

Stabilité robuste, μ -analyse

■ Problème générique d'analyse de stabilité robuste (pouvant inclure performance H_∞)

● Stabilité de la "boucle $M - \Delta$ " : stabilité de $\Delta \star M$ où $M = \hat{\Sigma} \star K$

● $\Delta \in \mathbb{A}_\gamma$ incertitude structurée

$$\Delta(s) = \text{diag} \{ \delta_1 \mathbf{1}, \dots, \delta_{n_r} \mathbf{1}, q_1(s) \mathbf{1}, \dots, q_{n_c}(s) \mathbf{1}, \Delta_1(s), \dots, \Delta_{n_f}(s) \}$$

- n_r blocs réels répétés avec $\delta_j \in \mathbb{R}$, $|\delta_j| \leq \gamma$

- n_c blocs LTI scalaires répétés avec $q_j \in \mathcal{RH}_\infty$, $\|q_j\|_\infty \leq \gamma$

- n_f blocs LTI matriciels stables $\Delta_j \in \mathcal{RH}_\infty^{p_j \times l_j}$, $\|\Delta_j\|_\infty \leq \gamma$

(incertitudes normalisée : $\gamma = 1$)

● Pour chaque fréquence ω on a $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq \gamma$ et $\Delta(j\omega) \in \mathbb{V}$ défini par :

$$\mathbb{V} = \text{diag} \{ \delta_1 \mathbf{1}, \dots, \delta_{n_r} \mathbf{1}, q_1 \mathbf{1}, \dots, q_{n_c} \mathbf{1}, \Delta_1, \dots, \Delta_{n_f} \}$$

- n_r blocs réels répétés avec $\delta_j \in \mathbb{R}$

- n_c blocs complexes répétés avec $q_j \in \mathbb{C}$

- n_f blocs matriciels complexes $\Delta_j \in \mathbb{C}^{p_j \times l_j}$

● \mathbb{V} définit la "structure" de l'incertitude, γ sa "taille"

■ Problème générique d'analyse de stabilité robuste (suite)

● Pour M stable, trouver le plus grand γ tel que $\Delta \star M$ stable pour tout $\Delta \in \Delta_\gamma$

▲ Argument de continuité (voir preuve Théorème du petit gain), il suffit de montrer que $[1 - M(j\omega)\tau\Delta(j\omega)]$ inversible pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0, 1]$, $\Delta \in \Delta_\gamma$

▲ Par construction de \mathbb{V} la propriété est vraie si

$$[1 - M(j\omega)\Delta] \text{ inversible pour tout } \Delta \in \mathbb{V} \text{ tel que } \bar{\sigma}(\Delta) \leq \gamma$$

● Définition : Marge de non singularité d'une matrice complexe = $k_{\mathbb{V}}(M_0) = \max \gamma_0$

Plus grande valeur de γ_0 telle que $[1 - M_0\Delta]$ inversible pour tout $\Delta \in \mathbb{V}$ tq $\bar{\sigma}(\Delta) \leq \gamma_0$

▲ Cette valeur dépend de M_0 et de la structure de l'incertitude \mathbb{V}

● Définition : Valeur singulière structurée d'une matrice complexe :

$$\mu_{\mathbb{V}}(M_0) = \frac{1}{k_{\mathbb{V}}(M_0)}$$

■ Théorème

● μ -analyse (borne supérieure) :

si $\mu_{\mathbb{V}}(M(j\omega)) < \mu_u$ pour toutes des fréquences $\omega \in \mathbb{R}^+$

alors $\Delta \star M$ stable pour tout $\Delta \in \Delta_{\gamma_u}$ avec $\gamma_u = 1/\mu_u$

● μ -analyse (borne inférieure) : [Tits and Fan(1995)]

si $\mu_{\mathbb{V}}(M(j\omega)) > \mu_l$ pour une fréquence $\omega \in \mathbb{R}^+$

alors il existe $\Delta \in \Delta_{\gamma_l}$ avec $\gamma_l = 1/\mu_l$ qui rend $\Delta \star M$ instable

