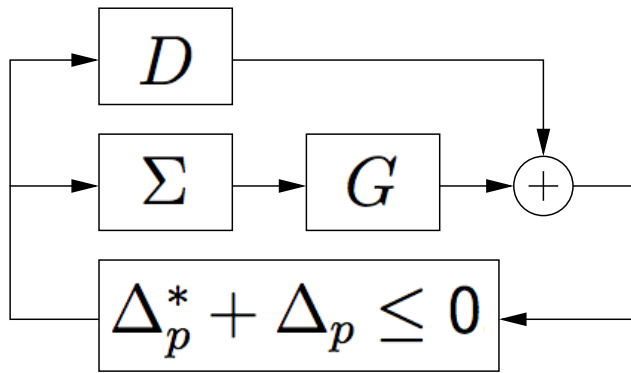
Remarques :

→ F étant une variable il est simple d'imposer $F \in \mathbf{F}$ si \mathbf{F} est LMI

Exemple si $\mathbf{F} = \{ F : \text{Trace}(F^T F) \leq \gamma \}$:

$$\exists T : \begin{bmatrix} T & F^T \\ F & 1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{Trace}(T) \leq \gamma$$

"Shunt" nécessaire pour le cas général :



robustement stable ssi $\exists P > 0$:

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 & C^T G^T \\ G C & D + D^T \end{bmatrix}$$

En admettant le "shunt" D comme paramètre de synthèse on peut relâcher la contrainte égalité en

$$(P B - C^T G^T)^T (P B - C^T G^T) \leq R$$

où R est a priori petit.

Le problème est-il LMI ?

Le problème est-il LMI ?

→ Oui, pour ce qui concerne la contrainte sur R

$$\begin{bmatrix} R & C^T G^T - P B \\ GC - B^T P & 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

→ Oui pour les termes bilinéaires de couplage entre P et F :

$$C^T F^T B^T P + P B F C \leq C^T F^T G C + C^T G^T F C + R + C^T F^T F C$$

à condition de contraindre F à être bornée (ce qui est le cas)

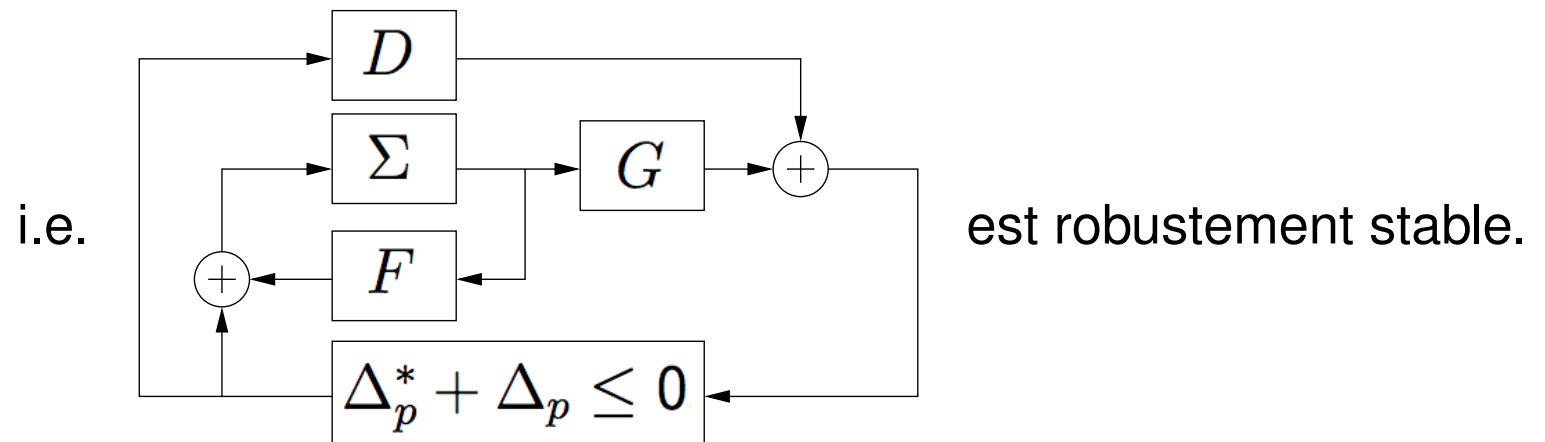
$$\text{Trace}(F^T F) \leq \gamma, \beta > 1 \Rightarrow F^T F \leq \beta \gamma$$

→ **BMI "simple"** : trouver G tq Σ est passifiable vis-à-vis de (v, Gy)

→ Ne peut être étendu aux systèmes incertains.

