Programmation semi-définie,

une aventure scientifique à l'interface Automatique/Mathématiques

Didier Henrion & Dimitri Peaucelle

LAAS-CNRS

Conseil scientifique de l'INS2I

26 février 2013

- Analyser et commander les dynamiques d’un système

- Automatique classique : HYP modèle mathématique parfait $\dot{X} = f(X, u)$
  - “parfait” implique $X \in \mathbb{R}^n$ avec $n \gg 1$ et $f(X, u)$ très non-linéaire
  - “parfait” suppose tous les paramètres connus exactement
  - Propriétés du système garanties par des propriétés mathématiques sur f

    Equations Lyapunov, Riccati...   Solutions à pb d’optimisation

    [Fr-1980’ - C. Lemaréchal, JB. Hiriart-Urruty]

- Commande Robuste : Systèmes avec incertitudes $\dot{x} = g(x, u, \delta)$
  - Autorise des modèles de taille réduite et plus simples
  - Propriétés doivent être prouvées $\forall \delta \in \boldsymbol{\delta}$ dans un ensemble
  - Extensions des résultats existants ?

- Stabilité du système "idéal" $\dot{x} = Ax$
- Garantie ssi pour $Q \succ \mathbf{0}$ fixée, la solution de $A^T P + PA = -Q$

  est définie positive $P \succ \mathbf{0}$. [1889 A. Lyapunov]
- Mathématiquement : résolution d'équations matricielles linéaires

- Stabilité du système incertain $\dot{x} = A(\delta)x$
- Garantie s'il existe P solution de [1985 R. Barmish]

$$P \succ \mathbf{0} \;\; , \;\; A^T(\delta)P + PA(\delta) \prec \mathbf{0} \quad \forall \delta \in \boldsymbol{\delta}$$

- Mathématiquement : Inégalités matricielles linéaires (LMI)
- LMI $\equiv$ contraintes matricielles semi-définies

  [1970' - A. Yakubovich, 1990 - S. Boyd, J. Doyle, C. Scherer, T. Iwasaki ...]

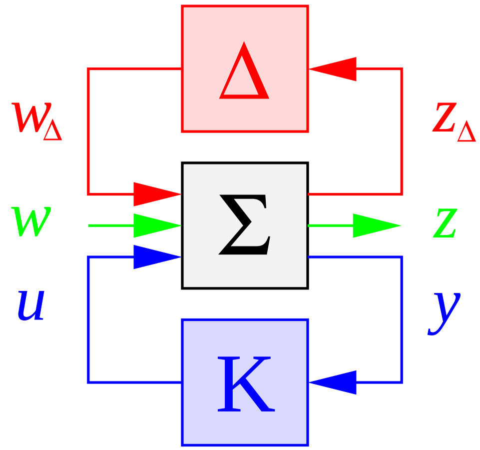
  [Fr-1990' - P. Apkarian, J. Bernussou, L. El Ghaoui, E. Feron, P. Gahinet]

- Programmation linéaire (LP) : $\min c^T \mathsf{x} \quad : \quad A\mathsf{x} = b \ , \ \mathsf{x_i} \geq 0.$
- Optimisation dans le cône des réels positifs

- Programmation Semi-définie (SDP) : $\min c^T \mathsf{x} \quad : \quad A\mathsf{x} = b \ , \ \mathrm{mat}(\mathsf{x}) \succeq 0.$
- Optimisation dans le cône des matrices semi-définies positives

- [1990' - B. Polyak, Y. Nesterov, A. Nemirovski]
- Primal/Dual, Lemme de Farkas, Algorithme en temps polynomial (max en $O(n^6)$)
- [Fr-1990' - P. Gahinet] Code l'algorithme dans Scilab,
  intégré ensuite dans la “Robust Control toolbox” de Matlab©
- [2000' - J. Sturm...] Nombreux algorithmes & codes (libres)
- [2000' - Y. Löfberg, D. Peaucelle...] Développement d'interfaces (libres),
  principalement pour les pb d'Automatique (Robustesse)