▲ Stabilité robuste évaluée par bornes supérieures/inférieures de $\mu_{\mathbb{V}}(M(j\omega))$

▲ Mais... le calcul de $\mu_{\mathbb{V}}(M)$ est difficile en général

▲ Il faut le faire pour toutes les fréquences (ou un quadrillage suffisamment fin)

■ Propriétés de μ_{∇} :

- μ_{∇} croît avec la taille de l'ensemble d'incertitude

$$\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}_2 \Rightarrow \mu_{\nabla_1}(M_0) \leq \mu_{\nabla_2}(M_0)$$

- $\mu_{\nabla}(\alpha M_0) = |\alpha| \mu_{\nabla}(M_0)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$

- Si $\mathbb{V} = \mathbb{C}^{p \times q}$ alors $\mu_{\nabla}(M_0) = \bar{\sigma}(M_0)$ et donc $\|M\|_{\infty} = \sup_{\omega} \mu_{\nabla}(M(j\omega))$
(Résultat de μ -analyse se confond alors avec le théorème du petit gain)

- Si $\mathbb{V} = \{\nabla = \delta \mathbf{1}, \delta \in \mathbb{C}\}$ alors $\mu_{\nabla}(M_0) = \rho(M_0)$

et donc pour tout \mathbb{V} avec que des blocs complexes on a $\boxed{\rho(M_0) \leq \mu_{\nabla}(M_0) \leq \bar{\sigma}(M_0)}$

- Si $\mathbb{V} = \{\nabla = \delta \mathbf{1}, \delta \in \mathbb{R}\}$ alors $\mu_{\nabla}(M_0) = \rho_R(M_0)$
(plus grand module de v.p. réelle)

et donc pour tout \mathbb{V} on a $\boxed{\rho_R(M_0) \leq \mu_{\nabla}(M_0) \leq \bar{\sigma}(M_0)}$

▲ Exemple : [Skogestad 96]

$$M = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \quad \mu_{\nabla}(M) = \begin{cases} \rho(M) = |a + b| & \text{pour } \nabla = \delta \mathbf{1} \\ |a| + |b| & \text{pour } \nabla = \text{diag}\{\delta_1, \delta_2\} \\ \bar{\sigma}(M) = \sqrt{2|a|^2 + 2|b|^2} & \text{pour } \nabla \text{ pleine} \end{cases}$$

▲ Exemple : [Zhou96]

$$M = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \nabla = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \rho(M) &= 0 \\ \bar{\sigma}(M) &= \mu_{\nabla} = 1 \end{aligned}$$

Nota : l'écart entre les bornes inférieure et supérieure peut être grand

■ Propriétés de μ_{∇} :

● Si ∇ avec uniquement blocs complexes alors $\mu_{\nabla}(M_0) : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue**

● Si il existe des blocs réels $\mu_{\nabla}(M_0) : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ peut être **discontinue**

▲ Exemple avec $\nabla = \delta 1_2$, $\delta \in \mathbb{R}$ et $M_0 = \begin{bmatrix} 1 & m \\ -m & 1 \end{bmatrix}$

$$\mu_{\nabla}(M_0) = \rho_R(M_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \\ 1 & \text{si } m = 0 \end{cases}$$

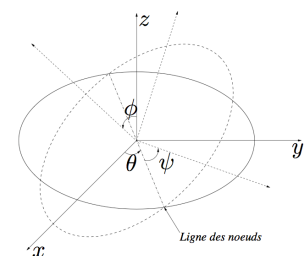
▲ !! La fonction $\omega \mapsto \mu_{\nabla}(M(j\omega))$ peut contenir des sauts

Stabilité robuste, μ -analyse

■ Exemple : stabilité robuste d'un satellite

- Ecriture des équations d'Euler du satellite en spin Ω constante autour de l'axe z et des équations de la cinématique
- Linéarisation des équations d'Euler et de la cinématique
- $I_{xx} = I_{yy} = I_1$ et $I_{zz} = I_3$

