# INSA de Toulouse, spécialité AEI 4ème année

## Corrigé de l'examen d'Automatique - Commande Numérique des Procédés

Mercredi 12 Décembre 2001

### Exercice 1.

#### 1.a. Stabilité du système.

Un système échantillonné est stable si et seulement si le système continu avant échantillonnage est stable. De plus les pôles du système continu $p_i$ deviennent après échantillonnage $z_i = e^{p_i T}$ où $T$ est la période d'échantillonnage. Ici le système continu obtenu par le bouclage proportionnel $k_2$ et la précommande proportionnelle $k_1$ s'écrit:

$$\frac{y(p)}{u(p)} = \frac{k_1}{p+1+k_2}$$

Il est stable si est seulement si son pôle $p_1 = -1-k_2$ est à partie réelle négative:

$$\boxed{k_2 > -1}$$

#### 1.b. Choix de $T$ et $k_1$.

Pour le choix de $k2 = 10\cdot\ln(2)-1$, le pôle du système continu est $p_1 \simeq -7$. Ceci correspond à une constante de temps $\tau_1 = -1/Re(p_1) \simeq 0.14s$. D'après la règle de Shannon la période d'échantillonnage doit être approximativement telle que:

$$\tau/4 < T < \tau$$

On choisi donc de prendre $\boxed{T = T_2 = 0.1s}$.

Maintenant pour calculer $k_1$ qui assure un gain statique unitaire au système discret, on commence par calculer sa fonction de transfert discrète:

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[Bo(p)\frac{k_1}{p+10\cdot\ln(2)}\right] \\ &= k_1\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{1}{p(p+10\cdot\ln(2))}\right] \\ &= \frac{k_1}{10\cdot\ln(2)}\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{p+10\cdot\ln(2)}\right] \\ &= \frac{k_1}{10\cdot\ln(2)}\frac{z-1}{z}\left[\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-0.5}\right] \end{aligned}$$

La dernière équation est obtenue à l'aide des tables de conversion et le coefficient 0.5 correspond à l'exponentiel de:

$$\exp(-T\cdot 10\cdot\ln(2)) = \exp(-\ln(2)) = \exp(\ln(1/2)) = 1/2$$

Le système échantillonné a donc comme fonction de transfert:

$$G(z) = \frac{k_1}{10\cdot\ln(2)}\,\frac{0.5}{z-0.5}$$

Le gain statique s'obtient en faisant tendre le paramètre $z$ vers 1:

$$G(1) = \frac{k_1}{10\cdot\ln(2)}\,\frac{0.5}{1-0.5} = \frac{k_1}{10\cdot\ln(2)}$$

Pour garantir que ce système ait un gain unitaire on prend donc:

$$\boxed{k_1 = 10\cdot\ln(2)}$$

#### 1.c. Temps de réponse du système.

Le temps de réponse du système est donné par la constante $\tau_1$ déjà calculée précédemment: $\boxed{\tau_1 \simeq 0.14s}$. Le système continu converge à 95% de l'équilibre en $3\tau_1$. C'est approximativement ce qu'on peut attendre du système échantillonné, à la période d'échantionnage près ($T = 0.1s$). Donc on peut attendre que le système discret converge à moins de 95% de la réponse finale en $\boxed{0.5s}$, c'est à dire en cinq périodes d'échantillonnage.

#### 1.d. Calcul des cinq premier échantillons.

Etant donnés les choix précédents, la fonction de transfert du système est $G(z) = \frac{0.5}{z-0.5}$. Ceci correspond à une équation récurrente telle que:

$$y_{k+1} = \frac{1}{2}(y_k + u_k)$$

Donc les premiers échantillons sont:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_2 &= 0.5 \\ y_3 &= 0.75 \\ y_4 &= 0.875 \\ y_5 &= 0.9375 \\ y_6 &= 0.9688 \end{aligned}}$$

Le système met 5 échantillons pour aller de 0 à une valeur qui dépasse les 95% de la valeur finale.

### Exercice 2.

#### 2.a. Choix des pôles de la boucle fermée.

Etant donnés la pulsation propre et l'amortissement, les pôles dominants doivent être choisis tels que:

$$z_i = e^{p_i T} \;\text{ avec }\; p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

