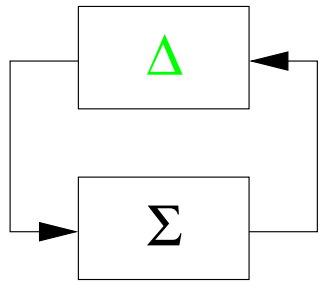


XVI ième réunion
du Groupe de Travail Commande Robuste des Systèmes Multivariables
21-22 Mars 2002, Lyon

Ellipsoïdes de matrices pour le retour de sortie statique

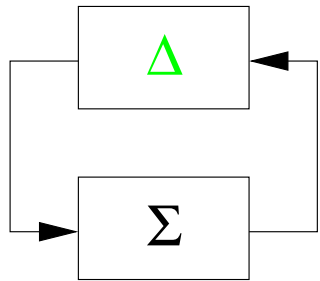
par Dimitri Peaucelle & Denis Arzelier

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du C.N.R.S.
Toulouse, FRANCE



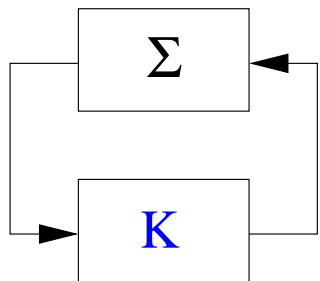
$$\exists \Theta : \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} \mathbb{1} & \Delta' \\ \Sigma^*(j\omega) & \mathbb{1} \end{array} \right] \ominus \left[\begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \Delta \end{array} \right] \leq 0 \quad \forall \Delta \in \mathcal{A} \\ \left[\begin{array}{cc} \Sigma(j\omega) & \\ & \mathbb{1} \end{array} \right] \ominus \left[\begin{array}{c} \Sigma(j\omega) \\ \mathbb{1} \end{array} \right] > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Séparation topologique pour l'analyse robuste ↑



$$\exists \Theta : \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \Delta' \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \Delta \end{bmatrix} \leq 0 & \forall \Delta \in \mathcal{A} \\ \begin{bmatrix} \Sigma^*(j\omega) & \mathbb{1} \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} \Sigma(j\omega) \\ \mathbb{1} \end{bmatrix} > 0 & \forall \omega \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Séparation topologique pour l'analyse robuste ↑ pour la synthèse ↓:



$$\exists \Theta : \begin{cases} \begin{bmatrix} \Sigma^*(j\omega) & \mathbb{1} \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} \Sigma(j\omega) \\ \mathbb{1} \end{bmatrix} > 0 & \forall \omega \in \mathbb{R} \\ \begin{bmatrix} \mathbb{1} & K' \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ K \end{bmatrix} \leq 0 & \text{ensemble non vide} \end{cases}$$

1 – Les ellipsoïdes de matrices	3
2 – Stabilisabilité des systèmes LTI	6
3 – Spécifications sur le gain de commande	10
4 – Performances du système commandé	15
5 – Résolution numérique et exemples	21

1 – Les ellipsoïdes de matrices

- Extension de la notion d'ellipsoïdes pour les matrices.
- Condition de contenance.
- Convexité et recherche d'éléments.
- Volume.

Ellipsoïdes de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n

Centre $x_o \in \mathbb{R}^n$, rayon r et géométrie $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $Z > 0$ et $\|Z\| = 1$.

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \quad : \quad (x - x_o)' Z (x - x_o) \leq r \}$$

Ellipsoïdes de matrices $\mathbb{R}^{m \times p}$

Centre $K_o \in \mathbb{R}^{m \times p}$, rayon $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et géométrie $Z \in \mathbb{R}^{m \times m}$ telle que $Z > 0$ et $\|Z\| = 1$.

$$\{ K \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad : \quad (K - K_o)' Z (K - K_o) \leq R \}$$

Définition des $\{X, Y, Z\}$ -ellipsoïdes

$$\left\{ K \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad : \quad \begin{bmatrix} \mathbb{1} & K' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ K \end{bmatrix} \leq 0 \quad , \quad Z > 0 \right\}$$

★ Relations algébriques : $K_o = -Z^{-1}Y'$, $R = K_o'ZK_o - X$.