→ **LMI** :

Trouver D et $F \in \mathbf{F}$ tq $\Sigma \star F$ est passifiable vis-à-vis de $(v, Gy + Dv)$



→ Peut être étendu aux systèmes incertains.

★ Système polytopique incertain

$$\begin{bmatrix} A(\Delta) & B(\Delta) \\ C(\Delta) & 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \zeta_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\zeta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \zeta_i = 1$$

Introduction de variables de relaxation par le lemme d'élimination (H_1, H_2) donne

THM 1 Si $\forall i = 1 \dots N$:

$$\mathcal{L}(H_1, H_2, P_i, T_i, R_i, F_i, D_i, \epsilon) \leq 0$$

alors, $P(\Delta) = \sum_{i=1}^N \zeta_i P_i$, $F(\Delta) = \sum_{i=1}^N \zeta_i F_i$ et $D(\Delta) = \sum_{i=1}^N \zeta_i D_i$ tq.

→ $F(\Delta) \in \mathbf{F}$ est un gain dépendant des paramètres borné passifant

vis-à-vis de $v \rightarrow z = Gy + D(\Delta)v$,

→ Preuve avec la fonction de Lyapunov dépendant des paramètres

$$V(\eta, \Delta) = x^T P(\Delta)x.$$

① Passivité et commande adaptative

→ Commande adaptative non divergente si

$\exists F \in \mathbf{F}, G, H$ tq. $\Sigma \star F$ est passif vis-à-vis de $(v, z = Gy + Hv)$

② Formules LMI ou BMI pour les systèmes LTI

→ Synthèse BMI de G sur système nominal

→ Synthèse LMI de $F(\Delta), D(\Delta)$ pour modèle incertain avec G fixé.

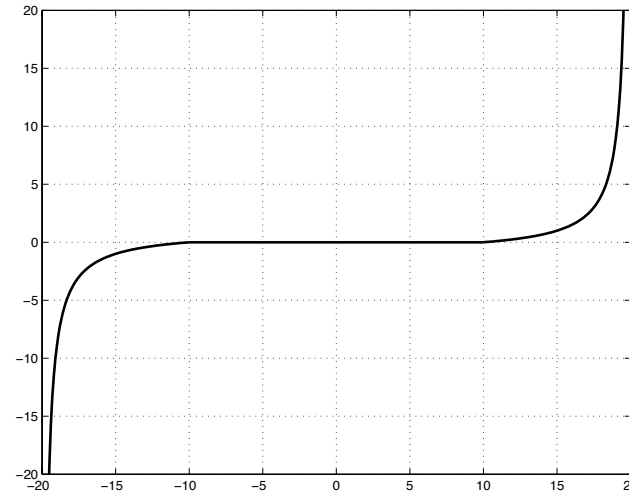
③ **Commande adaptative robuste**

④ Exemple

Soit ϕ telle que

$$\phi(K) = 0 \quad \text{si} \quad \text{Trace}(K^T K) \leq \gamma$$

$$\phi(K) = \frac{\text{Trace}(K^T K) - \gamma}{\beta\gamma - \text{Trace}(K^T K)} K \quad \text{sinon}$$



THM 2 Si pour toute incertitude $\Delta \in \Delta$ existent

$F(\Delta) \in \mathbf{F}$, $D(\Delta)$ solutions des LMI de THM 1

alors la loi de commande

$$u(t) = v(t) + K(t)y(t) \quad , \quad \dot{K}(t) = -Gy(t)y^T(t)\Gamma + \phi(K(t))\Gamma$$

→ passifie le système vis-à-vis de $(v, Gy + D(\Delta))$

→ a un gain borné $\text{Trace}(K^T(t)K(t)) \leq \beta\gamma$

→ si le gain converge alors $K(\infty) = F(\Delta)$.

