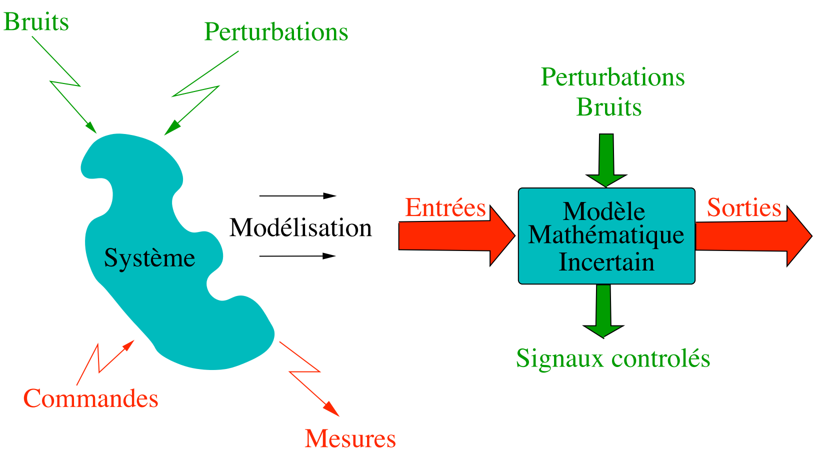
Cours M2 ISTR & RODECO - Commande linéaire avancée - Commande Robuste

Cours 1 - Modèles linéaires incertains polytopiques

Modèles linéaires incertains polytopiques



- Le cours se limite aux systèmes linéaires
- Modèles par fonctions et matrices de transfert incertaines
- Modèles dans l'espace d'état

■ Matrices polytopiques

$$\text{CO}\left\{M^{[1]}, M^{[2]}, \ldots M^{[\bar{v}]}\right\} = \left\{ M = \sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v M^{[v]} \quad : \quad \zeta_v \geq 0 \ , \ \sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v = 1 \right\}$$

- $M^{[v]}$: sommets du polytope
- ζ_v coordonnées barycentriques définies sur le simplexe

$$\mathbb{S}_{\bar{v}} = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^{\bar{v}} \ : \ \zeta_v \geq 0 \ , \ \sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v = 1 \right\}$$

- Toute matrice affine en $\bar{\alpha}$ incertitudes scalaires définies sur des intervalles
est un polytope à $\bar{v} = 2^{\bar{\alpha}}$ sommets obtenus en prenant les combinaisons de valeurs extrêmes

- Toute matrice multi-affine en $\bar{\alpha}$ incertitudes scalaires définies sur des intervalles
est **inclue** dans le polytope à $\bar{v} = 2^{\bar{\alpha}}$ sommets
obtenus en prenant les combinaisons de valeurs extrêmes

- Toute matrice incertaine bornée peut être inclue dans un polytope

- Exemple $M(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & \delta \end{bmatrix}$ avec $\delta \in [1 \ \ 2]$

- Exemple $A(\delta_1, \delta_2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 + 0.1\delta_1 \\ 2 - \delta_1 & 0.2\delta_2 \end{bmatrix}$ avec $\delta_i \in [-1 \ \ 1]$

- Exemple $M(\delta) = \begin{bmatrix} 1 + \delta \\ 1 + \delta^2 \end{bmatrix}$ avec $\delta_i \in [-1 \quad +1]$

- Exemple $M(\delta_1, \delta_2) = \begin{bmatrix} 1 + \delta_1 \\ 1 + \delta_2 \\ 1 + \delta_1\delta_2 \end{bmatrix}$ avec $\delta_i \in [0.1 \quad \bar{\delta}]$

- Systèmes polytopiques
- Systèmes dans l'espace d'état dont les matrices sont définies dans un polytope
- Exemple avec $\delta_i \in [-1 \ 1]$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1+0.1\delta_1 \\ 2-\delta_1 & 0.2\delta_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1-\delta_2 & 0 \\ 1 & 0.1\delta_1 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} A^{[1]} & B^{[1]} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1.1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 1 & 0.1 \end{array}\right], \begin{bmatrix} A^{[2]} & B^{[2]} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1.1 & 2 & 0 \\ 1 & -0.2 & 1 & 0.1 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} A^{[3]} & B^{[3]} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0.9 & 0 & 0 \\ 3 & 0.2 & 1 & -0.1 \end{array}\right], \begin{bmatrix} A^{[4]} & B^{[4]} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0.9 & 2 & 0 \\ 3 & -0.2 & 1 & -0.1 \end{array}\right]$$

