Cours M2 ISTR & RODECO - Commande linéaire avancée - Commande Robuste

Cours 2 - Modèles linéaires incertains LFT

Modélisation sous forme de boucle

■ Représentations dites “standard” sous la forme d’une boucle :

$$\Delta \star M \quad : \quad \begin{cases} w = \Delta z \\ z = M w \end{cases}$$

● M et Δ sont des opérateurs

▲ Dans ce cours M est en général au choix : une matrice ou un système LTI

▲ Dans ce cours Δ : une matrice, un système LTI, un opérateur non-linéaire, un retard...

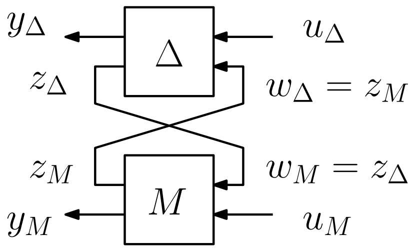
● Exemple : boucle de commande par rétroaction

$$H \star (-K) \quad : \quad \begin{cases} y(s) = H(s)u(s) \\ u(s) = -K(s)y(s) \end{cases}$$

● Exemple : représentation dans l’espace d’état

$$(s^{-1} I_n) \star A \quad : \quad \begin{cases} x = s^{-1}\dot{x} \\ \dot{x} = Ax \end{cases}$$

■ La représentation se généralise au cas où les opérateurs ont d'autres entrées sorties :



$$\begin{pmatrix} y_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix}}_{\Delta} \begin{pmatrix} u_\Delta \\ w_\Delta \end{pmatrix} \; , \quad \begin{pmatrix} z_M \\ y_M \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} w_M \\ u_M \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_\Delta \\ y_M \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_\Delta \\ u_M \end{pmatrix}$$

■ "Star product" - formule générale

$$\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \Delta_{11} + \Delta_{12} M_{11} (I - \Delta_{22} M_{11})^{-1} \Delta_{21} & \Delta_{12} (I - M_{11} \Delta_{22})^{-1} M_{12} \\ M_{21} (I - \Delta_{22} M_{11})^{-1} \Delta_{21} & M_{22} + M_{21} \Delta_{22} (I - M_{11} \Delta_{22})^{-1} M_{12} \end{bmatrix}$$

● Cas particulier où Δ n'a pas d'entrées/sorties autres que pour le bouclage

$$\Delta \star \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = M_{22} + M_{21} \Delta (I - M_{11} \Delta)^{-1} M_{12}$$

● Cas particulier où M n'a pas d'entrées/sorties autres que pour le bouclage

$$\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} \star M = \Delta_{11} + \Delta_{12} M (I - \Delta_{22} M)^{-1} \Delta_{21}$$

- Preuve de $\Delta \star \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12}$

  - Produit $\star$, définition par les signaux entrées/sorties :

$$w = \Delta z \;, \quad \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}$$

  - En posant $w = \Delta z$ dans les équations de M on trouve

$$z = M_{11}\Delta z + M_{12}u \,, \quad y = M_{21}\Delta z + M_{22}u$$

  - De la première équation on tire $(I - M_{11}\Delta)z = M_{12}u$, donc $z = (I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12}u$
  - Ce qui intégré dans la seconde équation donne la formule

- Remarque : On suppose toujours que $I - M_{11}\Delta$ est inversible, condition de **bien posé**

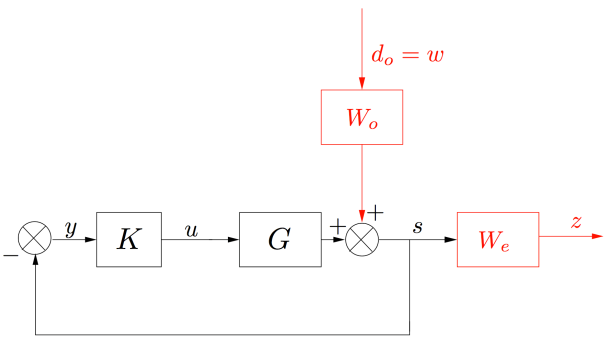
- Exemples

$$(s^{-1}I) \star \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \star (-K) \;=\; H_{11}(s) - H_{12}(s)K(s)(I + H_{22}(s)K(s))^{-1}H_{21}(s)$$