- Découplage du mouvement autour de z / axes x et y



- Equations d'Euler linéarisées et découplées :

$$I_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \Omega (I_1 - I_3) = T_1$$

$$I_1 \dot{\omega}_2 - \omega_1 \Omega (I_3 - I_1) = T_2$$

- On pose $a = (1 - I_3/I_1)\Omega$ et $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} T_1/I_1 & T_2/I_1 \end{bmatrix}'$

■ Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

● Modèle d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

● Matrice de transfert :

$$\Sigma(s) = C(s\mathbf{1} - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 + a^2} \begin{bmatrix} s - a^2 & a(s + 1) \\ -a(s + 1) & s - a^2 \end{bmatrix}$$

■ Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

● Stabilisation interne nominale : $K = \mathbf{1}_2$

▲ Test entrée - sortie (fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire)

$$S_y(s) = S_u(s) = (\mathbf{1} + \Sigma(s)K)^{-1} = \frac{1}{s + 1} \begin{bmatrix} s & -a \\ a & s \end{bmatrix}$$

$$T_y(s) = T_u(s) = \Sigma(s)K(\mathbf{1} + \Sigma(s)K)^{-1} = \frac{1}{s + 1} \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$$

▲ Test d'état :

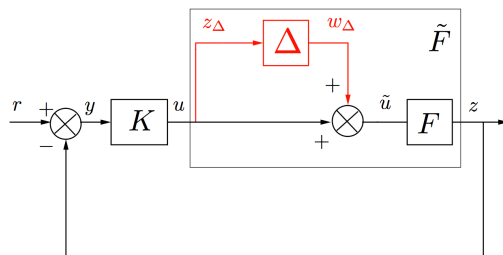
$$\tilde{A} = A - BKC = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

■ Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

● On suppose que des dynamiques liées aux modes souples ont été négligées ou non modélisées

▲ Modèle incertain multiplicatif :

$$\Sigma(s, \Delta) = \Sigma(s)(1 + \Delta) = \frac{1}{s^2 + a^2} \begin{bmatrix} s - a^2 & a(s + 1) \\ -a(s + 1) & s - a^2 \end{bmatrix} [1 + \Delta]$$



▲ Modèle $\Delta \star M$ pour $K = 1$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Sigma & -\Sigma \end{bmatrix} \star K = -K(1 + \Sigma K)^{-1} \Sigma = \begin{bmatrix} -\frac{1}{s+1} & -\frac{a}{s+1} \\ \frac{a}{s+1} & -\frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

■ Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

● Cas où Δ est pleine, LTI, bornée en norme (cas des dynamiques couplées négligées)

▲ Calcul de $\mu_{\nabla_1}(M(j\omega))$ avec $\nabla_1 = \mathbb{C}^{2 \times 2}$

$$\mu_{\nabla_1}(M(j\omega)) = \bar{\sigma}(M(j\omega)) = \left| \frac{1}{1 + j\omega} \right| \bar{\sigma} \begin{bmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} \sqrt{1 + a^2}$$

Donc $\max_{\omega} \mu_{\nabla_1}(M(j\omega)) = \sqrt{1 + a^2}$: la boucle est stable si $\|\Delta\|_{\infty} < \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.

▲ Théorème du petit gain : $\Delta \star M$ stable ssi $\|\Delta\|_{\infty} < \frac{1}{\gamma_F}$ où

$$\gamma_F = \|M\|_{\infty} = \left\| \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = \sqrt{1 + a^2}$$

■ Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

● Cas où $\mathbb{V}_2 = \{\text{diag}(\delta, \delta) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}\}$ à valeurs complexes

▲ Le calcul exact de $\mu_{\mathbb{V}_2}(M(j\omega))$ est dans ce cas possible :

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{V}_2}(M(j\omega)) &= \rho(M(j\omega)) = \rho \left(\frac{1}{1+j\omega} \begin{bmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \left| \frac{1}{1+\omega^2} \right| \rho \begin{bmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} | -1 \pm ja | \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \sqrt{1+a^2} \end{aligned}$$

▲ $\Delta \star M$ stable si $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma_F}$ où $\gamma_F = \sqrt{1+a^2}$

■ Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

● Cas où $\mathbb{V}_2 = \{\text{diag}(\delta, \delta) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}\}$

$$\underbrace{\{\Delta = \text{diag}(\delta, \delta) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}\}}_{\mathbb{V}_2} \subset \underbrace{\{\Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}\}}_{\mathbb{V}_3} \subset \underbrace{\{\Delta \in \mathbb{C}^{2 \times 2}\}}_{\mathbb{V}_1}$$

▲ On en déduit $\mu_{\mathbb{V}_2}(M(j\omega)) \leq \mu_{\mathbb{V}_3}(M(j\omega)) \leq \mu_{\mathbb{V}_1}(M(j\omega))$.

