

Cours M2 ISTR & RODECO

Commande linéaire avancée - Commande Robuste

Toulouse



Sept.-Oct. 2019

Dimitri PEAUCELLE - LAAS-CNRS - Université de Toulouse



Renseignements pratiques

- Enseignant : Dimitri Peaucelle, chercheur au LAAS-CNRS
- Contacts : 05 61 33 63 09 - peaucelle@laas.fr
- Page web : homepages.laas.fr/peaucell/teaching.php
- Organisation du cours
- Cours avec support de cours : 12h
 - ▲ 16, 18, 24, 25 septembre et 1, 2 octobre
- TD/TP avec support MATLAB : 8h
 - ▲ 8, 11 octobre
- Examen
 - ▲ 18 octobre

Commande Robuste ?

Prologue

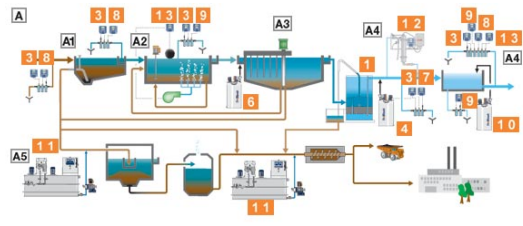
- Commande en boucle fermée (feedback)
- Indispensable pour piloter un système
- Contenue dans tous les systèmes (vivants et ceux conçus par l'homme)
- Conçue sans avoir de représentation exacte de la réalité
- Fonctionne malgré tout car apporte de la robustesse
- Définir et mesurer la robustesse ?
- Mesures exactes ou approchées ?
- Améliorer la robustesse ?

- Robustesse à quoi ?
- Aux modèles décrivant les systèmes
(paramètres méconnus, changements, approximations, impossibilité de tout modéliser...)
- Aux perturbations agissant sur le système
(bruits, conditions initiales, environnement, adversaires...)

■ Systèmes dynamiques, exemples



© AIRBUS S.A.S. - H. Goussé



© ProMinent



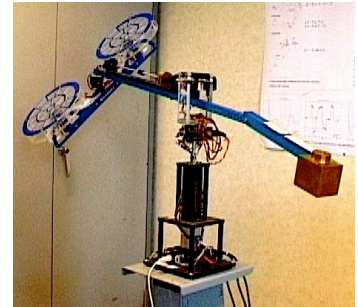
© CNES - ill. D. Ducos



HRP-2 Promet



@ Astrium - Ariane 5



@ Quanser - 3DOF hélico

■ Modélisation pour la commande

- Isoler un comportement dynamique
 - ▲ Découplage par axes - mouvement longitudinal/lateraux d'un avion
 - ▲ Découplage temporel - incidence/remplissage réservoir d'un lanceur
 - ▲ Découplage par modes - rejoindre destination / positionnement précis
 - ▲ Découplage fréquentiel - échantillonnage, dynamiques composants
- Définir trajectoire/position de référence
 - ▲ Termes non-linéaires négligés, simplifiés ou linéarisés
 - ▲ Enoncé de performances à atteindre
 - ▲ Enoncé de contraintes à satisfaire
- Tenir compte de méconnaissances
 - ▲ Tous les phénomènes physiques n'ont pas de description concise
 - ▲ Paramètres varient d'un produit manufacturé à l'autre
 - ▲ Identification de paramètres est toujours entachée d'erreur

- Les modèles obtenus
 - dépendent de paramètres θ
 - ▲ (mode, état d'une dynamique lente, trajectoire de référence...)
 - ▲ connus, choisis ou mesurables (avec une certaine précision)
 - dépendent d'incertitudes δ
 - ▲ (dynamiques négligées, approximations, méconnaissances...)
 - ▲ inconnus mais bornés, à dynamiques nulles, lentes ou bornées
 - sont influencés par des perturbations w
 - ▲ (phénomènes, couplages, fréquences négligées... et trajectoire)
 - ▲ inconnus, avec caractéristiques fréquentielles, temporelles, énergétiques...
 - doivent satisfaire des contraintes sur certaines composantes z
 - ▲ (performances, validité des hypothèses de modélisation...)
 - ▲ caractéristiques fréquentielles, temporelles, énergétiques...
- Modèles compliqués, inévitablement multi-entrées, multi-sorties

