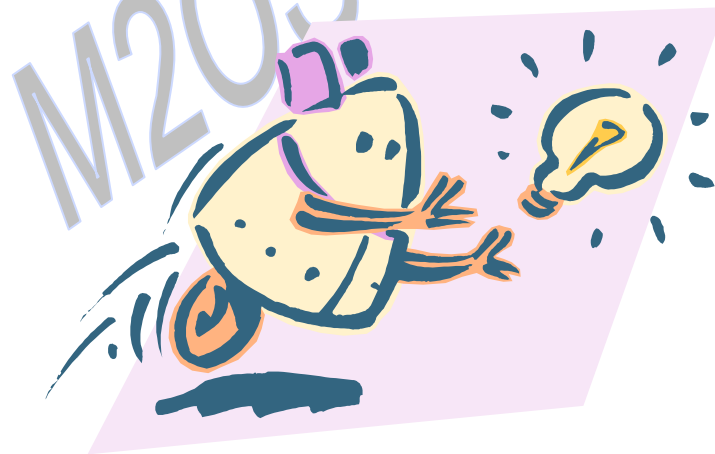




Groupe de travail  
Management Méthodes  
Outils Standard (M2OS)



Jean-Claude Ligeron

**Cours de Fiabilité  
en mécanique**

# Introduction

Depuis son origine à l'ISdF (Institut de Sûreté de Fonctionnement) puis à l'IMdR (Institut de Maîtrise des Risques) le groupe de travail M2OS (Management, Méthodes Outils Standard) fort d'une vingtaine de membres s'est donné pour tâche de publier des ouvrages destinés à servir de références aux personnes soucieuses de Sûreté de Fonctionnement et de Maîtrise des risques. Ceux – ci peuvent être débutants afin les aider à démarrer dans le métier ou plus chevronnés pour se rappeler tels ou tels éléments techniques.

Dans la lignée des ouvrages qu'il a élaborés, M2OS propose ici au lecteur le cours de fiabilité en mécanique que Jean-Claude Ligeron enseigne depuis de nombreuses années. Ce cours représente le fruit de son expérience acquise à MATRA, puis dans les entreprises où il a exercé et pour finir dans la société qu'il a fondée.

Nous tenons ici à remercier Jean-Claude Ligeron d'avoir accepté cette publication qui comme les autres constitue un trait d'union entre les « anciens » et les « nouveaux ».

Ce cours ne se veut pas figé mais évolutif en fonction de son enrichissement, compte tenu des dernières nouveautés en la matière et d'expériences complémentaires que vous pourriez avoir acquises dans votre milieu.

Il vous est possible d'adresser tous commentaires sur l'existant, et proposer des compléments par le moyen de votre choix en l'adressant par courriel au coordinateur du projet : [prlecler@club-internet.fr](mailto:prlecler@club-internet.fr).

Actuellement l'ensemble se compose des modules suivants :

1. Les Bases « >> »
2. Fiabilité des structures « >> »
3. Les compléments « >> »
4. Exemples pratiques « >> »

Chaque module se compose de chapitres contenant et / ou une présentation générale et un texte.

- 1 - L'accès direct aux modules s'effectue en cliquant sur « >> » à droite de la désignation.
- 2 - Certains modules mentionnent des références non rééditées mais dont le contenu reste d'actualité et n'ont pas été remplacées.
- 3 - Le lecteur n'oubliera pas que vous avez accès à un cours conçu pour être professé. Le professeur n'étant pas là, vous voudrez bien avoir de l'indulgence pour certaines planches qui de ce fait sont un peu plus difficiles à appréhender sans les commentaires oraux... Il présente une base pour se familiariser avec le domaine et fournit un très grand nombre de références et de données pour approfondir le domaine.

Présidents du groupe M2OS: J.M. Cloarec (Bombardier) et Y. Mortureux (UIC/SNCF)

Coordinateur du projet: P. R. Leclercq (R.I.S.)

Membres actifs de M2OS: Mme M.M.Oudin-Darribère, MM. J.M. Cloarec (Bombardier), R.Grattard (RATP), J.Lafont, P.Leclercq (R.I.S.), J-C Ligeron, D.Merle (Thales), P.Moreau (LRBA), D.Morel (LRBA), Y.Mortureux (UIC/SNCF), J.Ringler (Ringler Consultant), J.Riout (CETIM), G.Sabatier (LGM), M.Testylier (GMAO Services)

Page volontairement blanche

M2OS - IMdR

# FIABILITE MECANIQUE

## Les bases





## SOMMAIRE

1. Généralités
2. Méthodologie « >> »
3. Théories de contrainte / Résistance « >> »
4. Fatigue « >> »
5. Fatigue oligocyclique « >> »
6. Mécanique de la Rupture « >> »
7. Amorçage « >> »
8. Pièces particulières « >> »



# 1. GENERALITES



## CE QUE N'EST PAS LA FIABILITE EN MECANIQUE

- LA LOI DE WEIBULL
- LA METHODE CONTRAINTE RESISTANCE
- MOINS PRECISE QUE L'ELECTRONIQUE
- REMPLACE LE TRAVAIL DU CALCULATEUR DE RDM
- SE FAIT SANS ANALYSE FONCTIONNELLE ET AMDEC
- SE FAIT PAR UN FIABILISTE ELECTRONICIEN OU UN STATISTICIEN



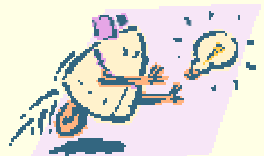
## NE PAS FAIRE

- CALCUL AVEC NOMBRE DE 9 ELEVES
- CALCUL ZONES DE NON-LINEARITES
- SANS TENIR COMPTE DES NIVEAUX DE CONFIANCE
- UTILISER LES TABLES DE DONNEES INCONSIDEREMENT
- VOULOIR METTRE A TOUT PRIX DES PROBABILITES



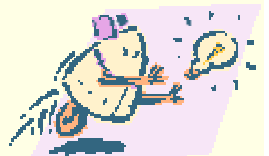
## CE QU'EST LA FIABILITE EN MECANIQUE

- UNE METHODOLOGIE INTEGREE DE FIABILITE PRENANT EN COMPTE L'ALEATOIRE DANS LES PROCESSUS DE DEGRADATION DES SYSTEMES MECANIQUES
  
- ELLE UTILISE :
  - ➔ UNE METHODOLOGIE DERIVEE DES TECHNIQUES CLASSIQUES DE FIABILITE
  - ➔ ELLE UTILISE LES RESULTATS DES BUREAUX DE CALCUL
  - ➔ ELLE EST PRATIQUEE PAR DES MECANICIENS



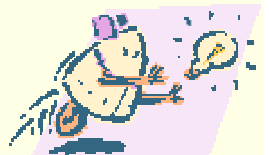
## REGLES POUR OBTENIR UNE HAUTE FIABILITE

- FAIRE AUSSI SIMPLE QUE POSSIBLE
- EVITER D'INTRODUIRE DES PROCEDURES DE DIMINUTION DE COUT AU DEPEND DE LA FIABILITE
- TENIR COMPTE DES ERREURS HUMAINES
- UTILISER DES ELEMENTS CONNUS
- PRENDRE DES PRECAUTIONS SUR LES CONCEPTIONS NOUVELLES
- ANALYSER LES DONNEES DU TERRAIN



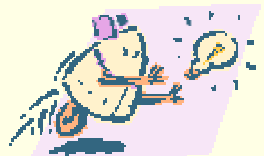
## REGLES POUR OBTENIR UNE HAUTE FIABILITE (Suite)

- FAIRE ATTENTION AUX DONNEES DU TERRAIN DANS LE CAS DE MODIFICATIONS ET AMELIORATIONS
- DANS LE CAS DE PARAMETRES CRITIQUES UTILISER DES SF DE 3 A 6  $\sigma$
- CONSIDERER LE DIAGNOSTIC DES ELEMENTS CRITIQUES
- INCLURE DES FACILITES POUR INSPECTION DANS LA CONCEPTION
- INTRODUIRE DES REDONDANCES LORSQUE NECESSAIRE



## REGLES POUR OBTENIR UNE HAUTE FIABILITE (Suite)

- FAIRE ATTENTION AUX ASPECTS MAINTENANCE f (FIABILITE)
- FAIRE ATTENTION AUX ASPECTS TRANSPORTS, STOCKAGE
- UTILISER DES COMPOSANTS STANDARDS SI POSSIBLE
- FAIRE ATTENTION AUX ASPECTS FABRICATION f (FIABILITE)





## COMPARAISON ELECTRONIQUE MECANIQUE

ATTRIBUTS	ELECTRONIQUE	MECANIQUE
• Mode de défaillance	• Simple	• Complexe
• Facteurs de contrainte	• Prédicible	• Difficile à prédire précisément
• Burn-in	• Économiquement justifiable	• Trop cher
• $\lambda$ constant	• Applicable pour de longues durées	• Applicable pour de courtes durées
• $\lambda$ croissant	• Obsolescence, vieillissement	• Arrive très tôt
• Durée de vie	• Courte due à l'obsolescence	• Longue
• Test de vie	• Bon marché et efficace	• Difficile et cher
• Maintenance	• Remplacement	• Réparation et remplacement
• Données de fiabilité	• Nombreuses	• Très peu de bonnes données



## LES TYPES DE PROBLEMES DU FIABILISTE

- AMELIORER LA CONCEPTION / CRITERES SURETE DE FONCTIONNEMENT
- "ASSURANCE" SURETE DE FONCTIONNEMENT DU SYSTEME
- EVALUATION QUANTITATIVE DE LA FIABILITE / OBJECTIF



## CRITIQUE DES ANALYSES SYSTEME

\* AMDEC SOUVENT UTILISEES DE FACON "PURE ET BRUTE"

### AVANTAGES

- BALAYAGE EXHAUSTIF
- TIENT COMPTE DE L'ENVIRONNEMENT
- FILTRE FIN

### INCONVENIENTS

- PANNE D'ORDRE 1
- PROBLEME POUR LES SCENARIOS DE PANNES COMPLEXES
- CONVERGE LENTEMENT VERS LES PROBLEMES DE CONCEPTION
- LOURD-VOLUME DE PAPIER IMPORTANT



## ETUDE SYSTEME

→ ETUDE QUALITATIVE DU TYPE :

→ AMDEC

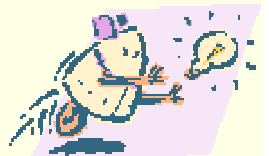
→ ANALYSE FONCTIONNELLE

→ ARBRE DE DEFAILLANCE

→ CALCULS PRELIMINAIRES



"COMPOSANTS CRITIQUES"



## TENDANCES POUR LES ETUDES SYSTEMES

\* COMPLEMENT OU REMPLACEMENT DE L'AMDEC PAR DIVERSES METHODES

→ ANALYSE FONCTIONNELLE

→ DEN/CNES

→ CEP

→ AMDEC « ASTUCIEUSES »

→ FTA, ARBRE D'EVENEMENTS

→ ANALYSE DE RISQUES

→ CONDITIONS INSIDIEUSES

→ DES IMPREVUS

→ MODES COMMUNS

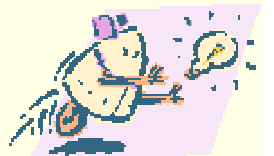
...