En rappelant que l'exponentiel d'un nombre complexe s'écrit au travers des formules d'Euler:

$$e^{R+jI} = e^R(\cos(I) + j\sin(I))$$

on trouve comme pôles dominants dans le cas d'un échantillonnage $T = 0.1s$:

$$\boxed{z_{1,2} = 0.2 \pm j0.2}$$

et dans le cas $T = 1s$:

$$z_{1,2} = 0.8786 \pm j0.0691$$

Pour le système $H_1$ il n'est pas nécessaire d'ajouter de pôles auxiliaires car le système corrigé par retour d'état reste d'ordre 2. Par contre pour le système $H_2$ qui est d'ordre trois il faut ajouter un pôle très rapide. Par exemple un pôle nul:

$$\boxed{z_{1,2} = 0.8786 \pm j0.0691 \qquad z_3 = 0}$$

**2.b. Calcul de la commande par retour d'état.**

Pour le système $H_1$ on commence par tester la commandabilité:

$$\text{rang}\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 2$$

Le système est commandable. On calcule le polynôme caractéristique de la boucle ouverte:

$$\det(pI - A) = p^2 + a_1 p + a_o = p^2 - p$$

On calcule la matrice de passage à la forme compagne de commande:

$$M = \begin{bmatrix} (A + a_1 I)B & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

ainsi que son inverse:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique que l'on souhaite imposer s'écrit:

$$(z - 0.2 - j0.2)(z - 0.2 + j0.2) = z^2 - 0.4z + 0.08 = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2$$

Donc dans la base compagne de commande le retour d'état s'écrit:

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} \alpha_0 - a_0 & \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.08 & 0.6 \end{bmatrix}$$

et dans la base de départ on trouve:

$$\boxed{L = \hat{L} M^{-1} = \begin{bmatrix} 1.2 & 1.36 \end{bmatrix}}$$

Maintenant on s'intéresse au système $H_2$, et pour commencer à sa commandabilité:

$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice n'est pas de rang plein car la deuxième colonne est égale à la somme des deux autres. Le système n'est $\boxed{\text{pas commandable}}$, il n'existe pas de retour d'état qui permette de placer ses pôles comme désiré.

## Exercice 3.

**3.a. Discrétisation du correcteur continu.**

Les trois discrétisations classiques vues dans le cours peuvent s'appliquer ici:

- Discrétisation avant $p \simeq \frac{z-1}{T}$:

$$\boxed{R_{d1}(z) = 2(1 + \frac{0.1}{0.1(z-1)}) = \frac{2z}{z-1}}$$

- Discrétisation arrière $p \simeq \frac{z-1}{zT}$:

$$\boxed{R_{d2}(z) = 2(1 + \frac{0.1z}{0.1(z-1)}) = \frac{4z-2}{z-1}}$$

- Discrétisation Tutsin $p \simeq \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$:

$$\boxed{R_{d3}(z) = 2(1 + \frac{0.1(z+1)}{2 \cdot 0.1(z-1)}) = \frac{3z-1}{z-1}}$$

**3.b. Evaluation des trois correcteurs.**

Le système $\frac{y(p)}{u(p)}$ échantillonné à la période $T = 0.1s$ avec un bloqueur d'ordre zéro s'écrit comme obtenu à la question **1.b.**:

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{1}{2z-1}$$

Les trois boucles fermées obtenues avec les trois régulateurs discrétisés sont de la forme:

$$F(z) = \frac{R_d(z)G(z)}{1 + R_d(z)G(z)}$$

Ce qui donne dans les trois cas:

- Discrétisation avant: $F_1(z) = \frac{2z}{2z^2-z+1}$
- Discrétisation arrière: $F_2(z) = \frac{4z-2}{2z^2+z-1} = \frac{2}{z+1}$
- Discrétisation Tutsin: $F_3(z) = \frac{3z-1}{2z^2}$

On remarque que pour tout ces systèmes le gain statique est unitaire:

$$F(1) = 1$$

Ceci était attendu du fait que le correcteur est composé d'un intégrateur.

En vue de connaître les temps de réponse on calcule la partie réelle des pôles de chaque système bouclé.

- Discrétisation avant: $0.2500 \pm j0.6614$.
- Discrétisation arrière: $-1$ et $0.5$.
- Discrétisation Tutsin: $0$ et $0$.

Tous les systèmes bouclés sont stables. Les approximations mêmes grossières du régulateur continu concervent la stabilité.

Cependant, on peut noter que le système obtenu par la discrétisation arrière n'est pas assymptotiquement stable. L'un de ses modes a comme pôle $-1$ ce qui conduit à un terme de la forme $(-1)^k$ dans la réponse du système. De plus, sachant que le second pôle $0.5$ est stable et se trouve compensé par un zéro, la réponse du système dépendera uniquement de l'entrée et du terme $(-1)^k$.

Concernant le système obtenu suite à la discrétisation avant, sa réponse est oscillante convergente.

Pour ce qui est du régulateur obtenu par l'approximation de Tutsin, il permet de placer les pôles du système bouclé à zéro. Le système aura donc une réponse "pile" en deux échantillons. La $\boxed{\text{discrétisation de Tutsin}}$ donne le système bouclé le plus rapide.