■ Modèles non-linéaires dans l'espace d'état

$$\Sigma(\theta, \delta) : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t, w, \theta, \delta) \\ y(t) = g(x, u, t, w, \theta, \delta) \\ z(t) = h(x, u, t, w, \theta, \delta) \end{cases}$$

- Etapes de modélisation permettent simplifications
 - ▲ Découplage temporel $f(x, u, t) \rightarrow f(x, u, \theta)$
 - ▲ Linéarisation $f(x, u, \theta) \rightarrow A(\delta, \theta)x + B(\delta, \theta)u$
avec δ bornée sous contraintes sur certaines composantes z de l'état
 - ▲ ...
- Exemples
 - ▲ $\cos(t)x(t) \rightarrow \theta(t)x(t)$ avec $\theta \in [-1 \ 1]$
 - ▲ $x_1(t)x_2(t) \rightarrow \delta(t)x_2(t)$ avec $\delta \in [-1 \ 1]$ si $z = x_1 \in [-1 \ 1]$

■ Typologie de modèles :

- **Système physique réel** - parfois accessible pour expérimentation
- **Modèle physique idéal** - pour modélisation mathématique
(Agrégat de systèmes élémentaires)
- **Modèle mathématique idéal** - pour simulation sur calculateurs
(Modèle de connaissance obtenu par application des lois de la physique)
- **Modèle mathématique réduit** - pour simulations rapides
(Modèle de comportement obtenu par découplage, linéarisation, réduction...)
- **Modèle réduit incertain** - pour analyse robuste, pessimiste
(Modèle mathématique réduit, simplifié, souvent LTI)
(erreurs contenues dans incertitudes et spécifications de performance)
- **Modèle réduit nominal** - pour la synthèse de lois de commande
(Modèle sans incertitudes avec un seul critère de performance)

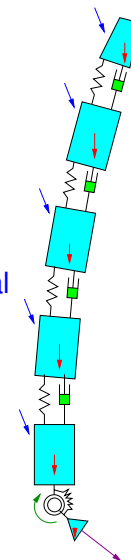
■ Exemple

- **Système physique réel**



@ Astrium - Ariane 5

- **Modèle physique idéal**



- **Modèle mathématique réduit** incidence, 1 axe, sans modes flexibles ...

$$J(t)\ddot{\theta}(t) = m(t)g \sin \theta(t) + LT(t), \quad T = \text{sat}(F(s)u(s)), \quad u(t) = k_p(\theta_r(t) - \theta(t)) - k_d\dot{\theta}(t).$$

- **Modèle réduit LTI incertain en un point de vol** Est-il stable ?

$$\theta = \frac{1}{s^2 - \delta_m s} \cdot \frac{1}{\delta_\tau s + 1} u, \quad u = k_p \theta_r - (k_p + s k_d) \theta$$

- Commande classique : synthèse pour $\theta = \theta_0$ fixé, sans incertitudes $\delta = 0$

$$\Sigma(\theta_0, 0) : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t, w, \theta = \theta_0, \delta = 0) \\ y(t) = g(x, u, t, w, \theta = \theta_0, \delta = 0) \\ z(t) = h(x, u, t, w, \theta = \theta_0, \delta = 0) \end{cases} \quad \Sigma_c : \begin{cases} \dot{\eta}(t) = f_c(\eta, y, t) \\ u(t) = g_c(\eta, y, t) \end{cases}$$

- Commande en boucle fermée est intrinsèquement robuste, mais ...
- ▲ Stabilité préservée en réponse à des perturbations non-modélisées, faibles
- ▲ Comportement inchangé pour petits écarts de θ et δ
- ▲ Performances fortement dégradées pour écarts moyens
- ▲ Risque d'instabilité pour grands écarts

- Système de commande robuste :

*Un système de commande est dit **robuste** s'il conserve ses **propriétés** malgré les **incertitudes** et les **perturbations** affectant le système*

- Tenir compte des écarts lors de la conception : Synthèse robuste
- Valider robustesse d'une loi de commande : Analyse robuste

