INSA de Toulouse, spécialité AEI 4ème année

Examen de Commande Numérique des Procédés

Documents et calculatrice autorisés.
Sujet volontairement long (3 problèmes) pour couvrir plusieurs aspects du cours (barème ≥ 20).
Quasiment toutes les questions peuvent être traitées séparément les unes des autres.
On trouve une annexe avec quelques résultats numériques utiles.

4 Janvier 2005

Premier problème

Soit le système mécanique donné par l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\ddot{x}(t) + x(t) = u(t)$$

où $u(t)$ est une force qui commande le système. On dispose pour ce système d'un capteur de position $y(t) = x(t)$.

1 - Donner une représentation d'état du système en faisant le choix de

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

comme vecteur d'état.

2 - On souhaite commander le système à l'aide d'un calculateur. Donner la représentation d'état du système échantillonné (convertisseur numérique-analogique modélisé par un bloqueur d'ordre zéro) à la période T.

3 - Choisir une période d'échantillonnage parmi les trois suivantes :

$$T_1 = \pi/4\ s \quad , \quad T_2 = \pi/2\ s \quad , \quad T_3 = \pi\ s$$

et garder cette valeur pour la suite de la première partie.

Donner la fonction de transfert du système échantillonné. Le système est-il stable ?

4 - On envisage une commande proportionnelle en boucle fermée de la forme

$$u_k = k_p(y_{ck} - y_k)$$

où y_{ck} est un signal de consigne. Caractériser les valeurs de k_p pour lesquelles le système en boucle fermée est stable.

5 - On prend $k_p = -1$, en considérant que les conditions initiales sont nulles, calculer les quatre premiers échantillons de la réponse impultionnelle de la boucle fermée.

Second problème

Soit le système

$$G(p) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X \end{array} \right.$$

On place un second système en série tel que

$$Q(p) = \frac{1}{p} Y(p)$$

6 - Montrer que le système obtenu admet la représentation d'état suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} X_a + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X_a \end{array} \right.$$

7 - Calculer un correcteur par retour d'état

$$u = -KX_a$$

qui place les pôles en -1, -2 et -3.

8 - En adoptant la notation suivante

$$K = \left[\begin{array}{ccc} k_q & k_1 & k_2 \end{array} \right]$$

pour le gain de retour d'état, choisir parmi les trois schémas des figures 1, 2 et 3, lequel permet une régulation du système $G(p)$ qui assure des pôles en boucle fermée égaux à -1, -2 et -3 ainsi qu'une précision entrée-sortie pour des signaux de consigne indiciels ($y_c =$ cst.).

Figure 1:

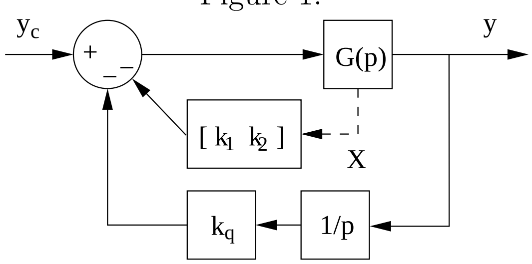


Figure 2:

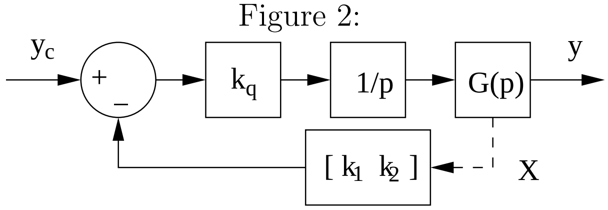
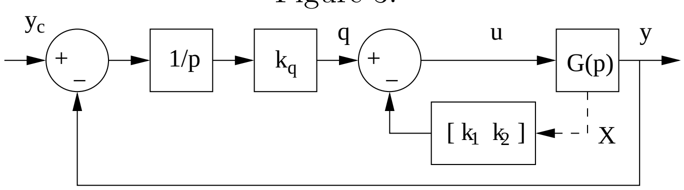


Figure 3:



9 - On souhaite réaliser la régulation du schéma de la figure 3 à l'aide de calculateurs numériques :

$$U(z) = F(z)(Y_c(z) - Y(z)) - \left[\begin{array}{cc} k_1 & k_2 \end{array} \right] X(z)$$

où $X(z)$ et $Y(z)$ sont respectivement l'état et la sortie du système $G(p)$ échantillonné à la cadence $T = \pi/4s$ (convertisseur numérique-analogique modélisé par un bloqueur d'ordre zéro).