- Exemple $\quad m\ddot{y} + 2\dot{y} + y = bu \quad : \quad m \in [\frac{1}{3} \ , \ 1] \ , \ b \in [1 \ , \ 2]$

construire des modèles polytopiques et les comparer

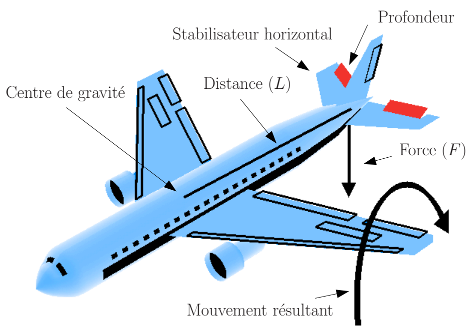
- Modèles englobant les réalisations possibles (car modèle non-affine en les incertitudes)
- Limitation peut être levée par la modélisation sous forme descripteur

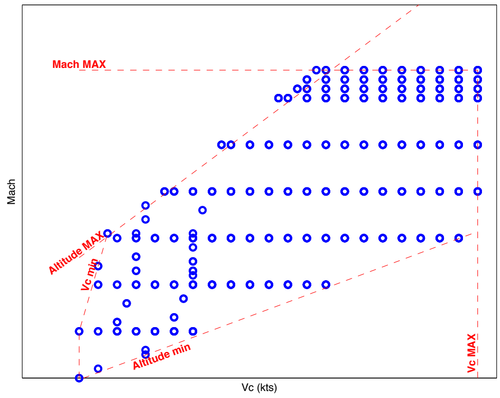
$$E\dot{x} = Ax + Bu$$

■ Modèle incertain affine polytopique :

▲ Peuvent être construits à la données de familles de modèles identifiés

▲ Example : Modélisation des dynamiques longitudinales d'un avion civil.





Modèles non-linéaires sur un point de vol i, approximés par modèles linéaires incertains définis comme l'enveloppe convexe des modèles voisins dans l'espace des paramètres :

$$M_{\theta_i}(\zeta) = \text{CO}\left\{ M_{\theta_j} \;:\; ||\theta_j - \theta_i|| \leq \alpha \right\}$$

■ Pour un système incertain donné on peut construire en général plusieurs modèles :

Réalité incertaine $\subset$ modèle polytopique 1 $\subset$ modèle polytopique 2 ...

■ Si $\{\Sigma_1(\Delta_1), \Delta_1 \in \mathbf{\Delta}_1\} \subset \{\Sigma_2(\Delta_2), \Delta_2 \in \mathbf{\Delta}_2\}$
et une propriété est vraie pour tout élément de $\{\Sigma_2(\Delta_2), \Delta_2 \in \mathbf{\Delta}_2\}$
alors la propriété est vraie pour tout élément de $\{\Sigma_1(\Delta_1), \Delta_1 \in \mathbf{\Delta}_1\}$.

■ Propriétés d'intérêt : stabilité, localisation des pôles, performance H_∞...

■ **THM-LTI** Le système $\dot{x} = Ax$ est stable ssi $\exists P$ solution des LMI :

$$P \succ 0 \;,\; A^T P + PA \prec 0$$

● Preuve de la suffisance par la fonction de Lyapunov $V(x) = x^T P x$

▲ Par congruence les conditions impliquent pour tout $x \neq 0$:

$$V(x) > 0 \;,\; \dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} < 0$$

● Preuve par le placement des pôles. Soit $Ax = \lambda x$, alors :

$$x^* A^T P x + x^* P A x = (\lambda^* + \lambda) x^* P x = 2\mathrm{Re}(\lambda) \cdot x^* P x < 0$$

▲ Donc comme $x^* P x > 0$ on trouve $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$

■ **THM-Poly-LU** Le système polytopique $\dot{x} = A(\zeta)x$ est stable si $\exists P$ solution des LMI :

$$P \succ 0 \;,\; A^{[v]T} P + P A^{[v]} \prec 0 \;,\; \forall v = 1 \dots \bar{v}$$

● Preuve

▲ Les LMI sont des contraintes convexes, donc $\forall \zeta \in \{\zeta_v \geq 0,\; \sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v = 1\}$:

$$\sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v (A^{[v]T} P + P A^{[v]}) = A^T(\zeta) P + P A(\zeta) \prec 0$$

▲ Stabilité prouvée pour toute incertitude avec $V(x) = x^T P x$

● Conditions du **THM-Poly-LU** : chercher une même fonction de Lyapunov qui prouve la stabilité de tous les sommets.