BUT : CONVERGER PLUS RAPIDEMENT VERS L'OBJECTIF DE L'ETUDE



## TENDANCES RECUEIL DE DONNEES

- RETOUR D'EXPERIENCE FAVORISE PAR OUTILS :
- ⇒ BASE DE DONNEES
  - ⇒ STATISTIQUE SIMPLE
  - ⇒ TEST PLUS PUISSANT (EDF)
  - ⇒ VOIR ECHELLE NATIONALE



## TENDANCE : CALCULS NON STANDARDS

### → MAITRISE DES MATERIAUX :

➔ BASE DE DONNEES

➔ MODELES

☰ DANG VAN

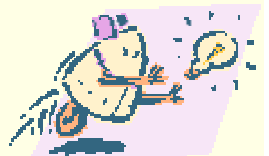
☰ AMORCAGE DES FISSURES

A FOND D'ENTAILLE

MODELE DE GREAGER  $\Delta\sigma_{\theta\theta}(d)$

SCHIVJE  $k = f(a)$

☰ ...



## CONCLUSIONS

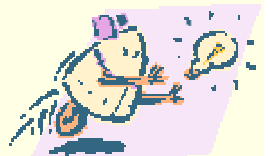
- BESOIN DE STANDARDISATION MECANIQUE / ELECTRONIQUE
  - ➔ MODELE
- GROUPE DE COMPETENCE
- DIALOGUE MECANICIEN / FIABILISTE

« <Retour< »





## 2. METHODOLOGIE



## SPECIFICITE DE LA FIABILITE EN MECANIQUE

### → PHENOMENES DE VIEILLISSEMENT ET D'USURE



→  $\lambda$  non constant  
→ lois statistiques complexes

### → ABSENCE DE NORMALISATION ET DE STANDARDISATION

- sources de données limitées
- niveau de décomposition

### → AFFAIRE DE MECANICIENS

- calculs
- modes de défaillance
- ...



## LOIS STATISTIQUES UTILISEES

### - Loi exponentielle

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad E(x) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

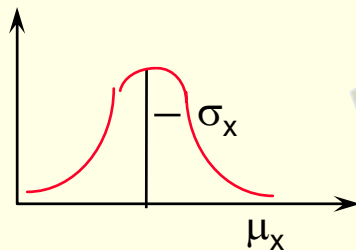
### - Loi binomiale

Probabilité (k défaillances sur n essais) =  $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

p : proportion défectueuse

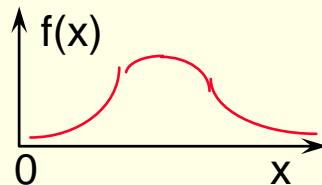
- Lois discrète (succès ou échec)
- Exploitation essais (bon ou mauvais)

### - Loi normale



- Incertitudes sur mesures, fabrications
- Phénomènes de fatigue (Wohler)
- Forme limite loi binomiale
- Tests statistiques aisés

### - Loi log normale



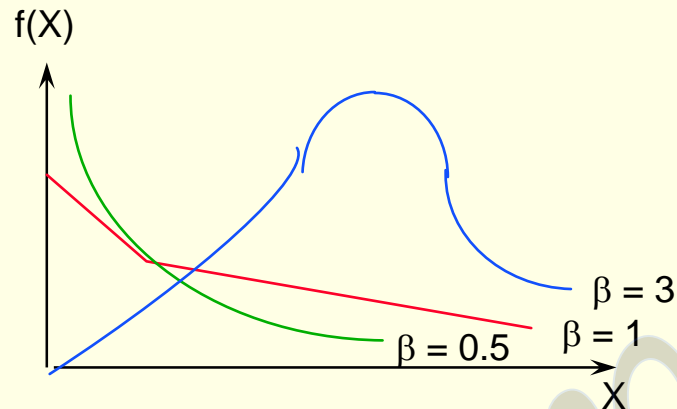
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

- y = ln x normale
- Mortalités et durées de réparation



## LOIS STATISTIQUES UTILISEES (suite)

### - Loi de Weibull



→ souple

→ roulements, engrenages, etc ...

$$\rightarrow f(x) = \frac{\beta}{\Gamma} \left[ \frac{x - \gamma}{\Gamma} \right]^{\beta - 1} \cdot \text{Exp} - \left[ \frac{x - \gamma}{\Gamma} \right]^{\beta}$$

### - Loi de Gamma

- Techniques bayésiennes

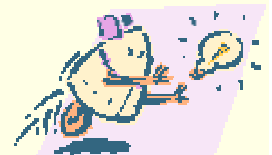
$\alpha = 0$  : exponentielle

### - Loi de Poisson

$$f(x) = \frac{\chi^{\alpha} e^{-\chi / \beta}}{\beta^{\alpha + 1} \Gamma(\alpha + 1)}$$

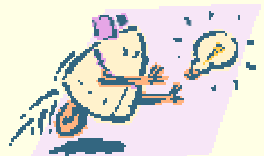
$\alpha$  entier : Poisson

- Nombre d'incidents sur un parc important
- Probabilité ( $x = k$ ) =  $\frac{m^k}{k!} e^{-m}$  avec  $m = \lambda t$
- $E(\alpha) = V(\chi) = m$



# LA FIABILITE EN MECANIQUE

- SA SPECIFICITE
  - LA METHODOLOGIE GENERALE
  - CONTRAINTES                      RESISTANCE
- ↓                                      ↓
- FIABILITE
- EFFORTS → STATIQUES
  - ↓ DE FATIGUE
  - ↓ OLIGOCYCLIQUES
- MECANIQUE DE LA RUPTURE
- PIECES PARTICULIERES
- TABLES DE TAUX DE DEFAILLANCE



## ANALYSE DE LA MISSION - ANALYSE PRELIMINAIRE

### DEFINIR

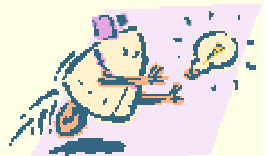
- Le besoin et les objectifs
- La mission
- Les limites du système
- Les conditions de succès ou d'échec

### ENTREES

- Spécifications techniques et fonctionnelles
- Dossiers de plans et de calculs

### SORTIES

- Graphe de mission
  - Modes nominaux, dégradés, catastrophiques
- Blocs diagrammes fonctionnels
- Composants critiques
  - Choix méthode de calcul
  - Axes de recherche des données



# ANALYSE QUALITATIVE

## Failure Modes Effects and Criticality Analysis

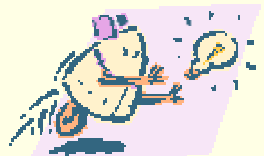
### Analyse des Modes de Défaillances de leurs Effets et de leur Criticité

- Entrées
- Modes de défaillance composants
  - Échelle de criticité
- Sorties
- Liste des causes des défaillances
  - Conséquences au niveau système sur la réussite de la mission



## MODES DE DEFAILLANCE

- CORROSION : PIQUES, CONTRAINTES, CAVITATION, ATTAQUES CHIMIQUES, EROSION, GALVANIQUE
- FRETTAGE : FATIGUE, USURE, CORROSION
- FLAMBAGE
- FATIGUE : THERMIQUE, CYCLES ELEVES, CYCLES FAIBLES, SURFACE
- BRINELLING, ECAILLAGE
- USURE : IMPACT, ADHESIVE, FRETTAGE, ....
- FRAGILE
- COMBINEES FATIGUE ET FLAMBAGE





## MODES DE DEFAILLANCE (suite)

- CHOC THERMIQUE
- RELAXATION THERMIQUE
- STRESS CORROSION
- DEFORMATION ELASTIQUE
- COMBINEE EFFORT TEMPERATURE
- RADIATION
- FATIGUE ACOUSTIQUE



