Université Toulouse III Paul Sabatier
Cours M2 ISTR / RODECO - Commande linéaire avancée - Commande Robuste

Examen du 15 Octobre 2021

À toutes fins utiles, voir le recto de cette feuille.
Les exercices sont indépendants.

Théorème
S'il existe $P = P^T \succ 0$ solution simultanément des $\bar{v}$ LMI

$$\forall v = 1 \dots \bar{v} \quad \begin{bmatrix} A^{[v]T}P + PA^{[v]} & PB_w^{[v]} & C_z^{[v]T} \\ B_w^{[v]T}P & -\mu^2 I & D_{zw}^{[v]T} \\ C_z^{[v]} & D_{zw}^{[v]} & -I \end{bmatrix} \prec 0$$

alors la norme L_2 induite du système

$$\dot{x} = A(\Delta)x + B_w(\Delta)w \qquad , \qquad z = C_z(\Delta)x + D_{zw}(\Delta)w$$

vérifie $\sup \frac{\|z\|^2}{\|w\|^2} < \mu^2$ pour toute réalisation du système polytopique

$$\forall \zeta_v \geq 0 \quad , \quad \sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v = 1 \quad , \quad \begin{bmatrix} A(\Delta) & B_w(\Delta) \\ C_z(\Delta) & D_{zw}(\Delta) \end{bmatrix} = \sum_{v=1} \zeta_v \begin{bmatrix} A^{[v]} & B_w^{[v]} \\ C_z^{[v]} & D_{zw}^{[v]} \end{bmatrix}.$$

Q1. Prouver le théorème. On suggère pour faire cette preuve de considérer la fonction $V(x) = x^T P x$ et le vecteur

$$\eta = \begin{pmatrix} x \\ w \\ z \end{pmatrix}.$$

Q2. Soit le système incertain suivant où $|\delta| \leq 0.5$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \delta - 1 & 0 \\ \frac{\delta}{1+\delta} & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \quad , \quad z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Q2.1 Proposer un modèle polytopique pour ce système.

Q2.2 Le système est-il robustement stable pour toute incertitude paramétrique (constante) ? Le système est-il robustement stable pour toute incertitude variant dans le temps ?

Q3. Soit le système incertain suivant où $|\delta| \leq 0.5$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \delta - 1 & 0 \\ \frac{\delta}{1+\delta} & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \quad , \quad z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Q3.1 Proposer un modèle LFT pour ce système.

Q3.2 Proposer une méthode reposant sur le théorème du petit gain permettant de garantir que la norme H_∞ du transfert de w vers z est inférieure à 2 quelque soit la valeur de $|\delta| \leq \gamma < 0.5$.

Q3.3 Calculer la matrice de transfert correspondant au problème énoncé en **Q3.2**. Peut-on conclure positivement ?

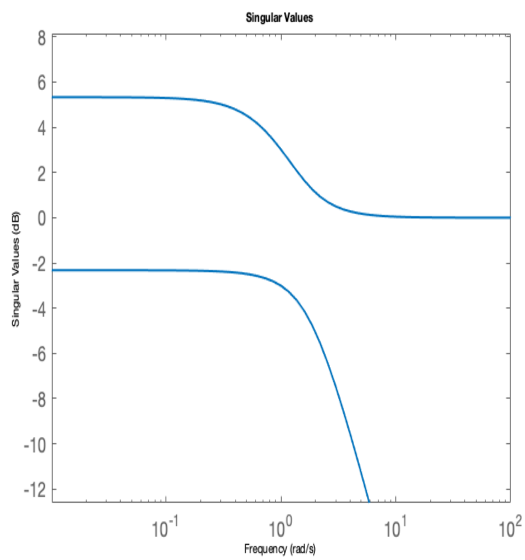
A toutes fins utiles on donne les éléments suivants :

La fonction $f(\delta) = \frac{\delta}{1+\delta}$ est monotone croissante.

La fonction $V(x) = x^T P x$ avec $P = I$ est définie positive.

Les valeurs propres de $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sont toutes a partie réelle négative si et seulement si sa trace est négative $tr(A) < 0$ et son déterminant est positif $det(A) > 0$.

Les valeurs singulières de la matrice $H(j\omega)$ avec $H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{s+1} & -1 & 0 \\ \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sont tracées sur la figure suivante



$20\log_{10}(2) = 6.02$.