→ Preuve de passivité avec Fonction de Lyapunov

$$V(\eta, \Delta) = \frac{1}{2}x^T P(\Delta)x + \frac{1}{2}\text{Trace} \left((K - F(\Delta))\Gamma^{-1}(K - F(\Delta))^T \right) .$$

LMI de THM 1 sont pessimistes mais

→ Asymptotiquement non pessimiste si $\Delta \rightarrow \hat{\Delta}$

→ Si LMI satisfaites pour Δ_1 et Δ_2 alors cmd adaptative valide pour $\Delta_1 \cup \Delta_2$

Remarques

→ Cmd adaptative simple en comparaison d'un schéma Estimation/LPV

→ Démonstrations avec Δ constantes. Version avec $\dot{\Delta} \neq 0$ à venir

Performance atténuation L_2

→ Travail en cours : cmd adaptative toujours meilleure que meilleure cmd LPV.

Example

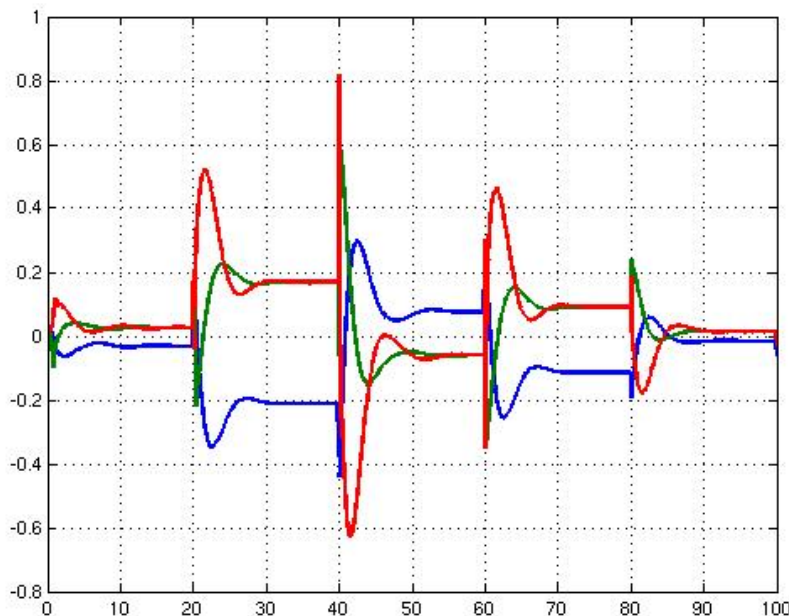
$$\begin{bmatrix} A(\Delta) & B(\Delta) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 - 7.5\delta_1 & -0.6 + 0.7\delta_1 & 5 - 4.5\delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 + \delta_2 & 20 - \delta_2 \end{array} \right]$$

$$C(\Delta) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + 0.1\delta_2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 400 & 300 & 200 \end{bmatrix}, \delta_2 \in [0, 2.5]$$

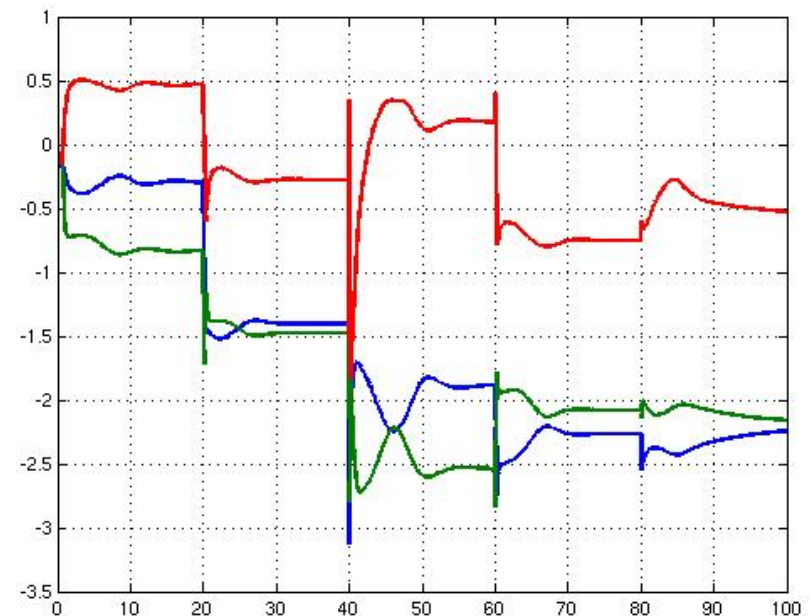
$\delta_1 \in$	LMIs
$[-1 \ 0.7]$	faisable
$[-1 \ 0.72]$	infaisable
$[0.7 \ 0.72]$	faisable
$[0.72 \ 0.722]$	faisable
0.723	faisable