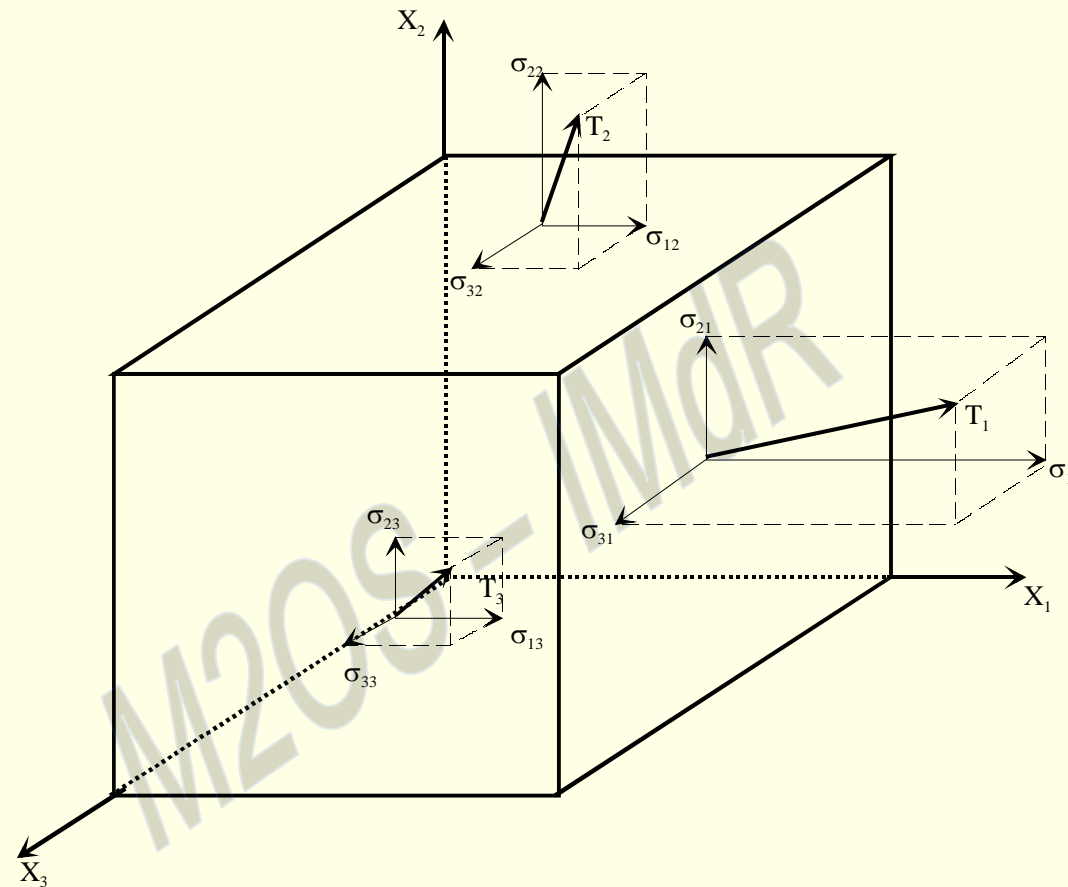
## MECANISMES PHYSIQUES DE DEFORMATION

- DEFORMATION ELASTIQUE : NIVEAU ATOMIQUE
- DEFORMATIONS PERMANENTES ELASTIQUES OU VISCOPLASTIQUES = NIVEAU CRISTALLIN
  - ↪ GLISSEMENTS ET MACLAGE
  - ↪ DISLOCATIONS

## LES RUPTURES

- RUPTURE FRAGILE = LIAISONS INTER ATOMIQUES
- RUPTURE DUCTILE = DEFAUTS CRISTALLINS
- RUPTURE PAR FATIGUE
  - ↪ PHASE D'ACCOMMODATION
  - ↪ PHASE D'AMORCAGE
  - ↪ PHASE DE CROISSANCE





Composantes du vecteur contrainte et de la matrice représentative du tenseur des contraintes (d'après Germain-Muller)



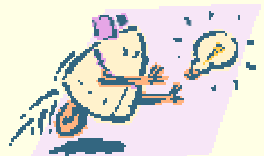
Description en vitesse	Description en petites perturbations	Description en transformation finie
Variables d'Euler $M = M(x, t)$ Configuration actuelle  Vitesse $\bar{v}$  Gradient des vitesses $\text{grad } \bar{v}$  Tenseur des taux de déformation $D = \frac{1}{2} [\text{grad } \bar{v} + (\text{grad } \bar{v})^T]$  Tenseur des taux de déformations élastiques $D^e$   Tenseur des taux de déformations inélastiques $D^p$   Partition $D = D^e + D^p$	Variables d'Euler $\equiv$ Variables de Lagrange Configuration actuelle $\equiv$ configuration initiale  Déplacement $\bar{u}$  Gradient des déplacements $\text{grad } \bar{u}$  Tenseur des déformations $\varepsilon = \frac{1}{2} [\text{grad } \bar{u} + (\text{grad } \bar{u})^T]$  Tenseur des déformations élastiques $\varepsilon^e$   Tenseur des déformations inélastiques $\varepsilon^p$   Partition $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$	Variables de Lagrange $M = M(M_0, t_0, t)$ Configuration initiale Transformation $x(M) = F(x(M_0), t_0, t)$ Gradient de la transformation linéaire tangente $F = \frac{\partial F}{\partial x(M_0)}$  Tenseur de Green-Lagrange $\Delta = \frac{1}{2} (F^T F - 1)$  Transformation élastique par rapport à la configuration relâchée E  Tenseur des déformations élastiques $\Delta^e = \frac{1}{2} (E^T E - 1)$ Transformation inélastique P Tenseur des déformations inélastiques $\Delta^p = \frac{1}{2} (P^T P - 1)$  Décomposition $F = E \cdot P$ $(\Delta \neq \Delta^e + \Delta^p)$
	$\dot{\varepsilon} = D \quad \dot{\varepsilon}^e = D^e \quad \dot{\varepsilon}^p = D^p$	$\dot{\Delta} \neq D \quad \dot{\Delta}^e \neq D^e \quad \dot{\Delta}^p \neq D^p$
Tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma$	Tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma$	Tenseur de Piola-Kirchhoff 1 $S = \det(F) \sigma \cdot F^{T-1}$  Tenseur de Piola-Kirchhoff 2 $S^* = F^{-1} \cdot S$

### Variables de déformation et de déplacement



## DETERMINATION DES CONTRAINTES

- Décomposition du système en sous-système et composants (niveau de décomposition)
  - Contraintes
    - ⇒ mécaniques
    - ⇒ usure et érosion
    - ⇒ corrosion
    - ⇒ thermiques
  - Détermination par:
    - ⇒ calculs
    - ⇒ mesures
  - Distribution statistique
- Outils : Résistance des Matériaux  
Outils Informatiques (CAO)  
Techniques d'essais  
Exploitations statistiques



## DETERMINATION DE LA RESISTANCE A LA CONTRAINTE DES ELEMENTS

- Lois de survie des éléments soumis à :
  - fatigue
  - usure
- Distribution statistique de la résistance à la contrainte

Composants "standardisés »  
(roulements, bagues, engrenages) : lois de survie

sinon

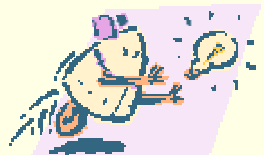
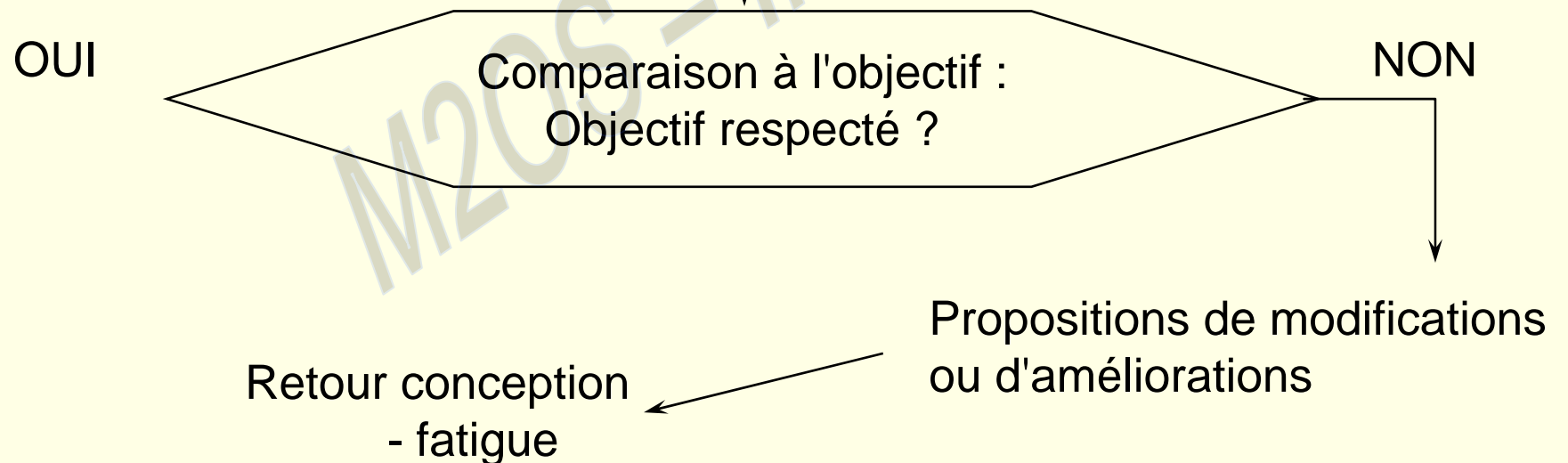
- théorie de la fatigue
- mécanique de la rupture
- données en exploitation
- essais
- tables de données