▲ Les deux bornes sont égales, donc là encore

$$\Delta \star M \text{ stable si } \|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma_F} \text{ où } \gamma_F = \sqrt{1+a^2}$$

■ Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

● Cas où $\mathbb{V}_4 = \{\text{diag}(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}\}$ est à valeurs réelles

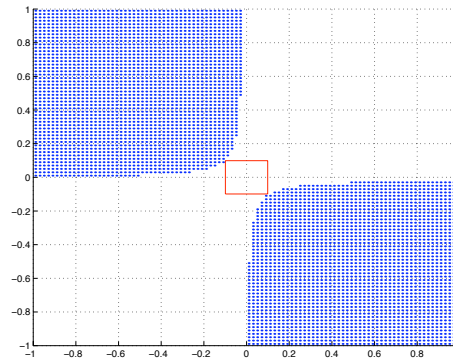
▲ Calcul à l'aide du critère de Routh-Hurwitz

$$\det(1 - M\Delta) = \det \begin{bmatrix} 1 + \frac{\delta_1}{s+1} & \frac{a\delta_2}{s+1} \\ \frac{-a\delta_1}{s+1} & 1 + \frac{\delta_2}{s+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{pmatrix} s^2 + (2 + \delta_1 + \delta_2)s \\ +1 + \delta_1 + \delta_2 + (a^2 + 1)\delta_1\delta_2 \end{pmatrix}$$

▲ La boucle $\Delta \star M$ est stable si

$$2 + \delta_1 + \delta_2 > 0 \text{ et}$$

$$1 + \delta_1 + \delta_2 + (a^2 + 1)\delta_1\delta_2 > 0$$



▲ $\Delta \star M$ stable si $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma_F}$ où $\gamma_F = \sqrt{1 + a^2}$

■ Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

● Cas où $\mathbb{V}_5 = \{\text{diag}(\delta, \delta) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}\}$ est à valeurs réelles

▲ Calcul à l'aide du critère de Routh-Hurwitz conduit à : $\Delta \star M$ est stable si

$$2 + 2\delta > 0, \quad 1 + 2\delta + (a^2 + 1)\delta^2 > 0$$

▲ $\Delta \star M$ stable si $\delta > -1$ c'est à dire $\|\Delta\| \leq 1$

▲ Calcul de $\mu_{\mathbb{V}_5}(M(j\omega))$ est possible et exact :

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{V}_2}(M(j\omega)) &= \rho_R(M(j\omega)) = \rho_R \left(\frac{1}{1+j\omega} \begin{bmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \max_{\mathbb{R}} \left| \frac{-1 \pm ja}{1+j\omega} \right| \end{aligned}$$

▲ donc $\mu_{\mathbb{V}_5}(M(j\omega)) = 1$ si $\omega = a$ et $\mu_{\mathbb{V}_5}(M(j\omega)) = 0$ sinon

Discontinue ! Très difficile à calculer par quadrillage sur ω !