  - Exercice : Construire la LFT vis-à-vis de K du schémas bloc suivant,

en déduire la fonction de transfert entrée/sortie



■ Propriétés du produit $\star$:

$$\Delta \star \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{22} & M_{21} \\ M_{12} & M_{11} \end{bmatrix} \star \Delta$$

$$\Delta_M \star \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} + \Delta_N \star \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_M & 0 \\ 0 & \Delta_N \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{cc|c} M_{11} & 0 & M_{12} \\ 0 & N_{11} & N_{12} \\ \hline M_{21} & N_{21} & M_{22}+N_{22} \end{array}\right]$$

$$\left(\Delta_M \star \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\right)\left(\Delta_N \star \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}\right)$$

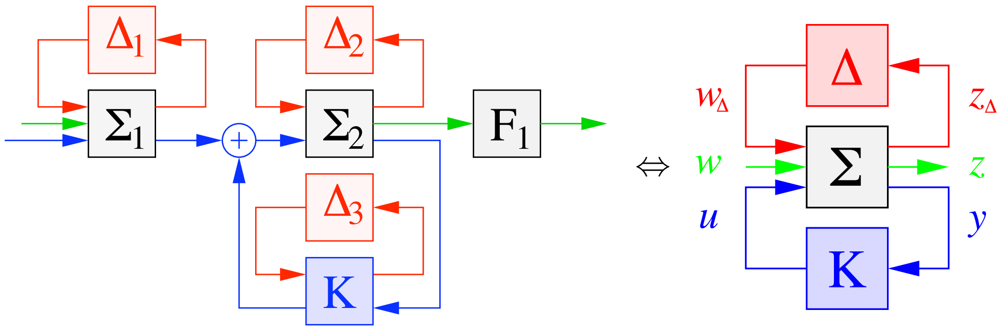
$$= \begin{bmatrix} \Delta_M & 0 \\ 0 & \Delta_N \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{cc|c} M_{11} & M_{12}N_{21} & M_{12}N_{22} \\ 0 & N_{11} & N_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22}N_{21} & M_{22}N_{22} \end{array}\right]$$

$$\left(\Delta \star \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\right)^{-1} = \left(\Delta \star \begin{bmatrix} M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21} & -M_{12}M_{22}^{-1} \\ M_{22}^{-1}M_{21} & M_{22}^{-1} \end{bmatrix}\right)$$

■ Le produit $\star$ permet de représenter des expressions telles que polynômes ou fractions rationnelles sous la forme d'une boucle entre opérations linéaires

LFT : Linear-Fractional Transform, Transformation Linéaire-Fractionnaire

- Exemple 1 : $b(\delta) = 2 + 3\delta \ , \ \delta \in [-1 \ , \ 1]$
- Exemple 2 : $B(\delta) = \begin{bmatrix} 2+3\delta & 0 \end{bmatrix} \ , \ \delta \in [-1 \ , \ 1]$
- Exemple 3 : $a(\delta)^2 \ : \ a(\delta) = 2 + \delta \ , \ \delta \in [-1 \ , \ 1]$
- Exemple 4 : $A(\delta) = \begin{bmatrix} a(\delta)^2 & a(\delta) \end{bmatrix} \ : \ a(\delta) = 2 + \delta \ , \ \delta \in [-1 \ , \ 1]$
- Exemple 5 : $\frac{1}{a(\delta)} \ : \ a(\delta) = 2 + \delta \ , \ \delta \in [-1 \ , \ 1]$
- Exemple 6 : $m\ddot{y} + 2\dot{y} + y = bu \ : \ m \in [\frac{1}{3} \ , \ 1] \ , \ b \in [1 \ , \ 2]$



$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & & \\ & \Delta_2 & \\ & & \Delta_3 \end{bmatrix}$$