- Commande robuste - Spécificités

- Systèmes **incertains**
- ▲ Représentations polytopiques et LFT
- ▲ Stabilité et performances garanties pour toutes les incertitudes = robuste
- Principalement dans le cadre de modèles linéaires
- ▲ Outils mathématiques : matrices, transformées de Laplace, normes, etc.
- Peu de résultats analytiques
- ▲ Formules avec contraintes de type inégalités matricielles
- ▲ Résolution par outils d'optimisation convexe
- Méthodologie relativement générique
- ▲ Actuellement répandue au delà du cadre des systèmes linéaires

- 16 septembre, 15h45 : Introduction + Rappels - **cours**
- 18 septembre, 13h30 : Modèles incertains polytopiques et stabilité de Lyapunov - **cours**
- 24 septembre, 07h45 : Modèles incertains polytopiques et résultats LMI - **cours**
- 25 Septembre, 13h30 : Modèles incertains LFT - **cours**
- 2 octobre, 13h30 : Théorème du petit gain - **cours**
- 3 octobre, 13h30 : Introduction à la μ -analyse ou Exercices - **cours**
- 8 octobre, 08h00 : Modèles incertains polytopiques - **salle TP I3**
- 11 octobre, 14h00 : Modèles LFT - **salle TP I3**
- ▲ 18 octobre, 13h30 : Examen sur la totalité du module "commande linéaire avancée"

Références

- [Meg(2011)] Multivariable control systems, 2011. URL <http://web.mit.edu/6.245/www/>.
- [Apkarian(2012)] P. Apkarian. Elements de la théorie de la commande robuste, 2012. URL pierre.apkarian.free.fr/COURS/polysae.pdf.
- [Arzelier()] D. Arzelier. Commande robuste. URL <http://homepages.laas.fr/arzelier/cours.html>.
- [Duc and Font(1999)] G. Duc and S. Font. *Commande H_∞ et μ -analyse : des outils pour la robustesse*. Hermes Science, Paris, 1999.
- [Dullerud and Paganini(2013)] G. Dullerud and F. Paganini. A course in robust control theory - a convex approach. Springer, 2013.
- [Laroche()] E. Laroche. Commande robuste. URL <http://eavr.u-strasbg.fr/~laroche/student/#MIRIV>.
- [McFarlane and K.(1990)] D. McFarlane and G. K. *Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Verlag, 1990.

[Scherer()] C. Scherer. Theory of robust control. URL <http://www.ist.uni-stuttgart.de/education/courses/robust/overview.shtml>.

[Skogestad and Postlethwaite(2005)] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control*. Wiley, 2nd ed. edition, 2005.

[Tits and Fan(1995)] A. Tits and M. Fan. On the small μ theorem. *Automatica*, 31 :1199–1201, 1995.

[Toivoen(1998)] H. Toivoen. Robust control methods, 1998. URL <http://users.abo.fi/htoivone/courses/robust/>.

[Zhou and Doyle(1997)] K. Zhou and J. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, 1997. <http://www.control.lth.se/Education/DoctorateProgram/robust-control/robust-control-2015.html>.

[Zhou et al.(1996)Zhou, Doyle, and Glover] K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover. *Robust and Opimal Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.

Rappels - Vecteurs

■ Vecteurs réels $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

● Nous utiliserons la norme euclidienne $\|x\|^2 = \sum x_i^2 = x^T x$

● ex. $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\|x\|^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 5$

■ Vecteurs complexes $x \in \mathbb{C}^n$

● Nous utiliserons la norme euclidienne $\|x\|^2 = \sum |x_i|^2 = x^* x$

● ex. $x = \begin{pmatrix} 2 + j \\ -1 - j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, $\|x\|^2 = \begin{pmatrix} 2 - j & -1 + j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 + j \\ -1 - j \end{pmatrix} = 7$

>> `x=[2+j;-1-j], norm(x,2), sqrt(x'*x)`

- Matrices réelles $M \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ou complexes $M \in \mathbb{C}^{p \times m}$
- Applications linéaires $u \in \mathbb{C}^m \mapsto y = Mu \in \mathbb{C}^p$
- ▲ Addition \equiv applications en parallèle $y = y_1 + y_2 = M_1u + M_2u$
- ▲ Multiplication \equiv applications en série $y = M_1y_2 = M_1M_2u$