★ Ensemble non vide

★ ssi $R \geq \mathbb{0} \Leftrightarrow \boxed{X \leq YZ^{-1}Y'}$

★ ssi il existe \hat{K} telle que $\begin{bmatrix} \mathbb{1} & \hat{K}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \hat{K} \end{bmatrix} \leq \mathbb{0}$

★ Condition LMI d'appartenance : $\begin{bmatrix} X + YK + K'Y' & K'Z \\ ZK & -Z \end{bmatrix} \leq \mathbb{0}$

★ $\{X, Y, Z\}$ -ellipsoïde : ensemble convexe fermé borné.

★ $VOL(\{X, Y, Z\}\text{-ellipsoïde}) = \sqrt{\frac{\det(R)^m}{\det(Z)^p}} \cdot VOL(\{-\mathbb{1}, \mathbb{0}, \mathbb{1}\}\text{-ellipsoïde})$.

2 – Stabilisabilité des systèmes LTI

- Résultat principal.
- Problème non convexe.

Retour de sortie statique :

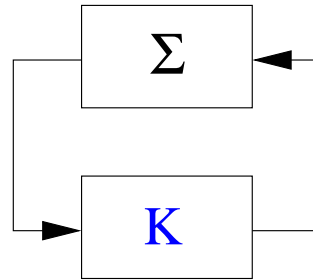
$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad u(t) = Ky(t)$$

Retour de sortie dynamique :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \Sigma_K : \begin{cases} \dot{x}_K(t) = A_K x_K(t) + B_K y(t) \\ u(t) = C_K x_K(t) + D_K y(t) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \Sigma_a : \begin{cases} \dot{x}_a(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} x_a(t) + \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} u_a(t) \\ y_a(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} x_a(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} u_a(t) \end{cases} \quad u_a(t) = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} y_a(t)$$

Σ est stabilisable par retour de sortie statique

ssi il existe K telle que



est stable ($\Sigma \star K$ est stable)

ssi il existe une matrice de Lyapunov P et un $\{X, Y, Z\}$ -ellipsoïde non vide tels que :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ A & B \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbb{0} & P \\ P & \mathbb{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ A & B \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} C & D \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix}$$

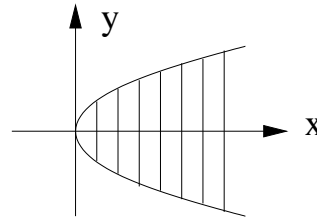
Remarque:

$V(x) = x'Px$ prouve la stabilité de $\Sigma \star K$ pour tout gain K du $\{X, Y, Z\}$ -ellipsoïde.

Stabilisabilité \equiv contraintes LMI \oplus contrainte $X \leq YZ^{-1}Y'$

Contrainte non convexe

Exemple pour $K \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$: $z = 1$ et $x \leq y^2$



Problèmes convexes si

- ★ Boucle ouverte stable alors il existe un ellipsoïde tq. $X \leq 0$ et trivialement $0 \leq YZ^{-1}Y'$.
- ★ \hat{K} connu est stabilisant alors il existe un ellipsoïde tq.
$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & \hat{K}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \hat{K} \end{bmatrix} \leq 0.$$
- ★ Retour d'état \equiv problème LMI $\equiv \{A'P + PA, PB, Z\}$ -ellipsoïde stabilisant.

3 – Spécifications sur le gain de commande

- Fragilité : contraintes sur la taille et la géométrie.
- Réalisabilité : contraintes d'inclusion et de structure.

Définition : Soit K_o un gain stabilisant et Δ_K une incertitude additive.