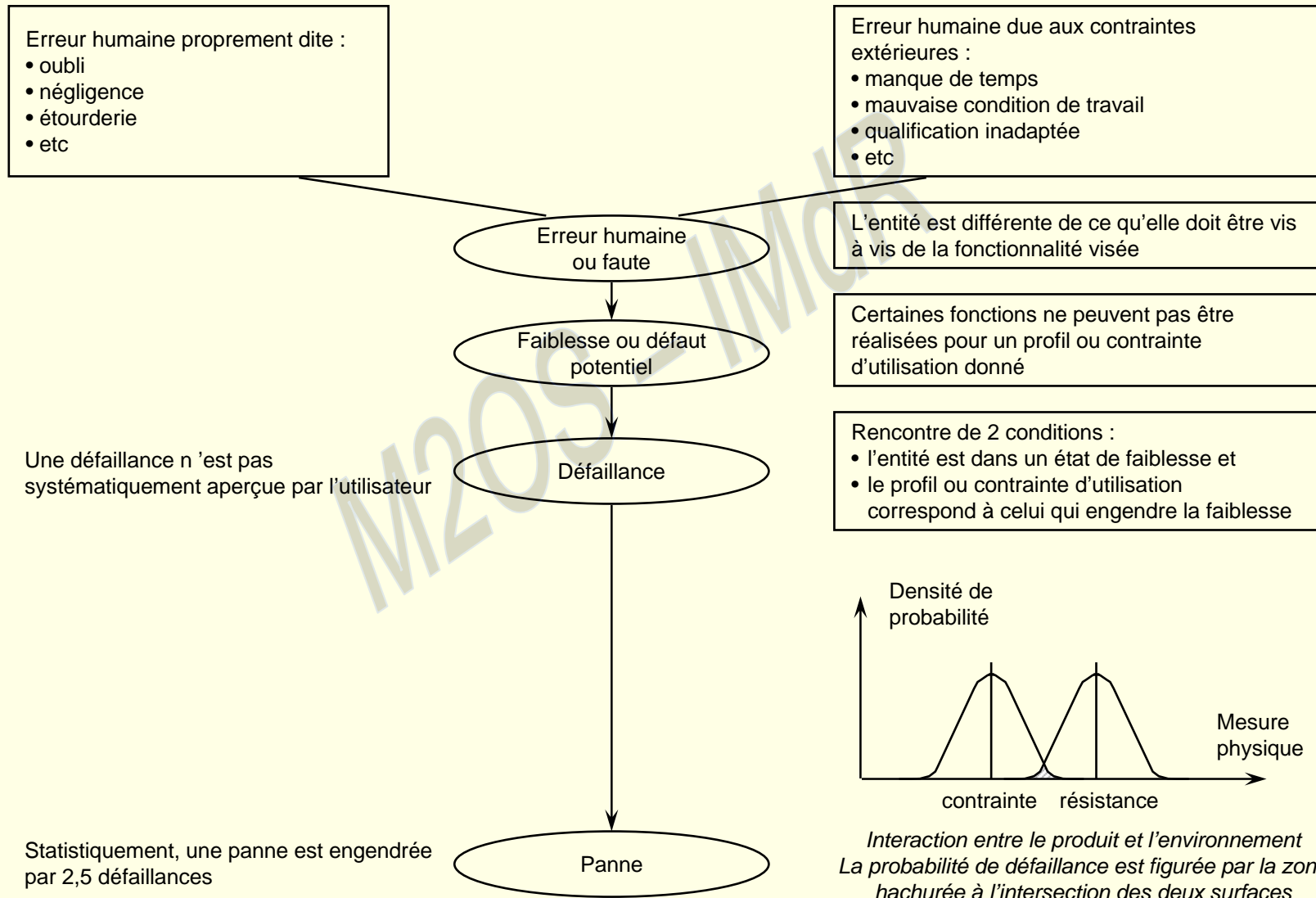
## INTEGRATION DES RESULTATS AU NIVEAU SYSTEME

**Entrées** : Études au niveau composant

**Sorties** : Fiabilité (et éventuellement Sécurité - Disponibilité)



# ANALYSE D'UNE DEFAILLANCE





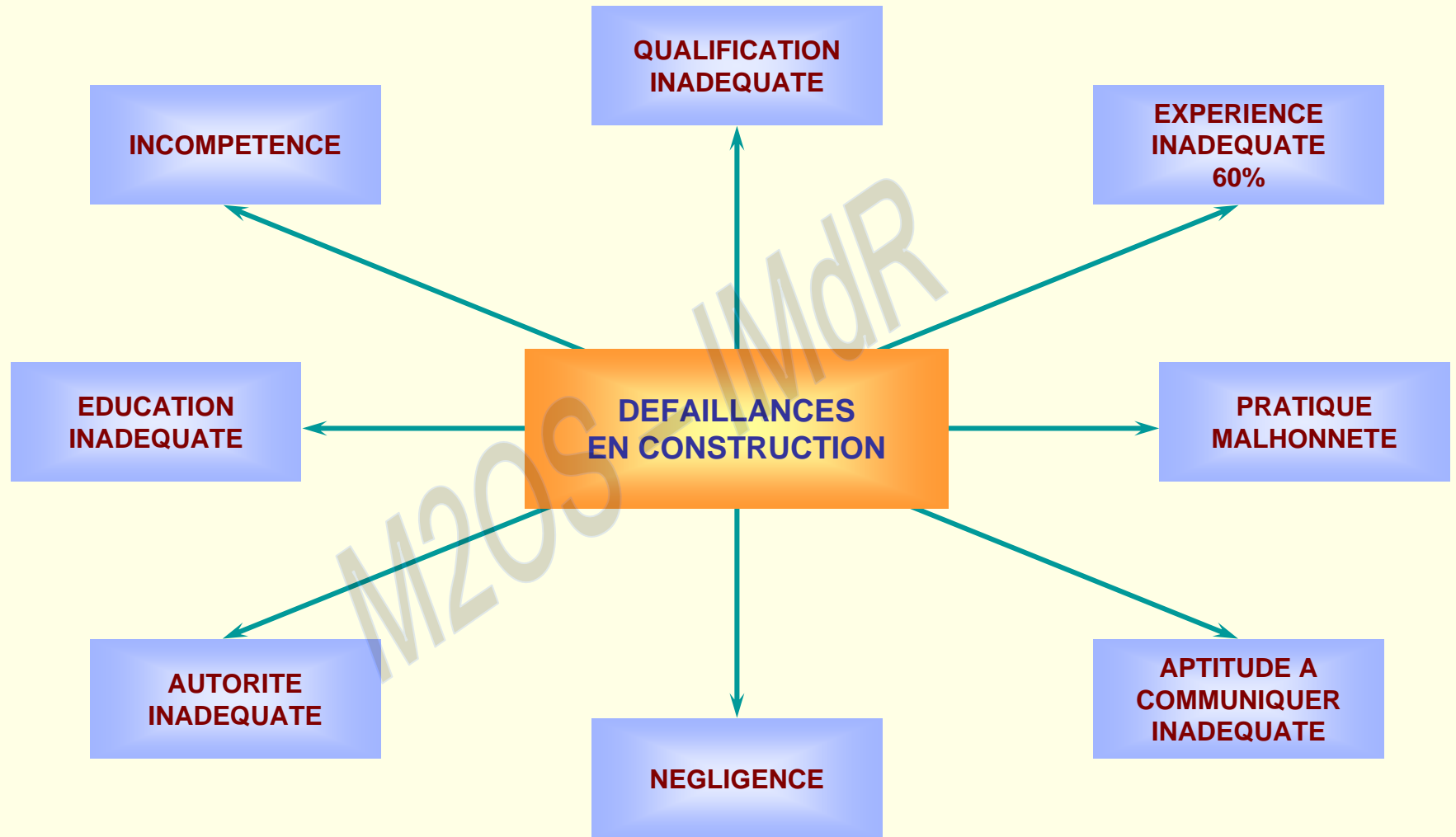
## ERREURS HUMAINES

- 4 PHASES :
  - ➔ Identification
  - ➔ Investigation
  - ➔ Actions correctives
  - ➔ Vérification

## PRATIQUES

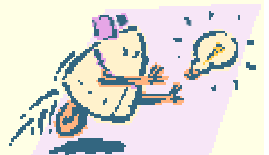
- Prévenir les erreurs de connexions
- Éduquer sur les erreurs possibles
- Obtenir des informations sur systèmes similaires
- Concevoir des systèmes prenant en considération l'erreur humaine
- Se souvenir que l'humain n'est pas très fiable





## PROPOSED SET OF TYPICAL FAILURE CAUSE POSSIBILITIES

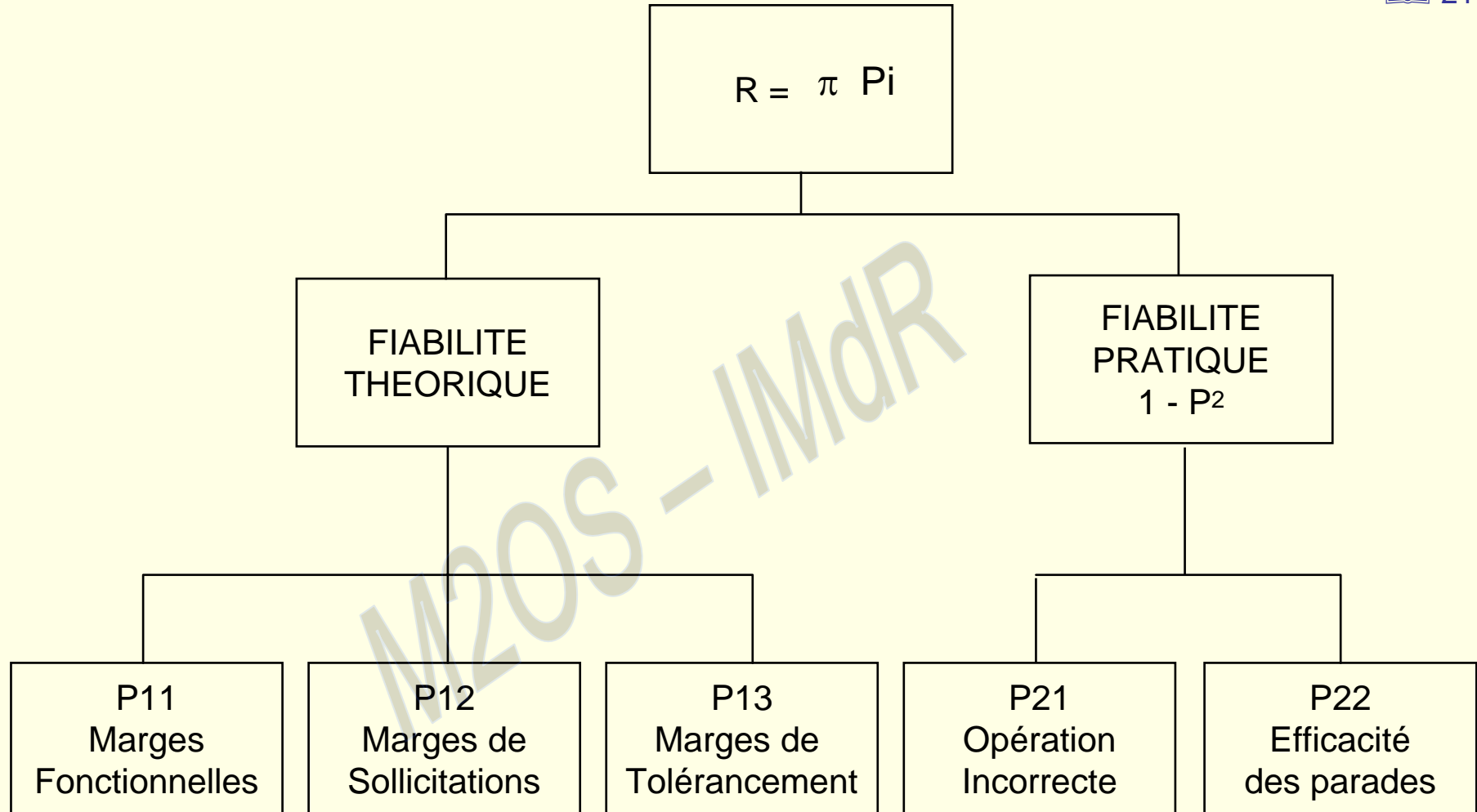
CAUSES		REF.	PROBABILITIES
Design	Incorrect design w.r.t mechanical environment	C1	$10^{-3}$
	Incorrect design w.r.t the selection of a functional parameter	C2	$2 \cdot 10^{-2}$
	Incorrect design w.r.t thermal environment	C3	$5 \cdot 10^{-3}$
	Incorrect design w.r.t ground environment	C4	$5 \cdot 10^{-3}$
Realisation	Material not compliant with the definition	metallic	$10^{-2}$
		composite, bonding	$10^{-1}$
	Incorrect machining	C6	$3 \cdot 10^{-3}$
	Incorrect thermal treatment	C7	$10^{-3}$
	Incorrect surface treatment	C8	$5 \cdot 10^{-3}$
	Incorrect assembly	C9	$3 \cdot 10^{-3}$
	Incorrect adjustment	C10	$10^{-2}$
	Degradation during handling, storage, integration, ...	C11	$10^{-3}$
	No respect of storage conditions, of life time limitations, ...	C12	$3 \cdot 10^{-3}$
	Incorrect realization of a manufacturing process	C13	$5 \cdot 10^{-3}$
Typical realization "human error"	C14	$3 \cdot 10^{-3}$	