- Nous utiliserons la norme induite $\|M\| = \max_{u \neq 0} \frac{\|y\|}{\|u\|} = \max_{\|u\|=1} \|y\|$

- ▲ Amplification maximale en norme de l'entrée u et norme de la sortie y
- ▲ $\|M\| = \bar{\sigma}(M)$ valeur singulière maximale
- ▲ $\sigma^2(M) = \lambda(M^*M)$ (carré des valeurs singulières de M = valeurs propres de M^*M)

- ▲ $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
- ▼ $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \|u\| = 1 \mapsto y = Mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \|y\| = \sqrt{2}$
- ▼ donc $\|M\| \geq \sqrt{2}$

$$\blacktriangle M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangledown u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \|u\| = 1 \quad \mapsto \quad y = Mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \|y\| = \sqrt{2}$$

$$\blacktriangledown u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \|u\| = 1 \quad \mapsto \quad y = Mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \|y\| = \sqrt{2}$$

$$\blacktriangledown \text{donc } \|M\| \geq \sqrt{2}$$

$$\blacktriangle M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangledown u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \|u\| = 1 \quad \mapsto \quad y = Mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \|y\| = \sqrt{2}$$

$$\blacktriangledown u = \begin{bmatrix} \sqrt{1/2} \\ -\sqrt{1/2} \end{bmatrix}, \|u\| = 1 \quad \mapsto \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \|y\| = 0$$

$$\blacktriangledown \text{donc } \|M\| \geq \sqrt{2}$$

$$\blacktriangle M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangledown u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \|u\| = 1 \quad \mapsto \quad y = Mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \|y\| = \sqrt{2}$$

$$\blacktriangledown u = \begin{bmatrix} \sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/2} \end{bmatrix}, \|u\| = 1 \quad \mapsto \quad y = 2 \begin{bmatrix} \sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/2} \end{bmatrix}, \|y\| = 2$$

$$\blacktriangledown \text{donc } \|M\| \geq 2$$

$$\blacktriangledown M^*M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = V^* \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V, \text{ avec } V = \begin{bmatrix} \sqrt{1/2} & \sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangledown \lambda(M^*M) = \{4, 0\}, \|M\| = \sqrt{4} = 2$$

$$\blacktriangle M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangledown M^*M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = V^* \begin{bmatrix} 0.3820 & 0 \\ 0 & 2.6180 \end{bmatrix} V, \quad V = \begin{bmatrix} -0.8507 & 0.5257 \\ 0.5257 & 0.8507 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangledown \|M\| = \sqrt{2.6180} = 1.6180$$

>> M=[1 1;0 1], norm(M,2), [V,D] = eig(M'*M)

$$\blacktriangle M = \begin{bmatrix} -2j & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangledown \|M\| = 2$$

$$\blacktriangle M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangledown \|M\| = \max\{\|M_1\|, \|M_2\|\}$$

Rappels - Signaux

■ Signaux à temps continu $x : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto x(t) \in \mathbb{C}^n$

● Norme $L_2 : \|x\|^2 = \int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt = \int_0^\infty x^*(t)x(t) dt$

● Signaux bornés dans $L_2 : \exists \alpha \|x\| \leq \alpha$

■ Signaux à temps discret $x : k \in \mathbb{N} \mapsto x_k \in \mathbb{C}^n$

● Norme $L_2 : \|x\|^2 = \sum_0^\infty \|x_k\|^2 dt = \sum_0^\infty x_k^* x_k dt$

- Signaux à temps continu $x : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto x(t) \in \mathbb{C}^n$
- Transformée de Laplace $X : s \in \mathbb{C} \mapsto X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st} dt$
- Norme : $\|X\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \|X(j\omega)\|^2 d\omega$
- Signaux bornés dans L_2 : $X(s)$ existe pour tout $s \in \overline{\mathbb{C}}_+$
- Parseval : $\|x\|^2 = \|X\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \|X(j\omega)\|^2 d\omega$