- ★ **Fragile** : il existe $\Delta_K \in \Delta_K$ telle que $\Sigma^*(K_o + \Delta_K)$ est instable.
- ★ **Résilient** : pour tout $\Delta_K \in \Delta_K$ fixé, $\Sigma^*(K_o + \Delta_K)$ est stable.
- ★ **Quadratiquement résilient** : pour tout $\Delta_K(t) \in \Delta_K$, $\Sigma^*(K_o + \Delta_K(t))$ est stable.

Corollaires

- ★ Δ_K : ensemble incertain ellipsoïdal symétrique / \emptyset

$$\text{Condition LMI } \oplus \text{ contrainte } \boxed{X \leq YZ^{-1}Y'} \iff$$

K_o centre de $\{X, Y, Z\}$ -ellipsoïde est quadratiquement résilient à $\Delta'_K Z \Delta_K \leq R$.

- ★ Δ_K : ensemble des opérateurs de gain borné par ρ

$$\text{Condition LMI } \oplus \text{ contrainte } Z = \mathbb{1} \oplus \text{ contrainte } \boxed{\emptyset < \rho \mathbb{1} \leq YY' - X} \iff$$

K_o centre de $\{X, Y, Z\}$ -ellipsoïde est quadratiquement résilient à $\Delta'_K \Delta_K \leq \rho \mathbb{1}$.

- ★ Δ_K : incertitude multiplicative de rayon $\bar{\delta}$

$$\text{Condition LMI } \oplus \text{ contrainte } \boxed{X \leq (1 - \bar{\delta}^2)YZ^{-1}Y'} \iff$$

K_o centre de $\{X, Y, Z\}$ -ellipsoïde est quad. résilient à $\Delta'_K = \delta K_o$ avec $|\delta| \leq \bar{\delta}$.

Enoncés

★ Correcteur borné:

⇒ Synthèse de K appartenant au $\{X_K, Y_K, Z_K\}$ -ellipsoïde donné a priori.

Exemple 1 : correcteur de gain borné ($K'K \leq \rho_K \mathbb{1}$)

Exemple 2 : correcteur stable ($A_K' + A_K \leq -\varepsilon \mathbb{1}$ dans une certaine base)

★ Correcteur structuré :

⇒ Synthèse de K appartenant à $S \in \mathbb{R}^{m \times P}$, ens. de matrices structurées.

Exemple : commande décentralisée ($K = \begin{bmatrix} K_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K_l \end{bmatrix}$)

Corollaires

- ★ En ajoutant au problème la condition LMI suivante :

$$\begin{cases} v > 0 \\ v \begin{bmatrix} X_K & Y_K \\ Y_K' & Z_K \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \end{cases}$$

les gains stabilisant du $\{X, Y, Z\}$ -ellipsoïde sont inclus dans $\{X_K, Y_K, Z_K\}$ -ellipsoïde.

- ★ En ajoutant au problème les spécifications linéaires suivantes:

$$Y' \in \mathcal{S}, \quad Z \text{ diagonale}$$

le gain K_o central a la structure \mathcal{S} requise.

4 – Performances du système commandé

- Localisation des pôles.
- Rejet de perturbations (H_2/H_∞).
- Robustesse.
- Multi-contrainte.

$\{X_R, Y_R, Z_R\}$ -stabilité

Appartenance des pôles du système à une région elliptoïdale du plan complexe:

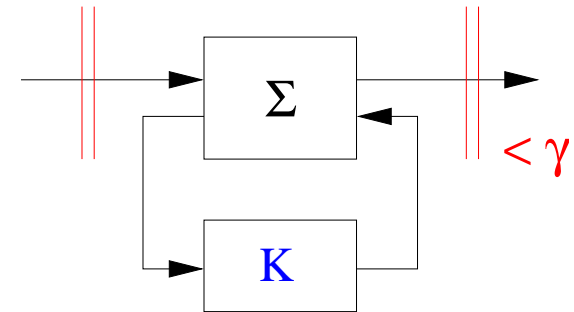
$$\{ s \in \mathbb{C} : X_R + sY_R + s^*Y_R^* + ss^*Z_R < 0 \}$$

Exemples: demi-plan, disques, secteurs, paraboles...