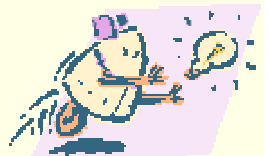
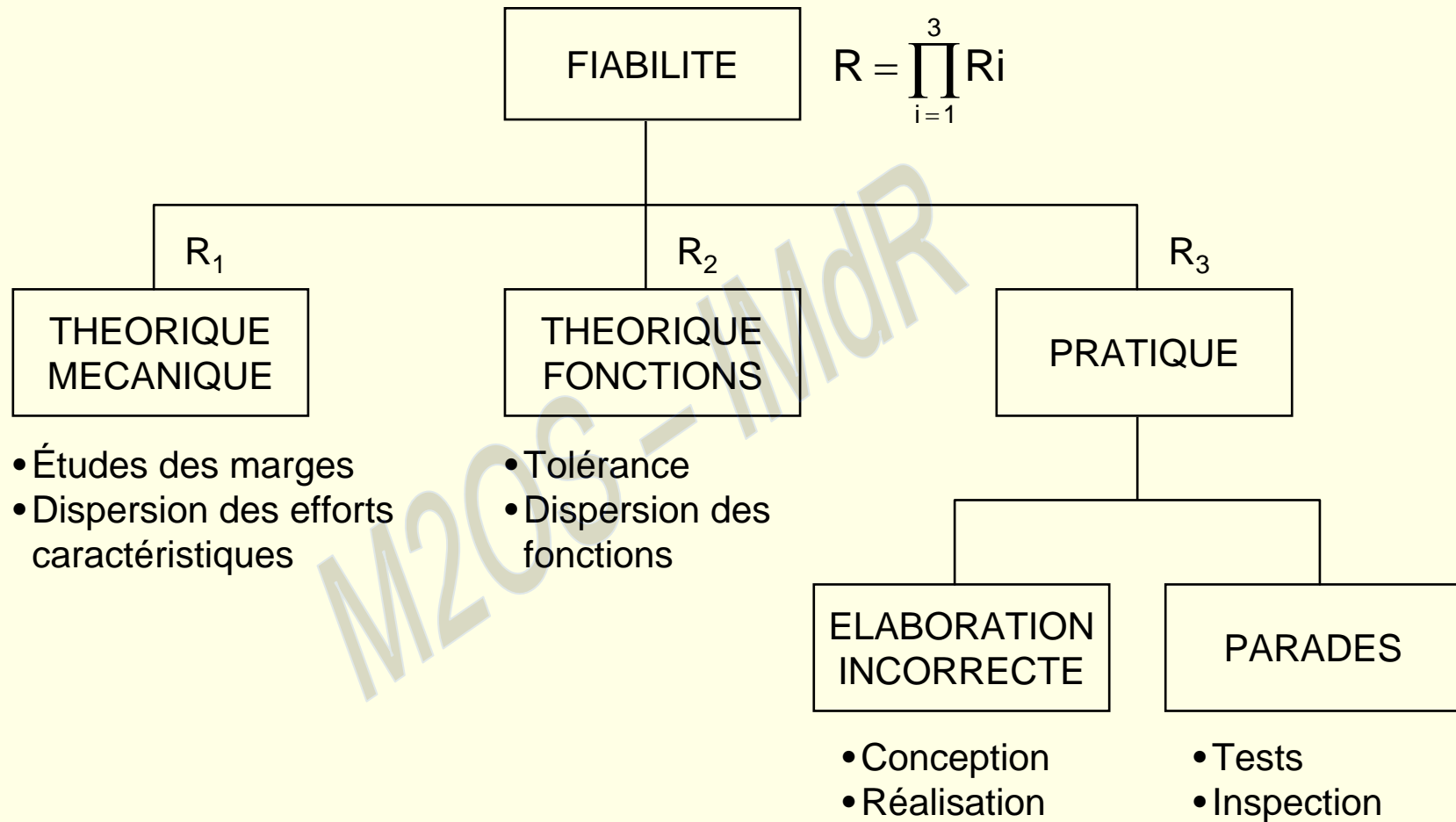


## PROPOSED SET OF TYPICAL SOLUTION FAILURE POSSIBILITIES

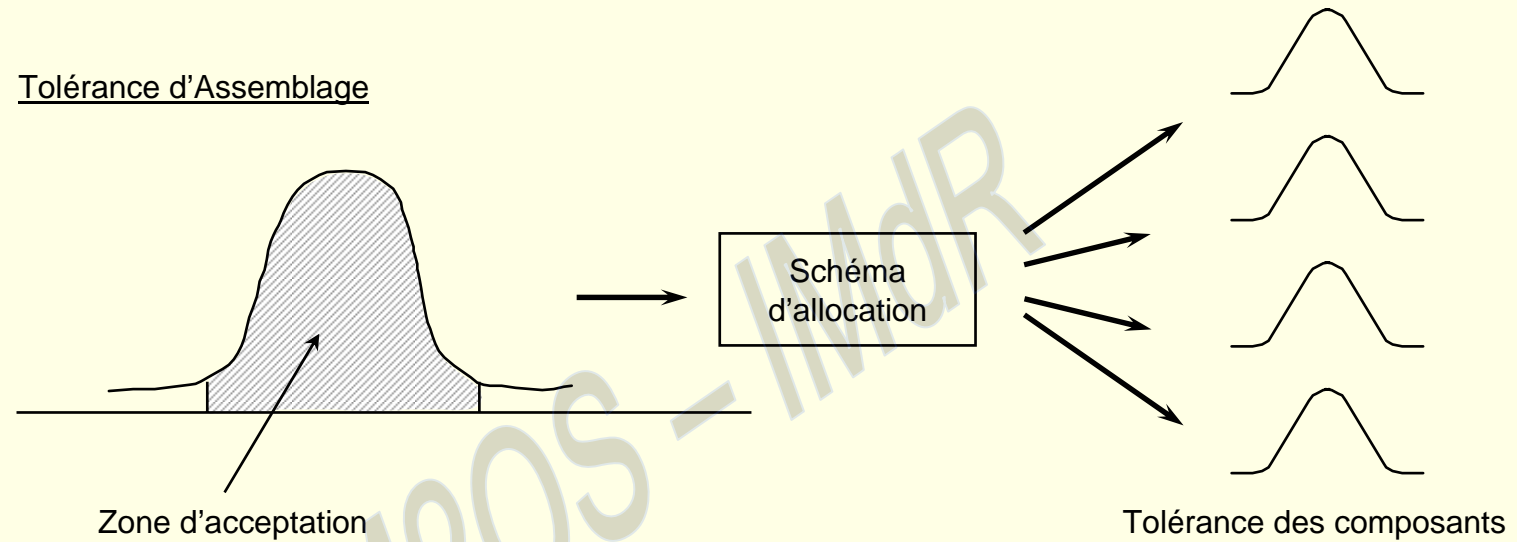
SOLUTION		REF.	PROBABILITIES
Testing	Qualification testing structural aspects	S1	$2 \cdot 10^{-2}$
	Qualification testing functional aspects	S2	$5 \cdot 10^{-2}$
	Acceptance testing structural aspects	S3	$5 \cdot 10^{-2}$
	Acceptance testing function aspects	S4	$10^{-1}$
	Development testing	S5	$5 \cdot 10^{-2}$
Inspection / Analysis	Incoming inspection	S6	metallic $5 \cdot 10^{-3}$ , composite, bonding, ... $5 \cdot 10^{-2}$
	Dimensional inspection	S7	$5 \cdot 10^{-2}$
	Surface treatment inspection	S8	$5 \cdot 10^{-2}$
	Heat treatment inspection	S9	$5 \cdot 10^{-2}$
	Manufacturing process inspection	S10	$5 \cdot 10^{-2}$
	Visual inspection	S11	$5 \cdot 10^{-3}$ , when explicitly required
	Integration inspection	S12	$5 \cdot 10^{-3}$ , when explicitly required
	Establishment of a procedure	S13	$5 \cdot 10^{-2}$
	Check by analysis	S14	$5 \cdot 10^{-2}$
	Typical manufacturing inspection	S15	$5 \cdot 10^{-2}$







