Université Toulouse III Paul Sabatier
Cours M2 ISTR / RODECO - Commande linéaire avancée - Commande Robuste

Examen du 21 Octobre 2016, 1h30, tous documents autorisés

Exercice 1

Soit le système $\dot{x} = A(\theta)x$ où le paramètre $\theta \in [-\frac{1}{2} \;\; \frac{1}{2}]$ est incertain et $A(\theta) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \theta^2 & -1-\theta \end{bmatrix}$.

1.1 Proposer un modèle polytopique pour ce système incertain.

1.2 Proposer un modèle LFT pour ce système incertain.

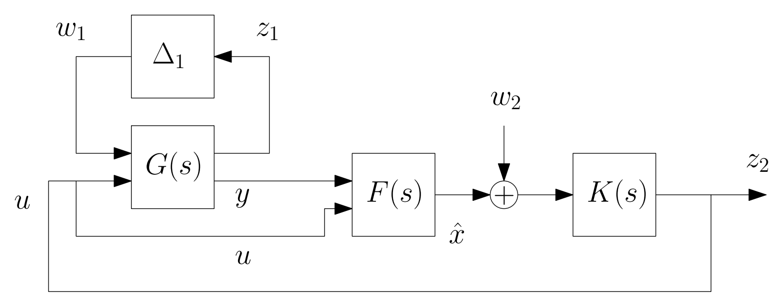
1.3 Le système est-il stable pour $\theta = \frac{1}{2}$? Est-il stable pour $\theta = -\frac{1}{2}$?

1.4 Le système est-il stable pour tout $\theta \in [-\frac{1}{2} \;\; \frac{1}{2}]$ constant ?

1.5 Peut-on en conclure que le système est-il stable pour $\theta(t) = \frac{1}{2}\cos(t)$?
Si ce n'est pas le cas, proposer une méthode qui permettrait de le prouver. On suggère de prendre en considération $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Exercice 2

On considère le système décrit par le schéma bloc ci-dessous



où $\Delta_1 \star G(s)$ est un système dynamique incertain, $F(s)$ est un filtre jouant le rôle d'observateur pour ce système et $K(s)$ est un contrôleur de type retour d'état. Les incertitudes sur le système sont telles que $\|\Delta_1\|_\infty \leq 2$. On s'intéresse à la performance H_∞ en considérant des perturbations w_2 sur la transmission des informations entre l'observateur et le contrôleur, et en mesurant leur effet sur le signal de commande $z_2 = u$. On souhaite démontrer que pour tout Δ_1, la performance H_∞ du système est inférieure à $\frac{1}{2}$:

$$\|T_{w_2 \to z_2}(\Delta_1)\|_\infty \leq \tfrac{1}{2} \quad \text{pour tout} \quad \|\Delta_1\|_\infty \leq 2.$$

Décrire une méthode qui permettrait de répondre à cette question.

Exercice 3

Donner la matrice rationnelle en δ correspondant à $\begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0.5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$.

Exercice 4

4.1 Que permet de prouver la condition LMI suivante ?

$$\exists P \succ 0, \qquad -A^T P A - 2PA - 2A^T P - 3P \succ 0$$

4.2 Proposez une preuve de ce résultat.

Université Paul Sabatier
Cours M2 ISTR / RODECO - module Commande linéaire avancée - Commande Robuste

Examen du 21 Octobre 2016 - Corrigé

Exercice 1

1.1 Une rapide analyse par intervalles donne $-1-\theta \in [-\frac{3}{2} \quad -\frac{1}{2}]$ et $\theta^2 \in [0 \quad \frac{1}{4}]$. Un modèle polytopique possible avec 4 sommets est donc défini par

$$A(\zeta) \in \text{co}\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \}.$$

Une alternative est de tracer θ^2 en fonction de $-1-\theta$, de prendre par exemple les tangentes de la couve θ^2 aux points extrêmes et sélectionner les points situés à $-1-\alpha$ et $-1+\alpha$ correspondant à l'intersection des tangentes avec l'horizontale (de tête je trouve $\alpha = \frac{1}{4}$). Ca donne alors un polytope un peu plus petit du type

$$A(\zeta) \in \text{co}\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1+\alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1-\alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \}.$$

C'est le mieux qu'on puisse faire en conservant la symétrie et avec 4 sommets.

1.2 Commençons par normalizer l'incertitude $\theta = \frac{1}{2}\delta$ avec $\delta \in [-1 \quad 1]$. Ce qui donne la LFT $\theta = \delta \star \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$. Notons donc que du coup

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \theta \end{bmatrix} = \delta \star \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right], \qquad \begin{bmatrix} \theta & -1 \end{bmatrix} = \delta \star \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Ecrivons ensuite

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \theta^2 & -1-\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta & -1 \end{bmatrix}$$

ce qui permet de conclure en appliquant les formules du cours

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \theta^2 & -1-\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

On peut donc écrire le système sous la forme suivante

$$\begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w_\Delta \end{array}, \qquad w_\Delta = (\delta I_2) z_\Delta.$$

C'était une des façon de répondre à cette question.

1.3 La matrice des dynamiques $A(\theta = \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$, a une trace de $-\frac{5}{2}$, négative, et un déterminant de $\frac{5}{4}$, positif. Les pôles sont donc à parties réelles négatives. Le système est stable pour cette valeur des incertitudes.

La matrice des dynamiques $A(\theta = -\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, a une trace est $-\frac{3}{2}$, négative, et un déterminant de $\frac{1}{4}$, positif. Les poles sont donc à parties réelles négatives. Le système est stable pour cette valeur des incertitudes.