Rappels - Systèmes linéaires invariants dans le temps

- Représentations d'état : $H \sim \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$
- Etat $x(t) \in \mathbb{R}^n$, entrées $u(t) \in \mathbb{R}^m$, sorties $y(t) \in \mathbb{R}^p$
- Stabilité interne : $\lambda(A) \in \mathbb{C}_-$
- ▲ Stabilité interne : $sI - A$ inversible pour tout $s \in \overline{\mathbb{C}}_+$
- Norme induite L_2 : $\|H\|_\infty = \sup_{u \neq 0} \frac{\|y\|}{\|u\|}$
- ▲ Norme finie si le système est stable (equiv. si (A, B) commandable et (A, C) observable)

■ Représentations d'état : $H \sim \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$

■ Matrice de transfert : $Y(s) = H(s)U(s)$

● $H(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$

● Norme induite : $\|H\|_{\infty} = \sup_{U \neq 0} \frac{\|Y\|}{\|U\|} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(H(j\omega))$

▲ Systèmes SISO $\|H\|_{\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(H(j\omega)) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |H(j\omega)|$: max diagramme de Bode

● Théorème de Parseval $\|H\|_{\infty} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|y\|}{\|u\|} = \sup_{U \neq 0} \frac{\|Y\|}{\|U\|}$

▲ $H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ avec $\omega_n = 10, \zeta = 0.1$

>> `H=tf(1,[1 2*0.1*10 10^2]), bode(H), norm(H,Inf)`

$$\blacktriangle H \sim \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x - 0.1u \end{cases}$$

>> H=ss, H.a=[-1 1;-2 -1], H.b=[0;1], H.c=[1 0], H.d=-0.1

>> tf(H), bode(H), norm(H,Inf)

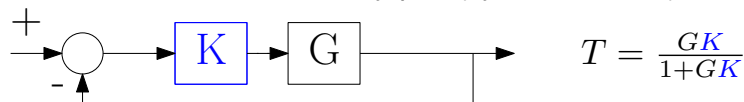
$$\blacktriangle H \sim \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1.5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -20 & -2 \end{bmatrix} x + u \\ y = x \end{cases}$$

$$\blacktriangle H \sim \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1.5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -20 & -2 \end{bmatrix} x + u \\ y = x \end{cases}$$

```
>> H=ss, H.a=[-1 1 0 0;-1.5 -1 0 0;0 0 -2 2;0 0 -20 -2]
>> H.b=eye(4), H.c=eye(4)
>> tf(H), bode(H), sigma(H), norm(H,Inf)
```

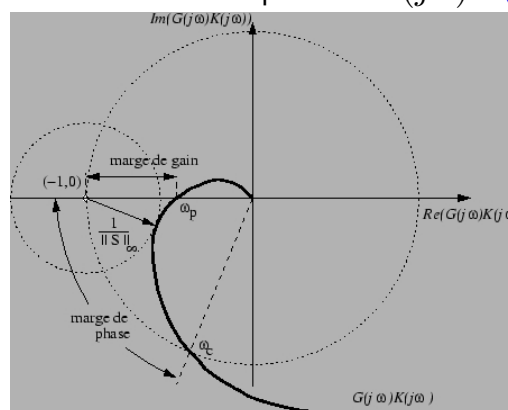
Robustesse et marges

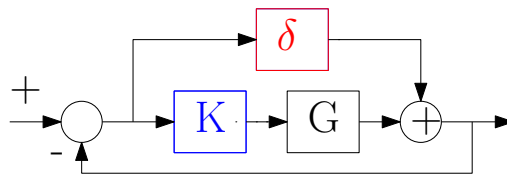
■ Stabilité robuste - Sur la base du critère de Nyquist (systèmes SISO)



● Plus le lieu de Nyquist de $G(j\omega)K(j\omega)$ est distant du point -1
plus on peut attendre de robustesse

- ▲ Marge de gain : de combien augmenter le gain de $G(j\omega)K(j\omega)$ sans couper -1
- ▲ Marge de phase : de combien augmenter la phase de $G(j\omega)K(j\omega)$ sans couper -1
- ▲ Marge de module : rayon maximal du cercle autour de -1 qui ne coupe pas $G(j\omega)K(j\omega)$
- ▲ Marge de module : rayon des cercles en tout point de $G(j\omega)K(j\omega)$ qui ne coupent pas -1 .





