Université Toulouse III Paul Sabatier
Cours M2 ISTR / RODECO - Commande linéaire avancée - Commande Robuste

Examen du 19 Octobre 2018, 1h30, tous documents autorisés

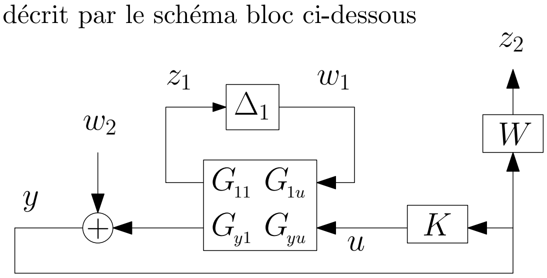
Exercice 1

1.1 Donner la matrice rationnelle en δ correspondant à $\begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \end{array}\right]$.

1.2 A quelle condition cette LFT est-elle bien posée ?

Exercice 2

On considère le système décrit par le schéma bloc ci-dessous



2.1 Donner une interprétation de ce schéma.

2.2 On cherche à évaluer γ, valeur telle que la performance H_∞ du système est robustement inférieure à γ pour tout Δ_1 borné en norme H_∞ par $2/\gamma$:

$$\|T_{w_2 \to z_2}(\Delta_1)\|_\infty \leq \gamma \qquad \forall\ \|\Delta_1\|_\infty \leq 2/\gamma.$$

Expliquer pourquoi ce problème peut se réécrire comme une problème de stabilité robuste d'une boucle $\Delta \star M$.

2.3 On donne $\|M_1\|_\infty < 1.2$ et $\|M_2\|_\infty < 2.1$, où

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}G_{11} & 0 \\ WG_{y1} & W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}G_{1u} \\ WG_{yu} \end{bmatrix} K(I - G_{yu})^{-1} \begin{bmatrix} G_{y1} & I \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 2G_{11} & 0 \\ G_{y1}W & W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}G_{1u} \\ WG_{yu} \end{bmatrix} K(I - G_{y1})^{-1} \begin{bmatrix} G_{y1} & I \end{bmatrix}$$

Que peut-on en conclure ?

Exercice 3

Soit le système $\dot{x} = A(\alpha)x$ où le paramètre $\alpha \in [\,1 \;\; 3\,]$ est incertain et $A(\alpha) = \begin{bmatrix} -\alpha & -1 \\ \frac{2}{\alpha}(2-\alpha)^2 & -\frac{12}{\alpha} \end{bmatrix}$.

3.1 Le système est-il stable pour $\alpha = 1$? Est-il stable pour $\alpha = 3$?

3.2 Proposer un modèle polytopique pour ce système incertain. Est-ce que tous les sommets sont stables ? Peut-on conclure que le système est robustement stable ?

3.3 Proposer un modèle LFT pour ce système incertain. Pour quelles valeurs de α peut-on prouver la stabilité robuste à l'aide du théorème du petit gain ?

3.4 Le système est-il stable pour tout $\alpha \in [\,1 \;\; 3\,]$ constant ?

3.5 Le système est-il stable pour tout $\alpha = 2 + \sin(t)$? On suggère la matrice $P = I$ pour répondre à cette question.

A toutes fins utiles on donne les éléments suivants :

$$\text{Les valeurs propres de } A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ sont toutes a partie réelle négative} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} Tr(A) < 0 \\ det(A) > 0 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array} \right] \star \Delta = M_{11} + M_{12}\Delta(I - \Delta M_{22})^{-1} M_{21}$$

$$\Delta \star \left[\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array} \right] = M_{22} + M_{21}\Delta(I - \Delta M_{11})^{-1} M_{12}$$

$$\|G\|_\infty^2 = \max_\omega \overline{\sigma}^2(G(j\omega))$$

$$\overline{\sigma}^2(M) = \text{plus grande valeur propre de } M^T M$$

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -\delta & 1 + \frac{\delta}{2} \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{2\delta}{2+\delta} & \frac{2}{2+\delta} \end{array} \right]$$

$$\frac{-12}{2+\delta} = -6 + 6\frac{\delta}{2+\delta}$$

$$\left[\begin{array}{cc} s+2 & 1 \\ 0 & s+6 \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{s+2} & \frac{-1}{(s+2)(s+6)} \\ 0 & \frac{1}{s+6} \end{array} \right]$$

$$\left\| \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{s+2} & \frac{-1}{(s+2)(s+6)} \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{3}{s+6} \end{array} \right] \right\|_\infty = 1.1187$$