▲ $\Delta \star M$ stable si $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma_F}$ où $\gamma_F = 1$

■ Calcul d'une meilleure borne inférieure de μ

● Tirage aléatoire :

▲ Prendre aléatoirement $\nabla \in \mathbb{W}$ et normaliser $\hat{\nabla} = \frac{1}{\bar{\sigma}(\nabla)} \nabla$

▲ alors $\rho_R(M_0 \hat{\nabla}) \leq \mu_{\nabla}(M_0)$

▲ Preuve : $(1 - M_0 \left[\frac{1}{\rho_R(M_0 \hat{\nabla})} \hat{\nabla} \right])$ n'est pas inversible et $\bar{\sigma} \left(\frac{1}{\rho_R(M_0 \hat{\nabla})} \hat{\nabla} \right) = \frac{1}{\rho_R(M_0 \hat{\nabla})}$

● Problème d'optimisation :

$$\sup_{\hat{\nabla} \in \nabla, \bar{\sigma}(\hat{\nabla})=1} \rho_R(M_0 \hat{\nabla}) \leq \mu_{\nabla}(M_0)$$

▲ Optimisation non convexe ($\bar{\sigma}(\hat{\nabla}) = 1$ est une contrainte non-convexe)

● Cas où \mathbb{W} contient uniquement des blocs complexes, alors

$$\max_{\hat{\nabla} \in \nabla, \bar{\sigma}(\hat{\nabla})=1} \rho(M_0 \hat{\nabla}) = \mu_{\nabla}(M_0)$$

● Rappel : calcul de bornes inférieures donne des valeurs d'incertitudes ("petites") qui déstabilisent

■ Calcul d'une meilleure borne supérieure de μ (pour garantir stabilité robuste)

● Pour la suite du cours on suppose que tous les blocs $\Delta_j \in \mathbb{C}^{p_j \times p_j}$ sont carrés

● Soit l'ensemble de matrices inversibles suivant (de structure "opposée" à \mathbb{W})

$$\mathbf{D}_{\nabla} = \left\{ \begin{array}{l} D = \text{diag}(P_1, \dots, P_{n_r}, D_1, \dots, D_{n_c}, d_1 \mathbf{1}_{p_1}, \dots, d_{n_f} \mathbf{1}_{p_{n_f}}) \\ P_j = P_j^* > 0, D_j = D_j^* > 0, d_j \in \mathbb{R}^{+*} \end{array} \right\}$$

▲ Pour tout $D \in \mathbf{D}_{\nabla}$ et tout $\Delta \in \mathbb{W}$ on a $D\Delta = \Delta D$ et donc

$$\det(1 - M_0 \Delta) = \frac{\det(D)}{\det(D)} \det(1 - M_0 \Delta) = \det(D^{-1}(1 - M_0 \Delta)D) = \det(1 - D^{-1}M_0 D \Delta)$$

▲ Ainsi pour tout $D \in \mathbf{D}_{\nabla}$ on a $\mu_{\nabla}(M_0) = \mu_{\nabla}(D^{-1}M_0 D)$

▲ Interprétation en terme de boucle

$$\Delta \star M_0 = (D^{-1} \Delta D) \star (D^{-1} M_0 D) = \Delta \star (D^{-1} M_0 D)$$

▲ Pour tout $D \in \mathbf{D}_{\nabla}$ on a $\mu_{\nabla}(M_0) = \mu_{\nabla}(D^{-1}M_0D) \leq \bar{\sigma}(D^{-1}M_0D)$ d'où

● Le problème d'optimisation suivant donne une borne supérieure de μ :

$$\mu_{\nabla}(M_0) \leq \inf_{D \in \mathbf{D}_{\nabla}} \bar{\sigma}(D^{-1}M_0D) \leq \bar{\sigma}(M_0)$$

▲ L'écart entre la borne et la valeur réelle peut être grand

(mais en général bien moins grand que avec $\bar{\sigma}(M_0)$)

▲ Si $2(n_r + n_c) + n_f \leq 3$ alors il y a égalité

● Le problème d'optimisation de la borne supérieure de μ est convexe

$$\mu_{\nabla}(M_0) \leq \inf_{D \in \mathbf{D}_{\nabla}} \bar{\sigma}(D^{-1}M_0D)$$

▲ Preuve :

Par définition $\bar{\sigma}(D^{-1}M_0D) < \kappa$ ssi $D^*M_0^*D^{-*}D^{-1}M_0D < \kappa^2\mathbf{1}$

Par congruence on trouve la contrainte $M_0^*D^{-*}D^{-1}M_0 < \kappa^2D^{-*}D^{-1}$