1.4 La trace de la matrice $A(\theta)$ est de $-2-\theta \in [-2.5 \quad -1.5]$. Elle est négative pour tout θ. Le déterminant est $1+\theta+\theta^2 = (\theta+\frac{1}{2})^2 + 1 - \frac{1}{4} = (\theta+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ qui est tout le temps positif. Les pôles sont donc à partie réelle positive. Le système est stable pour tout $\theta \in [-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}]$ constant.

1.5 Cette fois-ci il faut faire appel à la théorie de Lyapunov et par exemple trouver P définie positive qui prouve la stabilité de tous les sommets du polytope. Dans ce cas on prouve la stabilité robuste du polytope pour toute incertitude, même si elle est fonction du temps. Un résultat équivalent ne peut être obtenu avec le calcul des pôles qui n'a de sens que pour les systèmes linéaires invariants dans le temps. Si le polytope est stable, le système original qui est contenu dedans l'est aussi.

On peut tester par exemple la matrice P proposée dans l'énoncé. Ce qui donne pour les sommets du polytope :

$$A^TP+PA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \begin{array}{l} \text{trace} = -6 \\ \det = 7 \end{array}$$

$$A^TP+PA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -12 \end{bmatrix}, \begin{array}{l} \text{trace} = -14 \\ \det = 23 \end{array}$$

$$A^TP+PA = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \begin{array}{l} \text{trace} = -6 \\ \det = 4 \end{array}$$

$$A^TP+PA = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -12 \end{bmatrix}, \begin{array}{l} \text{trace} = -14 \\ \det = 20 \end{array}.$$

Dans chaque cas la trace est négative, le déterminant positif. Pour ces matrices on en déduit que les valeurs propres sont à chaque fois toutes négatives (leur somme est négative et le produit est positif). Les inégalités de Lyapunov sont satisfaites pour la même matrice de Lyapunov P, sur tous les sommets du polytope, donc pour tout le polytope. Le système est robustement stable et cela est prouvé par la matrice de Lyapunov P.

Exercice 2

D'après le théorème du petit gain la performance H_∞ de ce système est satisfaite si et seulement si le système avec $w_2 = \Delta_2 z_2$ est robustement stable vi-à-vis de $\|\Delta_2\|_\infty \leq 2$. On s'intéresse donc au système réécrit sous la forme d'un système linéaire $M(s)$ bouclé par

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

où les incertitudes sont telles que $\|\Delta_1\|_\infty \leq 2$ et $\|\Delta_2\|_\infty \leq 2$. La stabilité robuste vis-à-vis de ces incertitudes structurées bloc-diagonales est garantie si $\Delta \star M(s)$ est robustement stable pour tout $\|\Delta\|_\infty \leq 2$ non structuré. Pour finir, d'après le théorème du petit gain, ceci est vrai si et seulement si la norme H_∞ de $M(s)$ est inférieure à $\frac{1}{2}$. Une façon de répondre à la question est donc de calculer la norme H_∞ de $M(s)$.

Exercice 3

On applique la formule du cours

$$\left[\begin{array}{cc}\delta & 0\\ 0 & \delta\end{array}\right] \star \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0.5 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & -1 & 2\\ 0.5 & 0 & 0 & -1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc}-1 & 2\\ 0 & -1\end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ 0.5 & 0\end{array}\right](\delta I_2)\left(I_2 - \left[\begin{array}{cc}0 & 0.5\\ 0 & 0\end{array}\right](\delta I_2)\right)^{-1}\left[\begin{array}{cc}0 & -1\\ 1 & 0\end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc}-1 & 2\\ 0 & -1\end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ 0.5\delta & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}1 & -0.5\delta\\ 0 & 1\end{array}\right]^{-1}\left[\begin{array}{cc}0 & -1\\ 1 & 0\end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc}-1 & 2\\ 0 & -1\end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ 0.5\delta & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}1 & 0.5\delta\\ 0 & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}0 & -1\\ 1 & 0\end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc}-1 & 2\\ 0 & -1\end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ 0.5\delta & 0.25\delta^2\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}0 & -1\\ 1 & 0\end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc}-1 & 2\\ 0 & -1\end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ 0.25\delta^2 & -0.5\delta\end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc}-1 & 2\\ 0.25\delta^2 & -1-0.5\delta\end{array}\right]$$

Exercice 4

4.1 La condition proposée correspond à

$$(-1)\cdot A^T PA + (-2)\cdot PA + (-2)\cdot A^T P + (1^2 - (-2)\cdot(-2))P \succ 0$$

avec les formules vues en cours on en déduit que cela corresponds à dire que les valeurs propres λ de A sont dans la région $|-2-\lambda| \leq 1$. Donc les pôles du système $\dot{x} = Ax$ sont dans le cercle centré en -2 et de rayon 1.

4.2 On multiplie à droite et à gauche la condition par x et x^* respectivement, où $x \neq 0$ est un vecteur propre $Ax = \lambda x$ (et donc $x^* A^T = \lambda^* x^*$). Le résultat est de la forme :

$$-\lambda^*\lambda x^* Px - 2\lambda x^* Px - 2\lambda^* x^* Px - 3x^* Px > 0$$

On peut simplifier par $x^* Px$ qui est positif strictement par définition de $P \succ 0$. Le résultat donne

$$-\lambda^*\lambda - 2\lambda - 2\lambda^* - 3 = -(\lambda+2)^*(\lambda+2) + 1 > 0$$

c'est à dire que $|\lambda+2| < 1$. Les valeurs propres de A sont dans le cercle centré en -2 et de rayon 1.