$\{X_R, Y_R, Z_R\}$ -stabilisabilité par retour de sortie statique

$$L_{\{X_R, Y_R, Z_R\}}(P_R, X, Y, Z) < 0 \quad , \quad X \leq YZ^{-1}Y'$$

Normes système pour le rejet de perturbation



- ★ Norme H_∞ : energie/energie, puissance/puissance, harmonique/harmonique

$$L_{\gamma_\infty}(P_\infty, \tau_\infty, X, Y, Z) < 0 \quad , \quad X \leq YZ^{-1}Y'$$

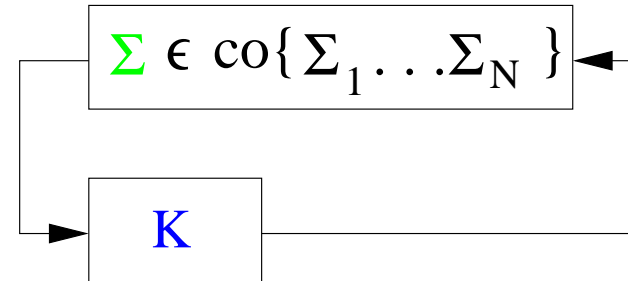
- ★ Norme H_2 : energie finie/amplitude, bruit blanc/energie

$$L_{\gamma_2}(P_2, \tau_2, X, Y, Z) < 0 \quad , \quad X \leq YZ^{-1}Y'$$

- ★ I2P : impulsion/amplitude

$$L_{\gamma_{ip}}(P_{ip}, \tau_{ip}, X, Y, Z) < 0 \quad , \quad X \leq YZ^{-1}Y'$$

Modèle défini par un polytope



- ★ Stabilisabilité quadratique : pour tout modèle incertain variant dans le temps

$$L_{i=1\dots N}(P_q, X, Y, Z) < \mathbb{0} \quad , \quad X \leq YZ^{-1}Y'$$

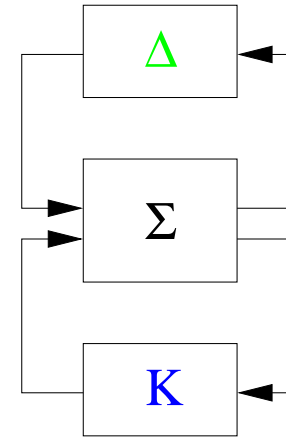
Une fonction de Lyapunov unique $V(x) = x'P_q x$ pour tous les modèles admissible.

- ★ Stabilisabilité robuste : incertitudes paramétriques

$$L_{i=1\dots N}(P_{[i]}, G, X, Y, Z) < \mathbb{0} \quad , \quad X \leq YZ^{-1}Y'$$

Fonction de Lyapunov dépendant des paramètres : $P \in co\{P_{[1]} \dots P_{[N]}\}$