## Exercice 4.

### 4.a. Contraintes minimales sur la régulation.

Le système discret est de la forme $\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$ avec:

$$\deg(A) = 1 \qquad \deg(B) = 0$$

On souhaite imposer une dynamique de régulation du second ordre oscillante soit:

$$\deg(P_{dom}) = 2$$

De plus, on souhaite que la boucle de régulation rejette les perturbations du type échelon, donc:

$$\begin{array}{c} S(z) = S_1(z)(z-1) \qquad R(z) = R_1(z) \\ \Rightarrow \quad \deg(\tilde{A}) = \deg((z-1)A(z)) = 2 \end{array}$$

En reprenant les notation employées dans le cours cela conduit à un choix minimal des degrés respectifs de $S_1$ et $R_1$ tels que:

$$\begin{array}{l} \deg(R_1) = \deg(\tilde{A}) - 1 = 1 \\ \deg(S_1) = \max\left\{ \begin{array}{l} \deg(R) - \deg(z-1) \\ \deg(P_{dom}) - \deg(\tilde{A}) \end{array} \right\} = 0 \end{array}$$

On en déduit donc que le régulateur de degré minimal est de la forme suivante:

$$\boxed{\frac{R(z)}{S(z)} = \frac{r_o + r_1 z}{s_o(z-1)}}$$

C'est un système du premier ordre.

### 4.b. Représentation du système régulé dans l'espace d'état.

Le régulateur comme le système sont du premier ordre. Le système régulé est donc nécessairement du second ordre, il est composé de deux états. Ces états sont choisis pour représenter d'une part, l'état unique du système et d'autre part, l'état unique du régulateur. En appliquant la transformée en $\mathcal{Z}$ inverse aux équations définissant $x_1$ et $x_2$ on trouve:

$$x_{1_{k+1}} = \tfrac{1}{2} x_{1_k} + \tfrac{1}{2} u_k$$
$$x_{2_{k+1}} = x_{2_k} + y_k$$

De plus, en reprenant les fonctions de transfert du système et du régulateur on a:

$$y(z) = \tfrac{1}{2z-1} u(z) = x_1(z)$$
$$u(z) = e(z) - \tfrac{r_o + r_1 z}{s_o(z-1)} y(z) = e(z) - \tfrac{r_o}{s_o} x_2(z) - \tfrac{r_1}{s_o} z x_2(z)$$

C'est à dire en appliquant la transformée en $\mathcal{Z}$ inverse:

$$y_k = x_{1_k}$$
$$u_k = e_k - \tfrac{r_o}{s_o} x_{2_k} - \tfrac{r_1}{s_o} x_{2_{k+1}} = e_k - \tfrac{r_o + r_1}{s_o} x_{2_k} - \tfrac{r_1}{s_o} y_k$$

En remplaçant $u_k$ et $y_k$ par leur expression en fonction des états et de l'entrée unique $e_k$ dans les équation récurrentes on aboutit donc à la représentation d'état proposée dans l'énoncé avec:

$$\boxed{\alpha = 1 - \tfrac{r_1}{s_o} \qquad \beta = -\tfrac{r_o + r_1}{s_o}}$$

Remarque: Les coefficients $\alpha$ et $\beta$ peuvent être vus comme des paramètres d'un retour d'état $L$ tel que:

$$u_k = e_k - L x_k = e_k - \left[\begin{array}{cc} -\alpha & -\beta \end{array}\right] x_k$$

appliqué au système suivant:

$$x_{k+1} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right] x_k + \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 0 \end{array}\right] u_k$$

Ce problème a déjà été abordé dans l'**exercice 2**.

### 4.c. Stabilité de la boucle de régulation.

Pour tester la stabilité de la boucle de régulation on s'intéresse aux pôles, c'est à dire aux valeurs propres de la matrice dynamique. Son polynôme caractéristique s'écrit:

$$\det(zI - A) = z^2 + (-\frac{1}{2}\alpha - 1)z + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$$

En appliquant le critère de Jury, les racines de ce polynôme sont de module inférieur à un (i.e. les pôles du système à temps discret sont stables) si et seulement si:

$$\begin{array}{rcll} (\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta) + (-\frac{1}{2}\alpha - 1) + 1 & = & -\frac{1}{2}\beta & > 0 \\ (\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta) - (-\frac{1}{2}\alpha - 1) + 1 & = & -\frac{1}{2}\beta + \alpha + 2 & > 0 \\ 1 - (\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta) & = & 1 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\alpha & > 0 \end{array}$$

Les paramètres $\alpha$ et $\beta$ appartiennent donc au triangle donné par les trois sommets $(2,0)$, $(-2,0)$ et $(-6,-8)$ représenté sur la $\boxed{\text{figure 1}}$.