■ Interprétation des “marges” : soit δ une incertitude

▲ Marge de gain : stabilité pour tout $\delta = \hat{\delta}GK$, $\hat{\delta} \in [0, K_g] \subset \mathbb{R}$

▲ Marge de phase : stabilité pour tout $\delta = (e^{j\phi} - 1)GK$, $\phi \in [0, m_\phi]$

▲ Marge de module : stabilité pour tout $\delta \in \mathbb{C} : |\delta| \leq K_M$

▲ Donnée par $\|1 + GK\|_\infty$ (théorème du petit gain)

■ Méthodes pour d'autres fonctions $H(\delta, s)$?

● Exemple analyse de la stabilité de $\ddot{y} + (1 + \delta_1)\dot{y} + (2 + \delta_2)y = u$ en fonction de δ_i

● Exemple de synthèse de $u = ky$ pour le même système et $|\delta_i| \leq \bar{\delta}$

● Exemple analyse de la stabilité de $y^{(3)} + (1 + \delta_1)y^{(2)} + (1 + \delta_2)y^{(1)} + (1 + \delta_1\delta_2)y^{(0)} = u$

- Exemple avec $\dot{x} = A(\delta)x$, $\delta \in [0, 1]$ et

$$A(\delta) = \delta \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} + (1 - \delta) \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- ▲ Combinaison linéaire convexe de deux sommets stables

$$A^{[1]} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{[2]} = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda(A^{[i]}) = -1.0000 \pm 3.1623j$$

- Exemple avec $\dot{x} = A(\delta)x$, $\delta \in [0, 1]$ et

$$A(\delta) = \delta \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} + (1 - \delta) \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- ▲ Combinaison linéaire convexe de deux sommets stables

$$A^{[1]} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{[2]} = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda(A^{[i]}) = -1.0000 \pm 3.1623j$$

- ▲ Analyse du centre $A(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}A^{[1]} + \frac{1}{2}A^{[2]} = \begin{bmatrix} -1 & 4.5 \\ 4.5 & -1 \end{bmatrix}$

$$\lambda(A(\frac{1}{2})) = -5.5, +3.5$$

Au moins un des pôles est à partie réelles positive = instable.

- ▲ En réalité stable pour $\delta < 0.1011$ ou $\delta > 0.8989$

- Exemple avec $H(\delta, s) = \frac{1}{D(\delta, s)}$ avec

$$D(\delta, s) = s^4 + 10s^3 + 10(10 - \delta_1^2)s^2 + (10 - \delta_2^2)s + 10(1 - \delta_1^3 + 5\delta_2^2)$$

- ▲ Critère Routh : stable ssi

$$100(10 - \delta_1^2) > 10 - \delta_2^2 > 0, \quad \delta_1^3 - 5\delta_2 - 1 < 0, \\ 100\delta_1^2\delta_2^2 - \delta_2^4 + 1000\delta_1^3 - 1000\delta_1 - 5980\delta_2^2 > 0$$

- ▲ Inégalités satisfaites pour

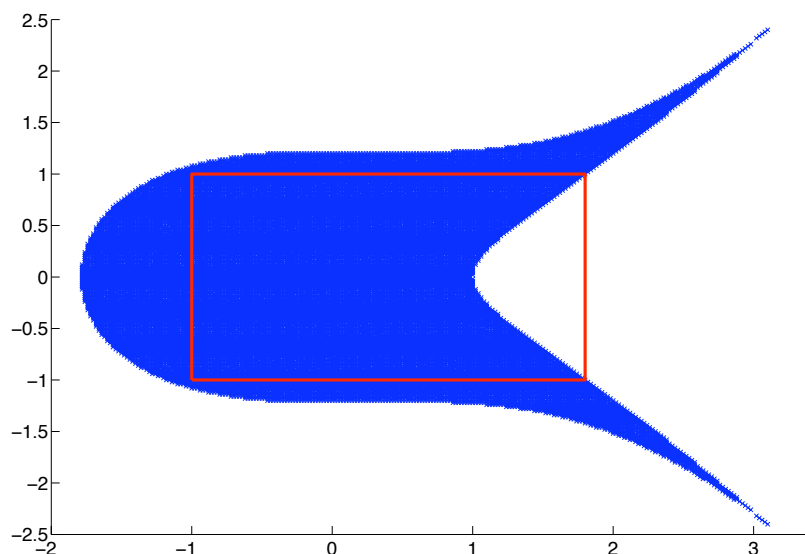
$$(\delta_1, \delta_2) = (-1, 1), (-1, -1), (1.8, -1), (1.8, 1)$$