▲ Si cette fonction existe elle prouve la stabilité de tout le polytope.

▲ Si elle n'existe pas, aucune conclusion possible

■ **THM-Poly-Rob** Le système polytopique $\dot{x} = A(\zeta)x$ est stable **ssi** $\forall\zeta$, $\exists P(\zeta)$ solution de :

$$P(\zeta) \succ 0 \;,\; \dot{P}(\zeta) + A^T(\zeta)P(\zeta) + P(\zeta)A(\zeta) \prec 0$$

● Preuve avec la fonction de Lyapunov, dépendant des paramètres $V(x,\zeta) = x^T P(\zeta)x$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,\zeta) = & \; x^T\dot{P}(\zeta)x + \dot{x}^T P(\zeta)x + x^T P(\zeta)\dot{x} \\ & = x^T(\dot{P}(\zeta) + A^T(\zeta)P(\zeta) + P(\zeta)A(\zeta))x \end{aligned}$$

● **THM-Poly-LU** cas particulier de **THM-Poly-Rob** où $P(\zeta) = P$ unique pour toute incertitude

▲ Avantage : **THM-Poly-LU** est testable numériquement (LMI de dimension finie)

▲ **THM-Poly-LU** valide pour des incertitudes constantes et variant dans le temps

■ **THM-Poly-LDP** Le système polytopique $\dot{x} = A(\zeta)x$ avec $\dot{\zeta} = 0$ est stable
si $\exists P^{[v]}$ et F solutions des LMI :

$$P^{[v]} \succ 0 \;,\; \begin{bmatrix} 0 & P^{[v]} \\ P^{[v]} & 0 \end{bmatrix} \prec F \begin{bmatrix} A^{[v]} & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^{[v]T} \\ -1 \end{bmatrix} F^T \;,\; \forall v = 1 \dots \bar{v}$$

● Preuve

▲ Les LMI sont des contraintes convexes, donc $\forall\zeta \in \{\zeta_v \geq 0,\; \sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v = 1\}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & P(\zeta) \\ P(\zeta) & 0 \end{bmatrix} \prec F \begin{bmatrix} A(\zeta) & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T(\zeta) \\ -1 \end{bmatrix} F^T$$

où $P(\zeta) = \sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v P^{[v]} \succ 0$ et $\dot{P}(\zeta) = 0$ car $\dot{\zeta} = 0$.

▲ Par congruence on trouve

$$\dot{V}(x,\zeta) = \dot{x}^T P(\zeta)x + x^T P(\zeta)\dot{x} < 0 \;,\; \forall x \neq 0 \;:\; \dot{x} = A(\zeta)x$$

▲ Stabilité prouvée pour toute incertitude avec $V(x,\zeta) = x^T(\sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v P^{[v]})x$

■ **THM-Poly-LU** Le système polytopique $\dot{x} = A(\zeta)x$ est stable si $\exists P$ solution des LMI :

$$P \succ 0 \ , \ A^{[v]T} P + P A^{[v]} \prec 0 \ , \ \forall v = 1 \dots \bar{v}$$

■ **THM-Poly-LDP** Le système polytopique $\dot{x} = A(\zeta)x$ avec $\dot{\zeta} = 0$ est stable si $\exists P^{[v]}$ et S solutions des LMI :

$$P^{[v]} \succ 0 \ , \ \begin{bmatrix} 0 & P^{[v]} \\ P^{[v]} & 0 \end{bmatrix} \prec S \begin{bmatrix} A^{[v]} & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^{[v]T} \\ -1 \end{bmatrix} S^T \ , \ \forall v = 1 \dots \bar{v}$$

● Quand $\dot{\zeta} = 0$,
THM-Poly-LU cas particulier de **THM-Poly-LDP**, cas particulier de **THM-Poly-Rob**

● **THM-Poly-LDP** numériquement plus difficile que **THM-Poly-LU**

■ Localisation robuste des pôles des systèmes LTI

● Localisation dans des régions quadratiques de C tq $r_1 \lambda \lambda^* + r_2^* \lambda + r_2 \lambda^* + r_3 > 0$

▲ $-\lambda - \lambda^* + 2\alpha > 0 \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Re}(\lambda) < \alpha$

▲ $\lambda + \lambda^* - 2\alpha > 0 \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Re}(\lambda) > \alpha$

▲ $-\lambda\lambda^* + \alpha^* \lambda + \alpha \lambda^* + r^2 - \alpha^* \alpha > 0 \ \Leftrightarrow \ |\alpha - \lambda| < r$