- Propriétés des représentations LFT
- Les paramètres peuvent être répétés sur la diagonale
- Exemple $y = \delta(x_1 + \delta x_2)$ donne

$$\begin{pmatrix} y \\ \hline z_{\Delta 1} \\ z_{\Delta 2} \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline w_{\Delta 1} \\ w_{\Delta 2} \end{pmatrix}, \quad w_\Delta = \begin{bmatrix} \delta & \\ & \delta \end{bmatrix} z_\Delta$$

- Les paramètres sont répétés au minimum autant que le degré des polynômes

■ Propriétés des représentations LFT

● Les représentations ne sont pas unique

▲ $y = \frac{\delta}{1+\delta}x \;\Leftrightarrow\; y + \delta y = \delta x$ avec $w_{\Delta 1} = \delta y$, $w_{\Delta 2} = \delta x$ on a

$$\begin{pmatrix} y \\ \hline z_{\Delta 1} \\ z_{\Delta 2} \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{pmatrix} x \\ \hline w_{\Delta 1} \\ w_{\Delta 2} \end{pmatrix} \;,\; w_\Delta = \begin{bmatrix} \delta & \\ & \delta \end{bmatrix} z_\Delta$$

▲ avec $w_\Delta = \delta(x-y)$ on a une forme plus simple

$$\begin{pmatrix} y \\ \hline z_\Delta \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} x \\ \hline w_\Delta \end{pmatrix} \;,\; w_\Delta = \delta z_\Delta$$

● PB : comment trouver <u>une</u> forme minimale ?

■ Systèmes incertains et matrices de transfert

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_\Delta \\ y \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} A & B_\Delta & B_u \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta u} \\ C_y & D_{y\Delta} & D_{yu} \end{bmatrix}}^{\Sigma} \begin{pmatrix} x \\ w_\Delta \\ u \end{pmatrix} \quad , \quad w_\Delta = \Delta z_\Delta$$

● Bouclages avec matrices de transfert

$$\begin{pmatrix} z_\Delta \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\Delta\Delta}(s) & \Sigma_{\Delta u}(s) \\ \Sigma_{y\Delta}(s) & \Sigma_{yu}(s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_\Delta \\ u \end{pmatrix} \quad , \quad w_\Delta = \Delta z_\Delta$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{\Delta\Delta}(s) & \Sigma_{\Delta u}(s) \\ \Sigma_{y\Delta}(s) & \Sigma_{yu}(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta u} \\ D_{y\Delta} & D_{yu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\Delta \\ C_y \end{bmatrix} (s1 - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_\Delta & B_u \end{bmatrix}}_{(s^{-1}1) \overset{x,\dot{x}}{\star} \Sigma}$$

$$y = \left(\Delta \overset{w_\Delta, z_\Delta}{\star} \begin{bmatrix} \Sigma_{\Delta\Delta}(s) & \Sigma_{\Delta u}(s) \\ \Sigma_{y\Delta}(s) & \Sigma_{yu}(s) \end{bmatrix} \right) u = \begin{pmatrix} \Sigma_{yu}(s) \\ +\Sigma_{y\Delta}(s)\Delta(1 - \Sigma_{\Delta\Delta}(s)\Delta)^{-1}\Sigma_{\Delta y}(s) \end{pmatrix} u$$

■ Systèmes incertains et matrices de transfert (suite)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_\Delta \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_\Delta & B_u \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta u} \\ C_y & D_{y\Delta} & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w_\Delta \\ u \end{pmatrix} \quad , \quad w_\Delta = \Delta z_\Delta$$

● Si Δ est composée uniquement d'incertitudes constantes (réelles ou complexes)

$$y = \underbrace{\left(D_{yu} + \begin{bmatrix} C_y & D_{y\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \left(1 - \begin{bmatrix} A & B_\Delta \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_u \\ D_{\Delta u} \end{bmatrix} \right)}_{G(s,\Delta)} u$$

▲ $G(s, \Delta)$: Matrice de transfert dont les coefficients sont rationnels en les incertitudes

▲ Sauf cas particulier, les coefficients sont inter-dépendants