On remarque que $Q = D^{-*}D^{-1} \in \mathbf{D}_{\nabla}$ ssi $D \in \mathbf{D}_{\nabla}$ et donc

$$\mu_{\nabla}(M_0) \leq \kappa \text{ s'il existe une solution aux LMI suivantes } M_0^*QM_0 < \kappa^2Q, Q \in \mathbf{D}_{\nabla}$$

▲ La minimisation de κ est un "problème LMI de v.p. généralisé",
convexe, avec solutions en temps polynomial

$$\mu_{\nabla}(M_0) < \kappa \text{ s'il existe une solution aux LMI suivantes } M_0 Q M_0^* < \kappa^2 Q, Q \in \mathbf{D}_{\nabla}$$

● Preuve alternative de la condition LMI

▲ La contrainte $M_0^* Q M_0 < \kappa^2 Q$ s'écrit également

$$\begin{bmatrix} 1 & M_0^* \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\kappa^2 Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ M_0 \end{bmatrix} < 0$$

D'après le lemme de Finsler on en déduit l'existence $\tau > 0$ tel que

$$\begin{bmatrix} -\kappa^2 Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} < \tau \begin{bmatrix} M_0^* \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 & -1 \end{bmatrix}$$

Par congruence on a pour tout $\Delta \in \mathbb{V}$

$$\begin{bmatrix} \Delta^* & 1 \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\kappa^2 Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ 1 \end{bmatrix} < \tau \begin{bmatrix} \Delta^* M_0^* - 1 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \Delta - 1 \end{bmatrix}$$

Par construction, la partie gauche est définie-positive si $\bar{\sigma}(\Delta) \leq \frac{1}{\kappa}$
 donc $1 - M_0 \Delta$ est non singulière pour toute incertitude $\Delta \in \mathbb{V}$ tq $\bar{\sigma}(\Delta) \leq \frac{1}{\kappa}$.

■ Condition LMI moins pessimiste (DG -scalings)

● Soit l'ensemble suivant

$$\mathbf{G}_{\nabla} = \left\{ G = \text{diag}(G_1, \dots, G_{n_r}, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0), G_j = -G_j^* \right\}$$

▲ Pour tout $G \in \mathbf{G}_{\nabla}$ et tout $\Delta \in \mathbb{V}$ on a $G \Delta = -\Delta^* G^*$ donc

$$\begin{bmatrix} \Delta^* & 1 \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\kappa^2 Q & G^* \\ G & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta^* & 1 \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\kappa^2 Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ 1 \end{bmatrix}$$

le preuve précédente tient donc de la même façon si on définit le problème suivant

$$\mu_{\nabla}(M_0) < \kappa \text{ s'il existe une solution aux LMI suivantes}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & M_0^* \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\kappa^2 Q & G^* \\ G & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ M_0 \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{matrix} Q \in \mathbf{D}_{\nabla} \\ G \in \mathbf{G}_{\nabla} \end{matrix}$$

▲ Condition longtemps considérée comme, pessimiste, mais la meilleure possible

■ Théorème

● μ -analyse (borne supérieure) :

si $\mu_{\nabla}(M(j\omega)) < \mu_u$ pour toutes des fréquences $\omega \in \mathbb{R}^+$

alors $\Delta \star M$ stable pour tout $\Delta \in \Delta_{\gamma_u}$ avec $\gamma_u = 1/\mu_u$

▲ Pour chaque fréquence les DG -scalings donnent une valeur $\mu_u(\omega)$

● μ -analyse (borne inférieure) : [Tits and Fan(1995)]

si $\mu_{\nabla}(M(j\omega)) > \mu_l$ pour une fréquence $\omega \in \mathbb{R}^+$

alors il existe $\Delta \in \Delta_{\gamma_l}$ avec $\gamma_l = 1/\mu_l$ qui rend $\Delta \star M$ instable

▲ Pour chaque fréquence des algorithmes (aléatoires/non-convexes) donnent une valeur $\mu_l(\omega)$

▲ Il faut le faire pour toutes les fréquences (ou un quadrillage suffisamment fin)