Modèle défini par un bouclage exogène



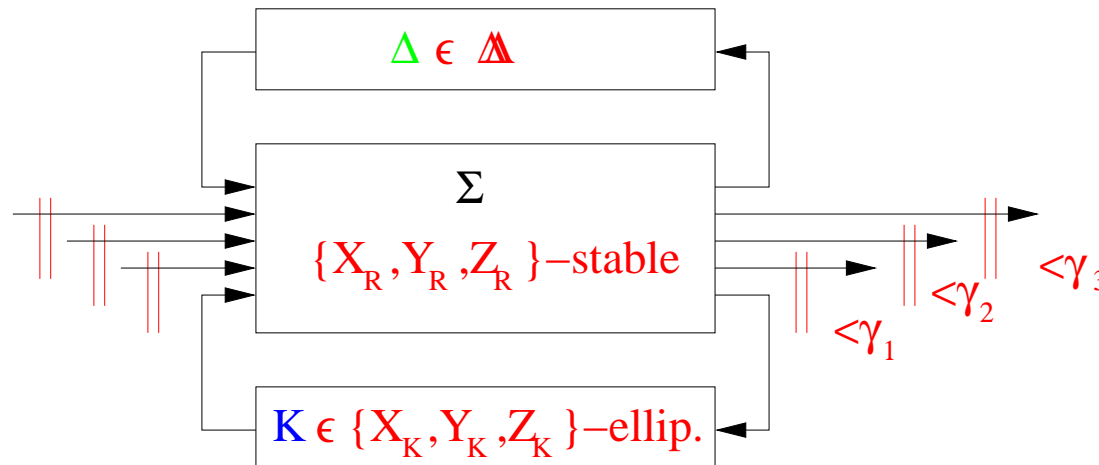
- ★ Stabilisabilité quadratique : pour tout modèle incertain variant dans le temps

$$L_{\Delta}(P_q, \Theta, X, Y, Z) < \mathbb{0} \quad , \quad X \leq YZ^{-1}Y'$$

- ★ Stabilisabilité robuste : incertitudes paramétriques

$$L_{\Delta}(P_r, \Theta, X, Y, Z) < \mathbb{0} \quad , \quad X \leq YZ^{-1}Y'$$

Fonction de Lyapunov dépendant des paramètres : $V_{\Delta}(x) = x'M(\Delta)'P_rM(\Delta)x$



- ★ “Empiler” les contraintes LMI de chaque spécification.
- ★ Fonctions de Lyapunov distinctes pour chaque spécification.
- ★ Une contrainte non linéaire unique ($X \leq YZ^{-1}Y'$)
- ★ Tous ces problèmes de synthèse sont de même complexité numérique.

5 – Résolution numérique et exemples

- Le problème dual.
- Algorithme cône complémentaire.
- Exemple.

Stabilisabilité équivalente du système transposé

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \Sigma \star K \text{ stable}$$

 \Updownarrow

$$\Sigma' : \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A'\bar{x}(t) + C'\bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = B'\bar{x}(t) + D'\bar{u}(t) \end{cases} \quad \Sigma' \star K' \text{ stable}$$

Idem pour la synthèse multi-contrainte, la fragilité...

Influence sur la contrainte semi-définie positive non linéaire:

$$X \leq YZ^{-1}Y' \in \mathbb{R}^{p \times p}$$

$$\bar{X} \leq \bar{Y}\bar{Z}^{-1}\bar{Y}' \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

- ⊛ Problèmes de synthèse par retour de sortie statique sont supposés non convexe, NP-durs.
- ⊛ Algorithmes heuristiques itératifs sans garantie de convergence mais performants.
- ⊛ Algorithmes convergence assurée mais sous-optimaux, également performants.
 - ★ Algorithme cône complémentaire (El Ghaoui) - méthode du gradient.
 - ★ Algorithme de projections alternées (Grigoriadis).

Alg. cône complémentaire

- ★ Conçu pour satisfaire la contrainte $\hat{X} = YZ^{-1}Y'$.
- ★ Relaxation convexe $YZ^{-1}Y' \leq \hat{X}$ et convergence $\hat{X} \xrightarrow{\text{itérations}} YZ^{-1}Y'$.
- ★ Difficultés : critère de succès $\hat{X} \stackrel{?}{=} YZ^{-1}Y'$ et convergence lente près de l'optimum.

appliqué à la synthèse d'ellipsoïdes :

- ★ Condition de résilience vis-à-vis d'incertitudes multiplicatives : $X \leq (1 - \bar{\delta}^2)YZ^{-1}Y'$.
- ★ Relaxation proposée : $X \leq (1 - \bar{\delta}^2)\hat{X} \quad YZ^{-1}Y' \leq \hat{X}$
- ★ Intérêt : Inutile d'attendre la convergence exacte de \hat{X} .
Critère d'arrêt : contrainte non linéaire satisfaite $X \leq (1 - \bar{\delta}^2)YZ^{-1}Y'$

Systeme d'ordre 4, 2 entrees, 1 sortie de mesure.