- Développement d’un cadre méthodologique très complet

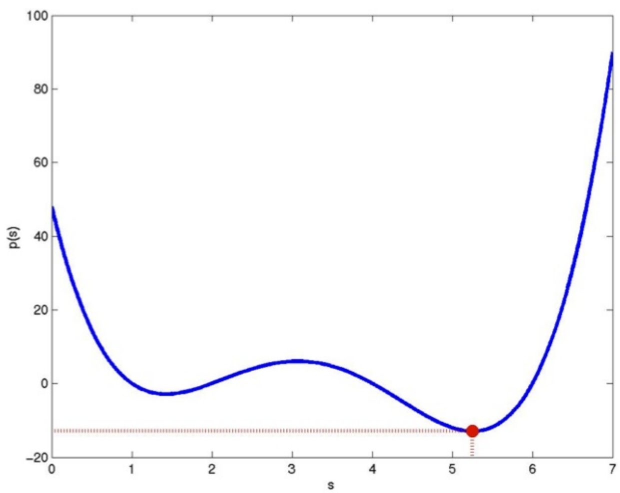


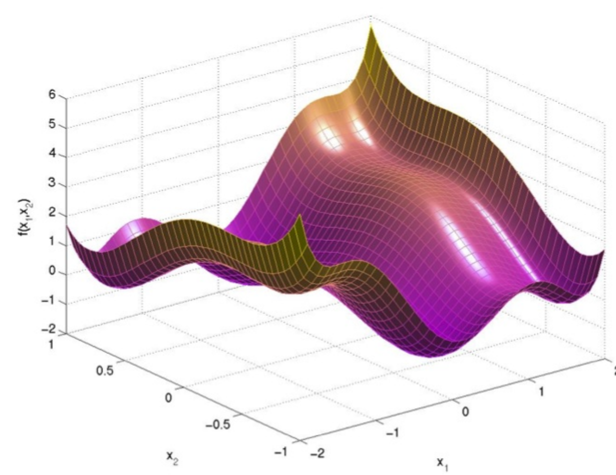
- Outils de modélisation incertaine
  - [Fr-2000’ JF Magni] LFR toolbox
- Paradigme s’étend à
  - certains systèmes non-linéaires (saturations [Fr-2000 S. Tarbouriech])
  - certains systèmes de dimension infinie (systèmes à retard [Fr-2000 JP. Richard])
  - commande adaptative, fuzzy systems, etc.
- LMI : principalement utilisé comme un outil

- [1990' - M. Laurent] LMIs en optimisation combinatoire (bornes sur optima)
  pour théorie des graphes et maths discrètes
  [Fr-2005' J. Malick, F. Roupin]
- [2000' - L. El Ghaoui] Nouvelle orientation en programmation mathématique :
  Théorie de l'optimisation robuste - inspirée de la commande robuste
- [2005'] Nvx domaines : Optimisation polynomiale, Géométrie algébrique convexe
- [2005'] Computer science : Cryptographie, Quantum Computing,
  Calcul certifié [Fr-2005' - M. Safey, E. Goubault, B. Werner]
- [Fr-2005' - D. Henrion, JB. Lasserre] Evaluation de performances, contrôle optimal
- [2015' - ??] Calcul des variations, EDP, transport optimal...

LMI + Géométrie algébrique = SOS

- [1985 - N. Shor, Y. Nesterov] [2000 P. Parillo, JB. Lasserre] SDP permet de résoudre problèmes issus de Géométrie algébrique réelle & Analyse fonctionnelle
- Contraintes sur des polynômes (non convexe) $\Leftarrow$ Contraintes LMI
- Dans certains cas $\Leftrightarrow$. Par exemple : polynômes univariés
- Méthode pour construire une hiérarchie de relaxations LMI:
- Approchent asymptotiquement le problème initial (le plus souvent exactement)
- LMI de dimension croissante





- Formulation duale : Problème généralisé des moments
- Logiciels (libres) [SOS-tools - Parillo], [GoptiPoly - Henrion], [YALMIP - Löfberg]
- Outils très généraux - limitations numériques : tenir compte de la structure

- LMI-SDP : Outil mathématique/numérique
  - Créé, utilisé, popularisé par la communauté de la commande robuste
  - Implications bien au delà de l'Automatique
  - Essor grâce aux développements logiciels (en majorité libres)

- Cadre de travail utilisé en Aérospatiale (Satellites, Lanceurs, Avions)
  - Cycles rapides de synthèse/analyse de lois de commande - validation coûteuse
  - Ce domaine, par ces financements et en fournissant des problèmes difficiles,

    a contribué à la maturation des outils numériques

- LMI-SDP a permis de résoudre certains problèmes - pas les plus difficiles
  - Trouver K tq $\lambda(A+BKC)<0$ - heuristiques en optimisation non-lisse
  - Algorithmes en $O(n^6)$, moins si structure particulière des problèmes