- Cmd adaptative valide $\forall \delta_1 \in [-1 \ 0.722]$
- $F(\Delta)$: loi avec commutations si $\delta_1 \in [-1 \ 0.722]$
- Infaisabilité pour $\delta_1 \in [-1 \ 0.72]$ illustre pessimisme
- Temps de calcul des LMI : moins d'une demi-seconde
(YALMIP, SeDuMi, PC linux i686, RAM 2GB)

- ★ Echelons aléatoires de perturbation sur les mesures, toutes les 20 sec
- ★ Valeurs des paramètres $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = 2.5$



mesures $y(t)$

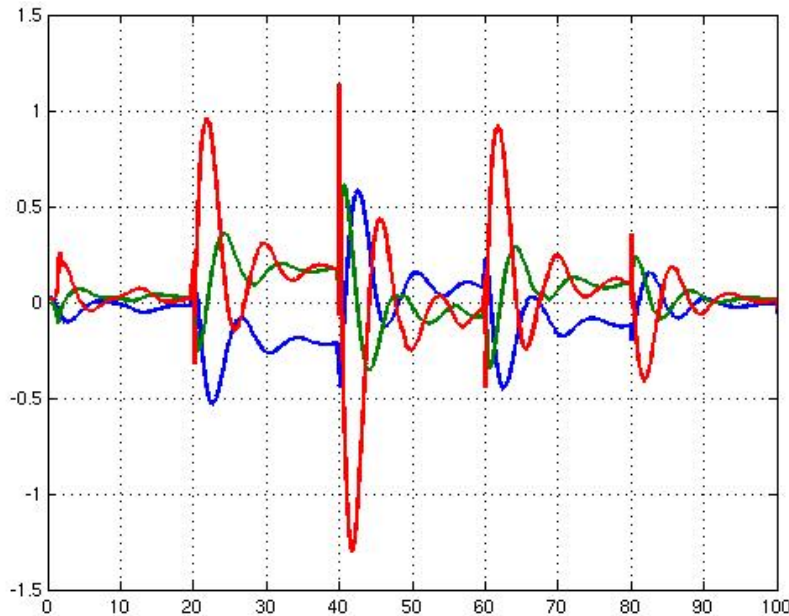


gains de commande $K(t)$

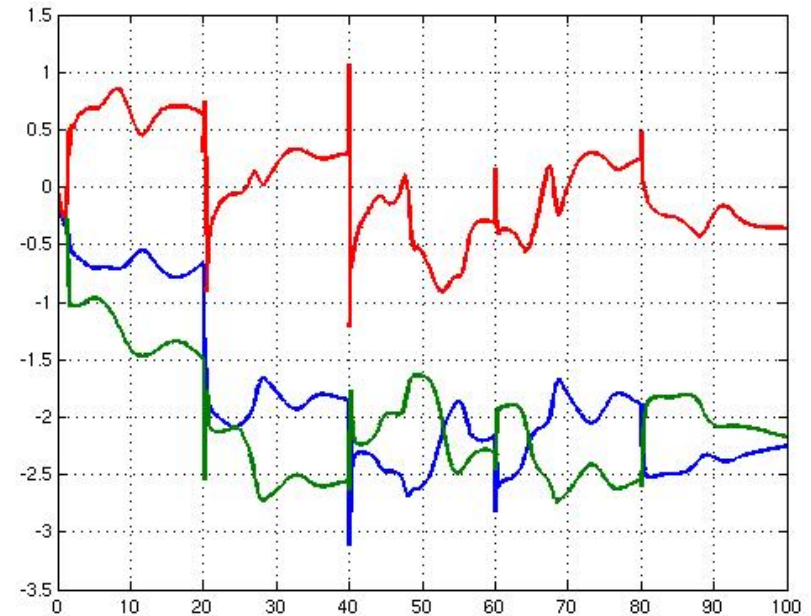
➔ Stabilité et signaux bornés

★ Pour les mêmes conditions de simulation

★ Valeurs des paramètres $\delta_1 = 0.722$, $\delta_2 = 0$



mesures $y(t)$

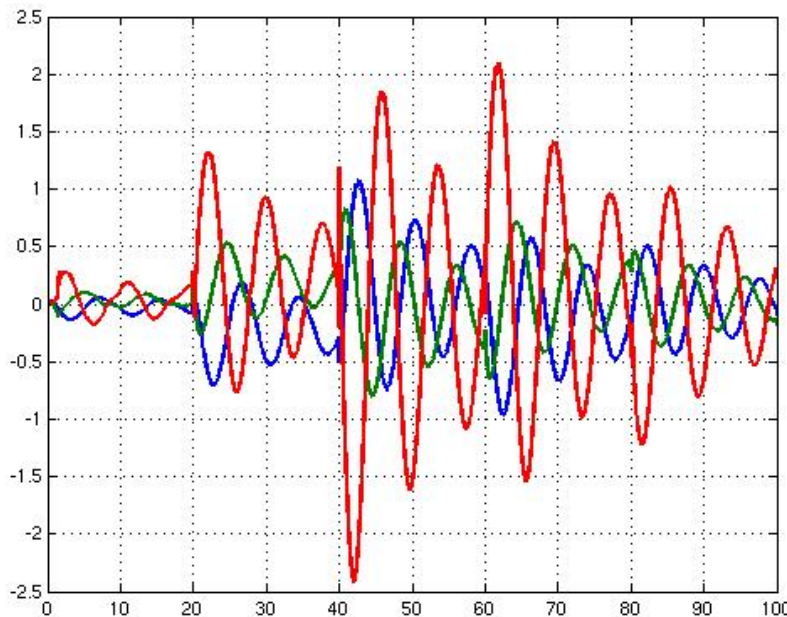


gains de commande $K(t)$

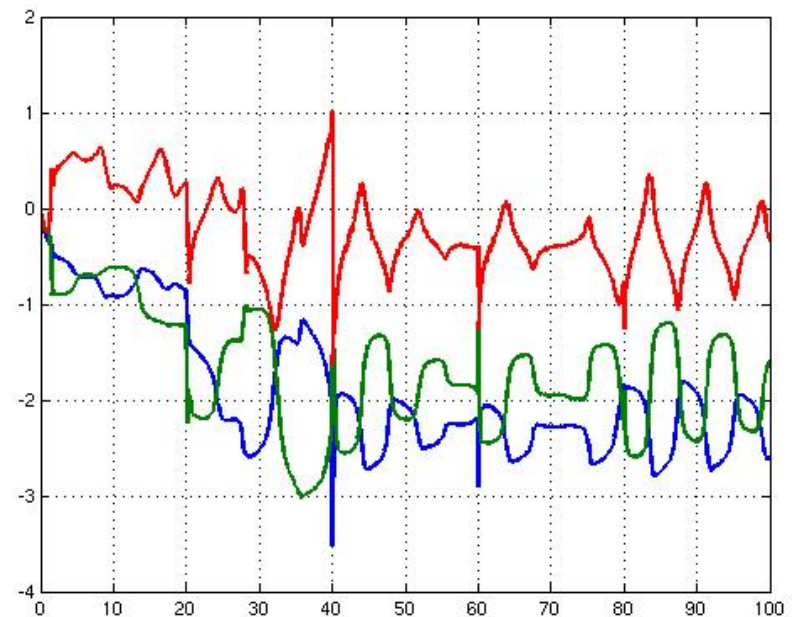
➤ Stabilité et signaux bornés

➤ Plus d'oscillations et convergence plus lente

- ★ Pour les mêmes conditions de simulation
- ★ Valeurs des paramètres $\delta_1 = 0.722$, $\delta_2 = 2.5$



mesures $y(t)$



gains de commande $K(t)$

- Stabilité et signaux bornés
- Plus d'oscillations et convergence plus lente : proche de l'instabilité
- Instabilité observée si δ_i est encore augmenté : résultats sont non pessimistes

Preuves de robustesse de la commande adaptative à gains bornés

- Résultats LMI : tests numériques efficaces (systèmes d'ordre faible)
- Pas de besoins d'estimation, ni de lois LPV
- Résultats pour G donnée ou trouvée par des BMI
- Preuve à faire pour le cas variant dans le temps
- Besoins de preuves de performances:
 - temps de convergence, oscillations, consommation...

Résultats prometteurs

- Adaptatif toujours meilleur de LPV pour atténuation du gain L_2
- Simulations montrent bonne stabilité pour les paramètres variants $\Delta(t)$
 - même si les paramètres quittent temporairement la région de stabilité