- ▲ Mais pas satisfaites pour $(\delta_1, \delta_2) = (1.8, 0), (1, 0)$

- Exemple avec $H(\delta, s) = \frac{1}{D(\delta, s)}$ avec

$$D(\delta, s) = s^4 + 10s^3 + 10(10 - \delta_1^2)s^2 + (10 - \delta_2^2)s + 10(1 - \delta_1^3 + 5\delta_2^2)$$

- ▲ Valeurs stabilisantes de (δ_1, δ_2)



- ▲ Il ne suffit pas de tester la stabilité des valeurs extrêmes !

- Théorème de Kharitonov , $\underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i$ indépendants les uns des autres

$$D(\delta, s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n$$

le polynôme est stable ssi les quatre polynômes suivants sont stables

$$\underline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \underline{a}_4 s^4 + \dots$$

$$\underline{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \underline{a}_4 s^4 + \dots$$

$$\bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \bar{a}_4 s^4 + \dots$$

$$\bar{a}_0 + \underline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \bar{a}_4 s^4 + \dots$$

▲ Exemple $y^{(3)} + (1 + \delta_1)y^{(2)} + (1 + \delta_2)y^{(1)} + (1 + \delta_1\delta_2)y^{(0)} = u$

▲ $\delta_1 \in [0.1 \ 1]$, $\delta_2 \in [0.1 \ 1]$

- ▲ Exemple $s^4 + 10s^3 + [100 \ 91.9]s^2 + [10 \ 9]s + [2.71 \ 67.29]$
 (i.e. $|\delta_1| \leq 0.9$ et $|\delta_2| \leq 1$ dans ex précédent)

$$\text{racines}(2.71 + 9s + 100s^2 + 10s^3 + s^4) = \begin{pmatrix} -4.96 \pm j8.63 \\ -0.044 \pm j0.16 \end{pmatrix}$$

$$\text{racines}(2.71 + 10s + 100s^2 + 10s^3 + s^4) = \begin{pmatrix} -4.95 \pm j8.63 \\ -0.049 \pm j0.16 \end{pmatrix}$$

$$\text{racines}(67.29 + 10s + 91.9s^2 + 10s^3 + s^4) = \begin{pmatrix} -4.98 \pm j8.12 \\ -0.014 \pm j0.86 \end{pmatrix}$$

$$\text{racines}(67.29 + 9s + 91.9s^2 + 10s^3 + s^4) = \begin{pmatrix} -4.99 \pm j8.13 \\ -0.009 \pm j0.86 \end{pmatrix}$$

- ▲ Kharitonov permet de prouver stabilité robuste pour $-0.9 \leq \delta_1 \leq 0.9, |\delta_2| \leq 1$
 ▲ ... mais ne permet pas de prouver stabilité robuste pour $-1 \leq \delta_1 \leq 0.9, |\delta_2| \leq 1$
 ■ Autres méthodes ?

Introduction

- Commande robuste - Cadre général
- Automatique / Théorie de la commande
 - Commande de systèmes dynamiques
 - ▲ Représentés par des équations différentielles (systèmes à temps continu)
 - ▲ ou par des équations récurrentes (systèmes à temps discret)
 - Modèles non-linéaires dans l'espace d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t) \\ y(t) = g(x, u, t) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_{k+1} = f(x, u, k) \\ y_k = g(x, u, k) \end{cases}$$

- ▲ x : état du système
- ▲ u : commandes du système (actionneurs)
- ▲ y : mesures du système (capteurs)
- Modèles linéaires dans l'espace d'état **et** matrices de transfert (MIMO)

$$\Sigma(s) \sim \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \Sigma(z) \sim \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases}$$