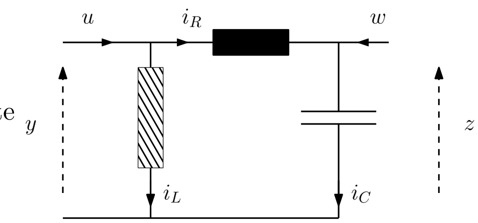
Université Toulouse III Paul Sabatier
Cours M2 ISTR / RODECO - Commande linéaire avancée - Commande Robuste

Rattrapage du 23 juin 2020

On considère un circuit RLC de la figure suivante



décrit par les équations :

$$L\frac{di_L}{dt} = y\,, \quad C\frac{dz}{dt} = i_C\,, \quad y = z + Ri_R\,, \quad w + i_R = i_C\,, \quad u = i_R + i_L$$

où y est une sortie mesurée, z est une sortie de performance, u est une entrée de commande et w est une entrée de perturbation.

1.1 Montrer que ce système admet la représentation d'état

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{wu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c|c} -R/L & 1/L & 0 & R/L \\ -1/C & 0 & 1/C & 1/C \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -R & 1 & 0 & R \end{array}\right] \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix}.$$

1.2 On prend $R = 1$, $L = 1$ et $C = 1$.
Donner la matrice de transfert de ce système. Le système est-il stable ? Donnez une borne supérieure de la norme H_∞ du transfert de $w \to z$? Que peut-on en conclure en termes de stabilité robuste ?

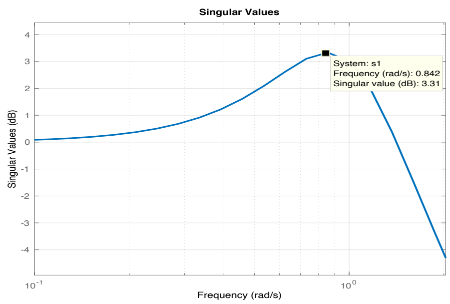
1.3 On prend $R = 1$, $L \in [\,\frac{1}{2},\,\frac{3}{2}\,]$ et $C \in [\,\frac{2}{3},\,\frac{4}{3}\,]$ incertains, constants.
Proposer un modèle polytopique pour ce système. Les sommets de ce système polytopique sont-ils stables ? Que peut-on en conclure en termes de stabilité robuste ?

1.4 On prend $R = 1$, $L(t) \in [\,\frac{1}{2},\,\frac{3}{2}\,]$ et $C = 1$.
Proposer une méthode pour prouver la stabilité robuste de ce système.

1.5 On prend $R = 1$, $1/L \in [\,0.9,\,1.1\,]$ et $1/C \in [\,0.8,\,1.2\,]$ incertains, constants.
Proposer un modèle LFT pour ce système. Proposer une méthode pour prouver la stabilité robuste de ce système. Proposer une méthode pour garantir une borne supérieure sur la norme H_∞ robuste du transfert de $w \to z$.

A toutes fins utiles on donne les éléments suivants :

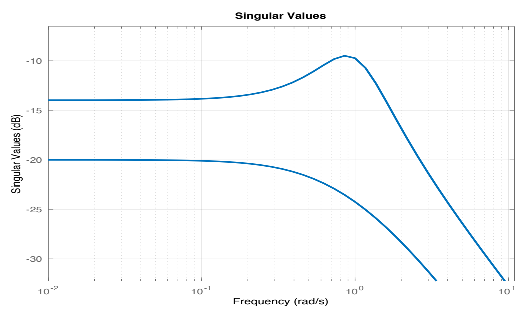
Module de $\frac{j\omega-1}{1-\omega^2+j\omega}$:



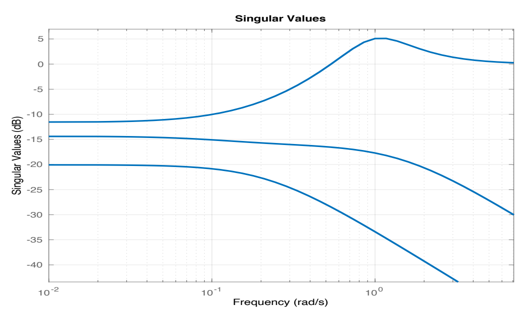
$20\log(1.5) = 3.52$

La matrice $P = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ est définie positive.

Valeurs singulières de $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0.1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0.2 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{w} \end{pmatrix}$:



Valeurs singulières de $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{cc|ccc} -1 & 1 & 0.1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0.2 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{pmatrix} x \\ \tilde{w} \end{pmatrix}$:



Les valeurs propres de $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sont toutes a partie réelle négative $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Tr(A) < 0 \\ det(A) > 0 \end{array} \right.$

$$\left[\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array}\right] \star \Delta = M_{11} + M_{12}\Delta(I - \Delta M_{22})^{-1} M_{21}$$

$$\Delta \star \left[\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array}\right] = M_{22} + M_{21}\Delta(I - \Delta M_{11})^{-1} M_{12}$$

$$\|G\|_\infty^2 = \max_\omega \overline{\sigma}^2(G(j\omega))$$

$$\overline{\sigma}^2(M) = \text{plus grande valeur propre de } M^T M$$