## ALLOCATION DE TOLERANCES POUR ASSEMBLAGES MECANIQUES



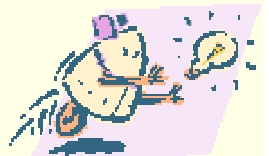
- Définition d'une fonction de coût/tolérance

$$\text{Coût} = A \cdot f(B \cdot T)$$

A = coûts fixes

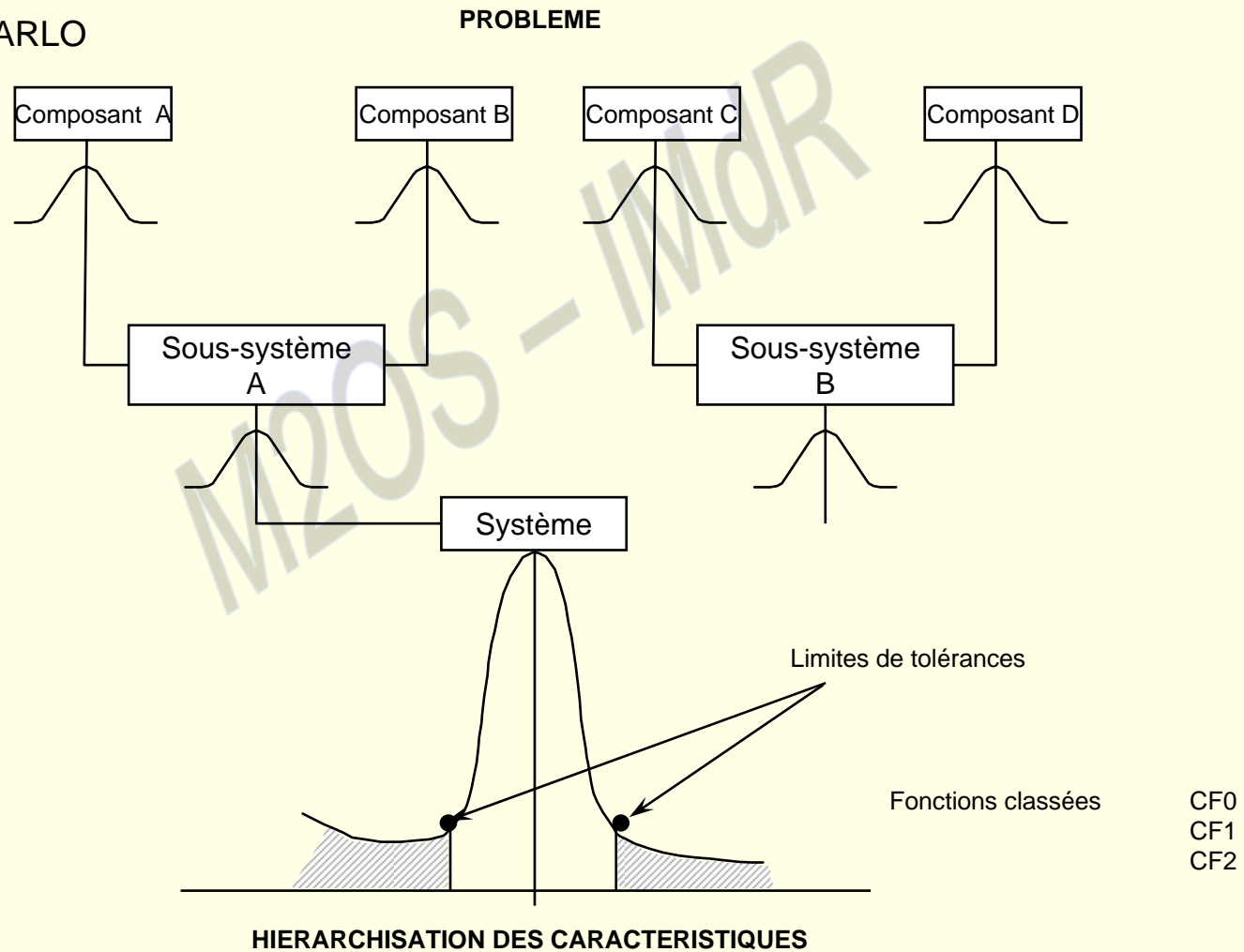
B = coût pour obtenir T

- Méthodes de programmation linéaire
- Méthodes de programmation non linéaire avec contraintes



# ANALYSE DES VARIATIONS

1. PIRE CAS
2. RMS
3. MONTE-CARLO

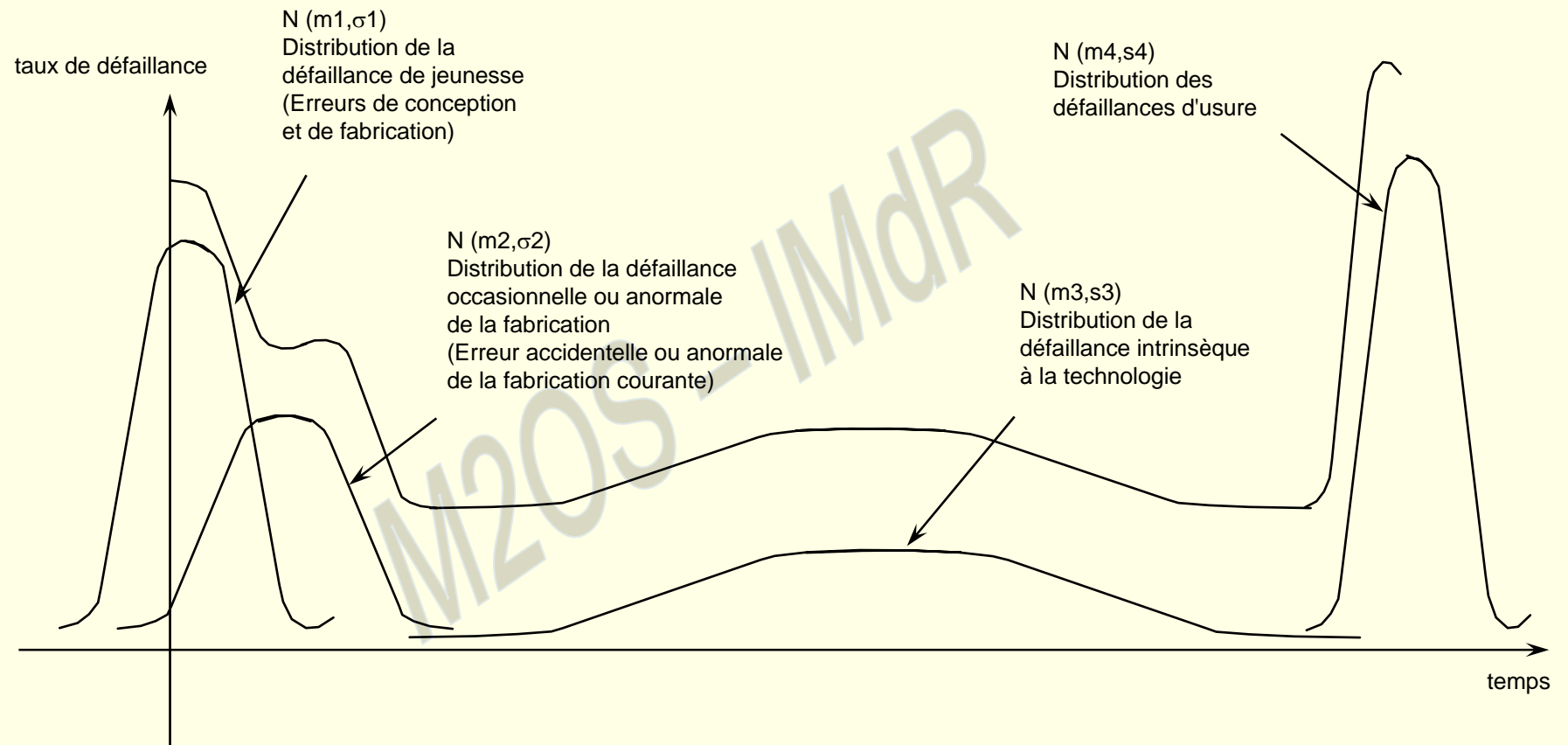




## NEF

- 1) Analyse fonctionnelle
- 2) Analyse des marges
- 3) Probabilité théorique  
Fiabilité théorique
- 4) Probabilité d'élaboration incorrecte (fiabilité pratique)  
P1 = modes dégradés  
P2 = autres causes
- 5) Mise en place de solutions et leur efficacité

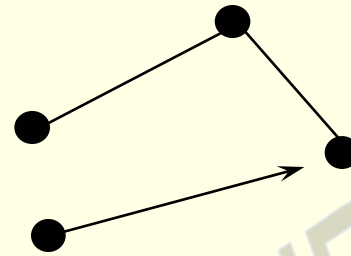




**Décomposition de la courbe en baignoire représentant les distributions du taux de défaillance du produit durant son cycle de vie**