Convergence de l'aogorithme propose :

```
>> [Ko,spbs]=synthesis2(spb,1)
```

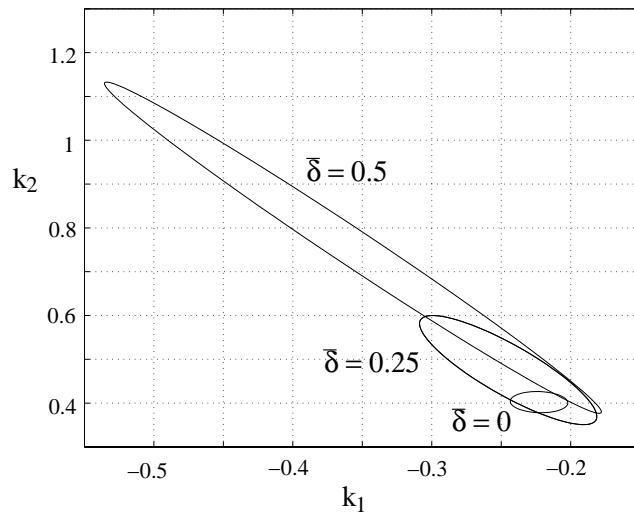
ITER	TRACE	ALPHA	CRIT	EIG
0	5e+03	1	-1e+10	3e+01
1	1e+01	1	-8e+03	6
2	7	0.7	-1e+01	2
3	1	1	-8	-7e-11
4	1	0.1	-2	0.3
5	0.09	1	-1	0.03
6	0.06	0.4	-0.2	-0.4
7	0.01	1	-0.08	-0.0001
8	0.004	0.7	-0.02	-0.3
9	0.0003	1	-0.005	-0.06
10	0.0003	0.04	-0.0001	-0.2
11	0.0003	0.4	-8e-05	-0.2
12	0.0002	1	-2e-05	-0.2

```
total cpu time = 21.54 seconds
```

```
the SOF ellipsoid has a volume of = 0.00220018 times the unit sphere
```

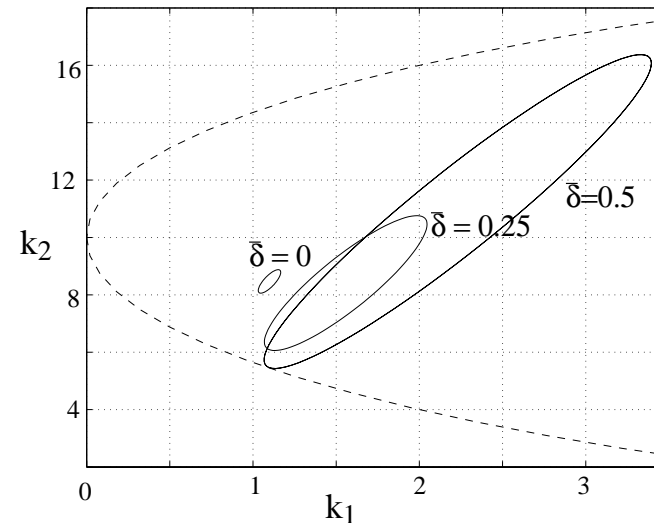
Synthèse d'un correcteur statique $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}' \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$.

Stabilité
et résilience



Localisation des pôles ($Re(\text{pôles}) < -0.15$)
correcteur borné par 10 autour de $\begin{bmatrix} 10 & 10 \end{bmatrix}'$.

et résilience



- ★ Formulation générique pour la synthèse multi-contrainte avec des critères proches des spécifications industrielles.
- ★ Pas de pessimisme supplémentaire / méthodes d'analyse robuste.
- ★ Résultats numériques encourageants.
- ★ Développer des algorithmes nouveaux adaptés.