▲ $-e^{j\psi} \lambda - e^{-j\psi} \lambda^* + \alpha e^{-j\psi} + \alpha^* e^{j\psi} > 0 \ \Leftrightarrow \ \angle([\alpha, \alpha + j\omega], \lambda) > \psi$

● Condition LMI

$$P \succ 0 \ , \ r_1 A^* P A + r_2 P A + r_2^* A^* P + r_3 P \succ 0$$

▲ Preuve : congruence avec vecteur propre de A

▲ Exemple : Condition de stabilité de $x_{k+1} = Ax$ $\quad P > 0 \ , \ -A^* P A + P > 0$

▲ Exercice : Construire conditions LMI de localisation de pôles robuste

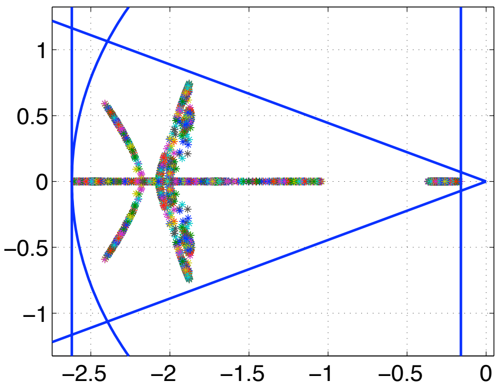
■ Localisation robuste des pôles des systèmes LTI incertains

● Localisation des v.p. de $A(\Delta)$ pour tout $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}$

▲ Exemple : polytope avec 3 sommets

$$A^{[1]} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{[2]} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A^{[3]} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tirage aléatoire de 1000 combinaisons linéaires de ces sommets



▲ $\text{Re}(\text{eig}(A(\Delta))) \leq -0.16 \;\Rightarrow\; \tau_{\min} \leq 6.25s$

▲ $\text{Re}(\text{eig}(A(\Delta))) \geq -2.62 \;\Rightarrow\; \tau_{\max} \geq 0.39s$

▲ $|\text{eig}(A(\Delta))| \leq 2.62 \;\Rightarrow\; \omega_{n\,\max} \leq 2.62\text{rad}/s$

▲ $\angle([0, j\omega], \text{eig}(A(\Delta))) \geq 66° \;\Rightarrow\; \zeta_{\min} \geq 0.92$

■ Norme L_2 induite (aussi appelée norme H_∞) des systèmes LTI

$$P \succ 0\,, \quad \begin{bmatrix} A^T P + PA + C_z^T C_z & PB_w + C_z^T D_{zw} \\ B_w^T P + D_{zw}^T C_z & -\gamma^2 1 + D_{zw}^T D_{zw} \end{bmatrix} \prec 0$$

● S'il existe P solution des LMIs alors le système

$$H_{zw}(s) \;\sim\; \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w \\ z = C_z x + D_{zw} w \end{cases}$$

est asymptotiquement stable et pour toute condition initiale nulle on a $\|z\| \leq \gamma \|w\|$.

▲ Preuve par congruence avec signaux x et w

▲ Exercice : Construire conditions LMI de performance H_∞ robuste

■ $\dot{x} = Ax$ est stable **ssi** le système dual $\dot{x}_d = A^T x_d$ est stable

● Preuve 1 : $\lambda(A) = \lambda(A^T)$

● Preuve 2 : Si A est stable ssi $\exists P \succ 0 \;\; : \;\; A^T P + PA \prec 0$
Par congruence avec $Q = P^{-1}$, ssi $\exists Q \succ 0 \;\; : \;\; QA^T + AQ \prec 0$
Et donc ssi A^T est stable

■ **THM-RE-LTI** Le système $\dot{x} = Ax + B_u u$ est stabilisable par retour d'état
ssi $\exists Q$ et S solution des LMI :

$$Q \succ 0 \;\; , \;\; QA^T + S^T B_u^T + AQ + B_u S \prec 0$$

Un gain de retour d'état est alors donné par $K = SQ^{-1}$

● Preuve : La condition LMI s'écrit aussi $Q(A + B_u K)^T + (A + B_u K)Q \prec 0$
Condition équivalente à la stabilité du système dual $\dot{x}_d = (A + B_u K)^T x_d$
Condition équivalente à la stabilité de $\dot{x} = (A + B_u K)x = Ax + B_u u$ avec $u = Kx$.

▲ Exercice : Construire des conditions de stabilisation par retour d'état pour les systèmes incertains polytopiques

▲ Exercice : Construire des conditions de localisation des poles dans des régions du plan complexe par retour d'état