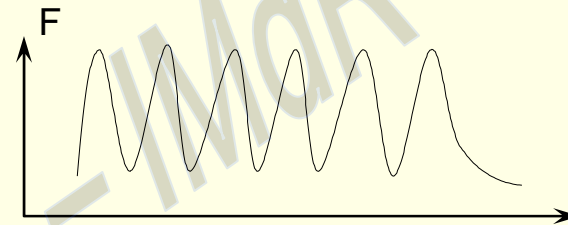


SYSTEME

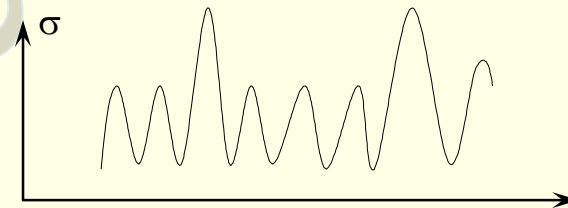


ENVIRONNEMENT

SOLLICITATIONS



CONTRAINTES



↔ OBJECTIF

MATERIAUX

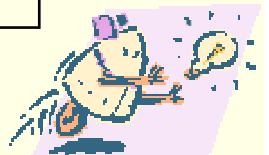
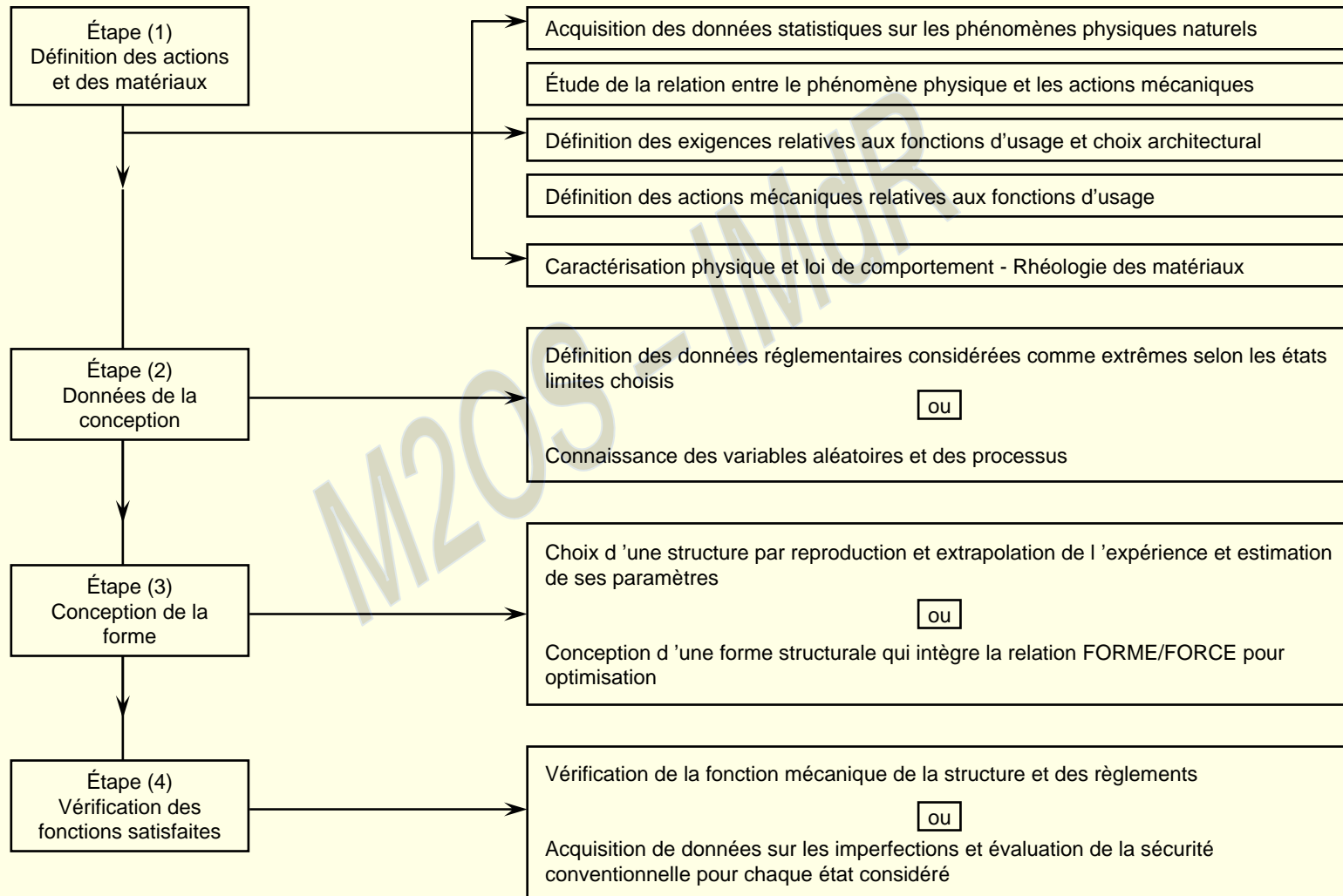
$R_e, R_m, K_{Ic}, \chi$



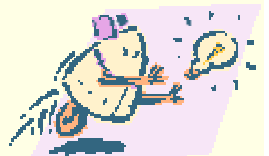
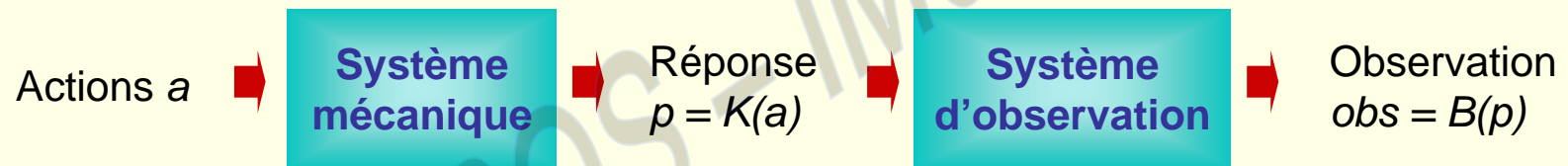
# Mécanique Aléatoire



## Dimensionnement des structures



## Schéma d'un système mécanique en utilisant des espaces de trajectoires



→ Équation différentielle stochastique

$$\dot{\eta}_t = f(\eta_t, t, \text{exc}_t)$$

exc<sub>t</sub> = processus d'exécution

$$\eta_{t'} = \eta_t + \int_t^{t'} f(\eta_s, s, \text{exc}_s) ds$$

→ Équation de Fokker-Planck (EFP)

$$d\eta_t = b(\eta_t) dt + \sigma(\eta_t) dW(t)$$



## AVANTAGES

- Modèles descriptifs mathématiques ajustable sur données aléatoires
- Schématisations physiques, traitements mathématiques prenant en compte les diverses sources d'incertitudes
- Transfert des incertitudes sur résultats, mise en évidence sensibilités, facteurs de décision
- Détection de phénomènes significatifs ayant leur origine dans la dispersion ou variabilité





## CARACTERE ALEATOIRE DES ACTIONS

### → Actions naturelles

- ⇒ les séismes
- ⇒ le vent
- ⇒ la neige
- ⇒ la houle
- ⇒ pluies, crues, courant
- ⇒ températures, gradients thermiques
- ⇒ chocs de glace

### → Actions d'exploitations

- ⇒ charges de trafic sur les structures
- ⇒ charges de plancher

### → Actions accidentelles



## APPROCHE PROBABILISTE STATIQUE ET DYNAMIQUE

### Approche statique

$$V_0 = S (V_b)$$

### Approche dynamique

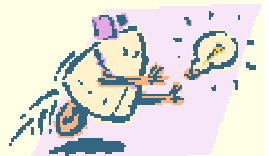
$$Y(t) = f(X_t)$$

$X_t$  = excitation

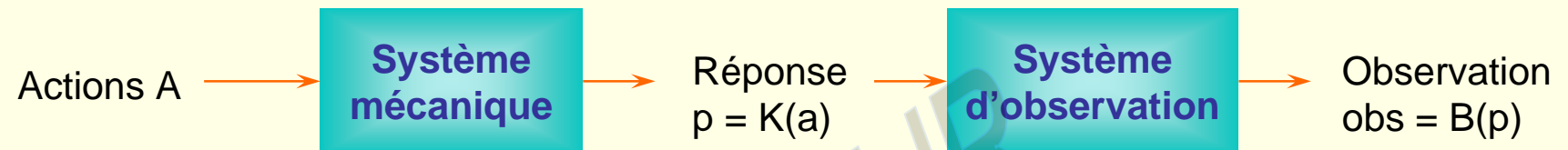
$Y(t)$  = réponse

On introduit généralement

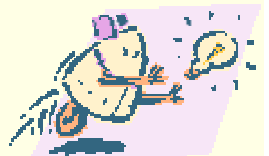
$$Z_t = h Y(t)$$



# MODELISATION



- Méthodes de filtrage linéaire
- Modèles traitement analytique
- Linéarisation équivalente
- Perturbations
- Stabilité - non explosion - ergodicité - stationnarité
- Gamma, convergence
- Markovianisation approchée
- Équations Fokker - Plank
- Méthodes numériques



# LE VENT

## Vent naturel

variation lente

variation rapide

$$\vec{V}(M, t) = \vec{\bar{V}}(M) + \vec{V}'(M, t)$$

vitesse moyenne  $\vec{\bar{V}}(M)$

turbulence  $V'(M, t) \rightarrow U(M, t)$

## Corrélation spatiale

densité spectrale unilatérale

Davenport

Harris

## Pressions et forces aérodynamiques



## TENUE AU VENT

$$M\ddot{X}_t = f(X_t, \dot{X}_t, \eta_t, t) \quad \text{EQUA DIF STOCHASTIQUE}$$

M = matrice carrée, réelle symétrique, définie positive

X<sub>t</sub> = réponse de la structure

f = fonction à valeurs vectorielles

η<sub>t</sub> = excitation gaussienne stationnaire centrée

### ALGORITHMES :

→ Shinozuka et Jan

→ Analyse spectrale et filtrage linéaire

→ Borgman

→ Filtrage linéaire

→ Analyse de Fourier de la fonction transfert impulsionnelle caractérisant le filtre

→ Wittig et Sinba

→ Analyse spectrale n(t)

→ FFT

→ Markovianisation approchée



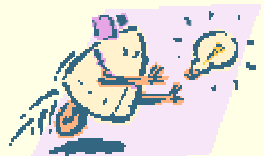
## VAGUES

- $\eta(t)$  = variation niveau
- $T_0$  = période
- Hauteur de vague significative  $H_s$  ou  $H_{1/3}$
- Nombre moyen de passages à 0  $T_z$   
temps entre passage à 0  
 $T_z = 3.349 H_s^{0.559}$
- Loi de Weibull
- 2 relations
  - ➔ Pierson et Moskowitz

$S_{\eta\eta}(w)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\eta\eta} =$  Transformée de Fourier complexe

- ➔ Jonswap  
Utilisation PETCH = distance et direction du vent



## → Modèle de vagues

Théorème de Airy :