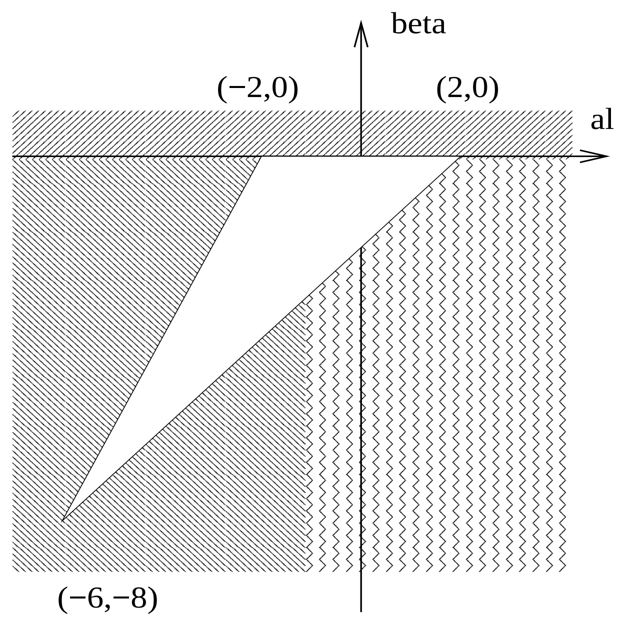


Figure 1: Domaine stabilisant

### 4.d. Choix des paramètres du correcteur global.

Pour choisir parmi les trois choix proposés, commençons par procéder par élimination des choix non cohérents avec les spécifications. Ensuite nous détaillerons ce qui fait du choix restant un choix valable.

Suite à la question **4.c.** le choix (c) est éliminé d'emblée car $\beta = 2 > 0$ rend la boucle de régulation instable.

Ensuite, pour que la représentation d'état proposée pour la pré-commande corresponde effectivement au schéma du correcteur R.S.T. il est nécessaire que cette pré-commande ait un pôle égal à la racine du polynôme $S(z)$. Donc la pré-commande doit avoir un pôle égal à $+1$. Cette spécification élimine d'emblée le choix (a). En effet, ce choix conduit à une pré-commande dont les pôles sont les racines de:

$$z^2 + 1.5z - 1 = (z+2)(z-0.5)$$

Non seulement il n'y a pas de pôle égal à 1 mais l'un des deux pôles est instable ($-2$ est de module supérieur à 1).

A ce stade il est établi que $\alpha = -1.2$, $\beta = -1.36$, $\gamma_0 = 0.7$ et $\gamma_1 = -1.7$. Le seul choix possible est $\boxed{\text{(b)}}$.

Sous ces conditions, la boucle de régulation a un mode oscillant caractérisé par les pôles complexes racines du polynôme suivant (cf. **exercice 2**):

$$z^2 - 0.4z + 0.08 = (z - 0.2 - j0.2)(z - 0.2 + j0.2)$$

Ceci remplit la spécification (ii). La fonction de transfert de cette boucle est précisément obtenue par la formule $D + C(zI - A)^{-1}B$:

$$\frac{y(z)}{e(z)} = \frac{1}{2}\frac{z-1}{z^2 - 0.4z + 0.08}$$

Pour ce qui est de la pré-commande, la représentation d'état étant sous forme compagne, sa fonction de transfert s'écrit:

$$\frac{e(z)}{v(z)} = 1 + \frac{1.1z - 0.42}{z^2 + \gamma_1 z + \gamma_0} = \frac{z^2 - 0.4z + 0.08}{(z-1)(z-0.7)}$$

Ceci se retrouve également en appliquant la formule $D + C(zI - A)^{-1}B$.

On en déduit que le système global en poursuite a comme fonction de transfert:

$$\frac{y(z)}{v(z)} = \frac{1}{2}\frac{z-1}{z^2 - 0.4z + 0.08}\frac{z^2 - 0.4z + 0.08}{(z-1)(z-0.7)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(z-0.7)}$$

En poursuite, le système se comporte donc comme une premier ordre plus lent que que la dynamique de régulation (i.e. le module du pôle dominant de poursuite est supérieur au module du pôle dominant de régulation: $0.7 > |0.2 + j0.2| = 0.2828$). La spécification (iii) est remplie.

Il est possible de noter que le système résultant n'est pas précis en réponse à un échelon sur l'entrée de consigne $\{v_k\}$. En effet le gain statique de ce transfert est:

$$\frac{y(1)}{v(1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-0.7)} = 5/3$$