Par un choix de méthode de discrétisation, donner une fonction de transfert $F(z)$ qui permet l'approximation numérique de la loi de commande de la figure 3.

10 - Donner une représentation d'état pour la fonction de transfert $Q(z) = F(z)(Y_c(z) - Y(z))$ sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{k+1} = A_q v_k + B_q(y_{ck} - y_k) \\ q_k = C_q v_k + D_q(y_{ck} - y_k) \end{array} \right.$$

11 - La représentation d'état du système $G(p)$ échantillonné est telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{k+1} = AX_k + Bu_k \\ y_k = CX_k \end{array} \right.$$

avec

$$A = \left[\begin{array}{cc} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{array} \right] \quad B = \left[\begin{array}{c} 1 - \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{array} \right]$$

$$C = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right]$$

Le vecteur d'état X_k n'étant pas mesuré, proposer un observateur dynamique pour ce système avec des dynamiques les plus rapides possibles.

On note H la matrice de gain de l'observateur.

12 - On note $\hat{K} = \left[\begin{array}{cc} k_1 & k_2 \end{array} \right]$.

Donner en fonction des matrices A, B, C, H, k_q, $\hat{K}$, A_q, B_q, C_q et D_q une représentation d'état littérale du correcteur numérique qui calcule u_k en fonction de y_{ck} et y_k, obtenu à l'issue des différentes étapes (questions 6 à 11).

Troisième problème

Soit le système

$$G(p) = \frac{1}{p^2+1}$$

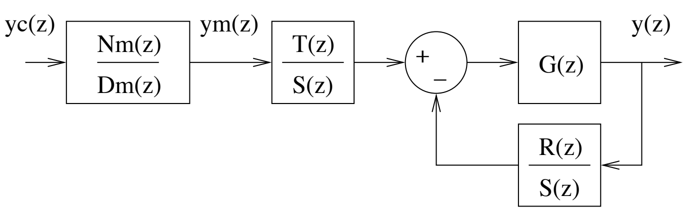
13 - Calculer la fonction de transfert de ce système échantillonné à la période T (convertisseur numérique-analogique modélisé par un bloqueur d'ordre zéro).

Et choisir en première approximation pour $T = 1s$ la fonction de transfert suivante :

$$\frac{0.5z+0.5}{z^2-1.1z+1}$$

14 - On souhaite calculer un correcteur sous forme R.S.T. comme indiqué sur la figure 4 qui assure les spécifications suivantes :
- Rejet de perturbations du type échelon en entrée du système.
- Dynamique de régulation de constante de temps $\tau_r = 1/ln(2)\ s$
- Dynamique de poursuite de constante de temps $\tau_p = 10s$ légèrement oscillante avec un amortissement $\zeta_p = 0.7$.

Figure 4:



Déterminer les degrés minimaux pour les polynômes $R(z)$, $S(z)$ pour assurer les spécifications.

15 - Calculer les polynômes $R(z)$ et $S(z)$ qui assurent les spécifications en régulation.

16 - Choisir un polynôme $T(z)$ ainsi qu'un pré-filtre $\frac{N_m(z)}{D_m(z)}$ pour assurer les spécifications en poursuite.

ANNEXE

$$\exp\begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z-a & -b \\ b & z-a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z^2-2az+a^2+b^2}\begin{bmatrix} z-a & b \\ -b & z-a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 2.1 & -1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ -2.1 & 2.1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & -2.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.76 \\ 1. \\ 1.52 \\ -2.7 \\ 1.68 \end{pmatrix}$$