- ➔ deux dimensions
- ➔ pression de surface négligeable
- ➔ termes non linéaires négligeables
- ➔ déplacements de surface négligeable

$$\eta(x, T) + a \cos (Kx - wt)$$

vitesse des particules et accélérations

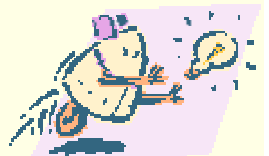
$\dot{U}_p$  et  $\bar{U}_p$

Effet du courant

## → Modèle d'effort

- $dP(t)$  {
- ➔ coefficients de Morison
  - ➔ Effet de traces  $c_d$
  - ➔ Effet d'inertie  $C_m$

↓  
Coefficient de Morison  $C_d$  et  $C_m$



## DISTRIBUTIONS DE PROBABILITE PAR VARIABLES

### → Vitesse du vent

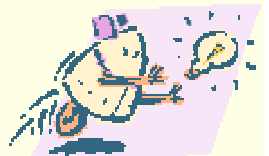
⇒ Davenport

⇒ Loi de Rayleigh pour vitesse horaire en un point particulier

$$\text{Type 1 } Fy(y) = \text{EXP} (-\text{EXP} (-x(y-v)))$$

$$\text{Type 2 } Fy(y) = \text{EXP} (-(u/y)^k)$$

$$\text{Type 3 } Fy(y) = 1 - \text{EXP} \left( -\left( \frac{y - \varepsilon}{K - \varepsilon} \right)^\beta \right)$$





# REPONSE SISMIQUE ET ALEATOIRE DES STRUCTURES DES REACTEURS NUCLEAIRES

## 1. INTRODUCTION

Les réacteurs sont soumis à des sollicitations de deux types :

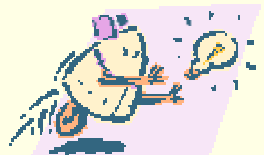
- ➔ les sollicitations sismiques qui sont transitoires,
- ➔ les fluctuations de pression induites par les écoulements perturbés qui sont stationnaires.

Le spécialiste du dimensionnement possède un certain nombre de données :

- ➔ de nature réglementaire pour les séismes,
- ➔ de nature expérimentale pour les pressions fluctuantes.

Le besoin actuel est de :

- ➔ mieux cerner les marges de sécurité,
- ➔ tenir compte des non-linéarités de la structure,
- ➔ mesurer l'effet d'incertitude sur les caractéristiques mécaniques des structures.



## REPONSE SISMIQUE ET ALEATOIRE DES STRUCTURES DES REACTEURS NUCLEAIRES (suite)

### 2. DONNEES SISMIQUES ET ANALYSE DE LA REPONSE DES STRUCTURES

On définit pour un site un séisme maximum historique raisonnable (SMHV) avec une intensité  $I$  et sa profondeur  $H$ .

Pour effectuer des calculs de réponse, on utilise un spectre de réponse d'oscillateurs  $S(\vartheta, \beta)$  qui représente le maximum au cours du temps de la réponse d'un oscillateur harmonique de fréquence  $\vartheta$  et d'amortissement réduit  $\beta$ .

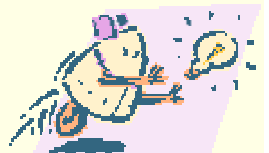
Ceci est effectué à l'aide d'abaques construits à partir de séismes enregistrés.

$$S(\vartheta, \beta) = F(\vartheta, \beta, H, I)$$

Deux niveaux de séismes sont définis :

- ➔ un «séisme de base» après lequel l'installation peut redémarrer  $I_\beta = \text{SMHV}$ ,
- ➔ un «séisme de sûreté» après lequel l'installation doit rester sûre. Son intensité est telle que :

$$I_S = I_B + I$$



## REPONSE SISMIQUE ET ALEATOIRE DES STRUCTURES DES REACTEURS NUCLEAIRES (suite)

### 3. ANALYSE DE LA REPONSE DES STRUCTURES

La méthode Modale est utilisée en général pour le calcul de la réponse de la structure.

Elle consiste à déterminer les modes propres de la structure sur lesquels on applique le spectre d'oscillateur de manière à obtenir le maximum atteint au cours du temps.

Le maximum de la réponse de la structure est calculé en effectuant la combinaison quadratique des maximum modaux.

Par contre la méthode modale suppose :

- ➔ les problèmes linéaires,
- ➔ pas d'interactions entre modes,
- ➔ les facteurs de pie ne sont pas modifiés.



## REPONSE SISMIQUE ET ALEATOIRE DES STRUCTURES DES REACTEURS NUCLEAIRES (suite)

### 3. ANALYSE DE LA REPONSE DES STRUCTURES (suite)

Lorsque l'on passe de la réponse d'oscillateurs simples à la réponse de systèmes à plusieurs résonances (très faux pour résonances faiblement amorties) ; des formules permettent d'effectuer une correction pour tenir compte approximativement de ces effets (ROSENBLUTH).

Pour un système à deux oscillateurs :

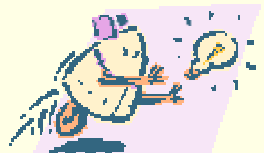
$(\vartheta_1, \beta_1)$   $(\vartheta_2, \beta_2)$  on a

$$Z^2 \max = C_1^2 Y_1^2 \max + C_2^2 Y_2^2 \max + 2 \frac{C_1 Y_1 \max C_2 Y_2 \max}{1 + \varepsilon_{12}^2}$$

avec  $\varepsilon_{12} = \frac{(\vartheta_1, \vartheta_2)}{\beta_1' \vartheta_1 + \beta_2' \vartheta_2}$  et  $\beta' = \frac{\sqrt{\beta} + 1}{(\pi \vartheta T)^2}$

T = durée de séisme

C1 et C2 = coefficients de participation modale



## REPONSE SISMIQUE ET ALEATOIRE DES STRUCTURES DES REACTEURS NUCLEAIRES (suite)

### 4. METHODE STATISTIQUE D'ANALYSE SISMIQUE

Pour pallier aux inconvénients de la méthode modale, une méthode statistique a été développée.

Cette méthode suppose que le signal sismique  $f(t)$  est obtenu à l'aide :

- ☞ d'une fonction aléatoire stationnaire  $\varphi(t)$  de densité spectrale  $F(\vartheta)$ ,
- ☞ d'une fonction à variation lente  $E(\tau)$ .

Une réalisation  $f_t(\tau) = E(\tau) \varphi(t)$  ( $0 \leq \tau \leq T$ ).

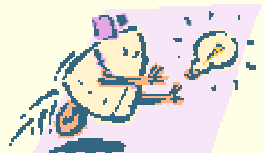
$\varphi_t(\tau)$  étant une réalisation de  $\varphi(t)$  considérée dans l'intervalle de temps  $[t, t + T]$ .

La réponse à  $t_0$  d'un système linéaire quelconque à  $f_t(z)$  est une fonction aléatoire stationnaire dont la densité spectrale est :

$$X(\vartheta, t_0) = H(\vartheta, t_0) H^*(\vartheta, t_0) F(\vartheta)$$

avec :

$$H(\vartheta, t_0) = \int_0^{t_0} h(z) E(t_0 - \tau) e^{-2i\pi\vartheta\tau} d\tau$$



## REPONSE SISMIQUE ET ALEATOIRE DES STRUCTURES DES REACTEURS NUCLEAIRES (suite)

### 4. METHODE STATISTIQUE D'ANALYSE SISMIQUE (suite)

$h(\tau)$  réponse impulsionnelle caractérisant le système linéaire.

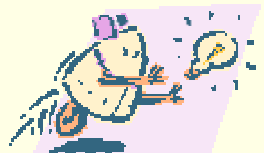
$F(\vartheta)$  et  $E(\tau)$  étant déduits des spectres d'oscillateurs.

$S(\vartheta, \beta)$  ce qui permet d'obtenir :

- ➔ la valeur quadratique moyenne de la réponse

$$\bar{X}(t_0) = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} X(\vartheta, t_0) d\vartheta \right]^{1/2}$$

- ➔ les données nécessaires à la fabrication de spectres,
- ➔ la détermination des facteurs de pic en utilisant la méthodologie de VANMARCKE.



## REPONSE SISMIQUE ET ALEATOIRE DES STRUCTURES DES REACTEURS NUCLEAIRES (suite)

### 5. ANALYSE SISMIQUE TEMPORELLE

Dans certains cas, il est nécessaire d'avoir une analyse en fonction du temps de manière :

- ➔ à tenir compte des non-linéarités,
- ➔ à pouvoir effectuer des essais en injectant des spectres « enveloppants » le spectre réglementaire,
- ➔ à tirer de l'analyse sismique un champ spatial de contraintes.

Cette méthode n'est néanmoins pas statistiquement satisfaisante, car on ne définit pas précisément le processus aléatoire sismique.



## REPONSE SISMIQUE ET ALEATOIRE DES STRUCTURES DES REACTEURS NUCLEAIRES (suite)

### 6. AUTRES METHODES D'ANALYSE

Pour calculer la réponse de systèmes non linéaires certains auteurs ont pensé utiliser les équations de FOKKER-PLANK. Soit pour un processus de MARKOV non stationnaire  $Y(t)$ . On peut montrer que la densité de probabilité conditionnelle  $P_c(Y_0, Y, t)$  vérifie une équation différentielle parabolique du type :

$$\frac{\partial p_c}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial y_i} (a_i p_c) + 1/2 \sum_i \sum_j \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} (b_{ij} p_c)$$

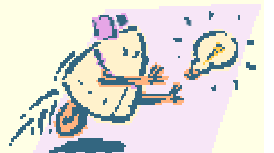
On peut appliquer cette équation à un vecteur de fonctions aléatoires  $X(t)$  vérifiant un système d'équations non linéaires de type :

$$\ddot{X} + A(\dot{X}, X) + K(X) = F(t)$$

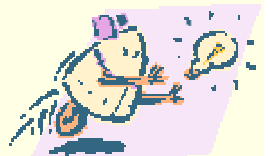
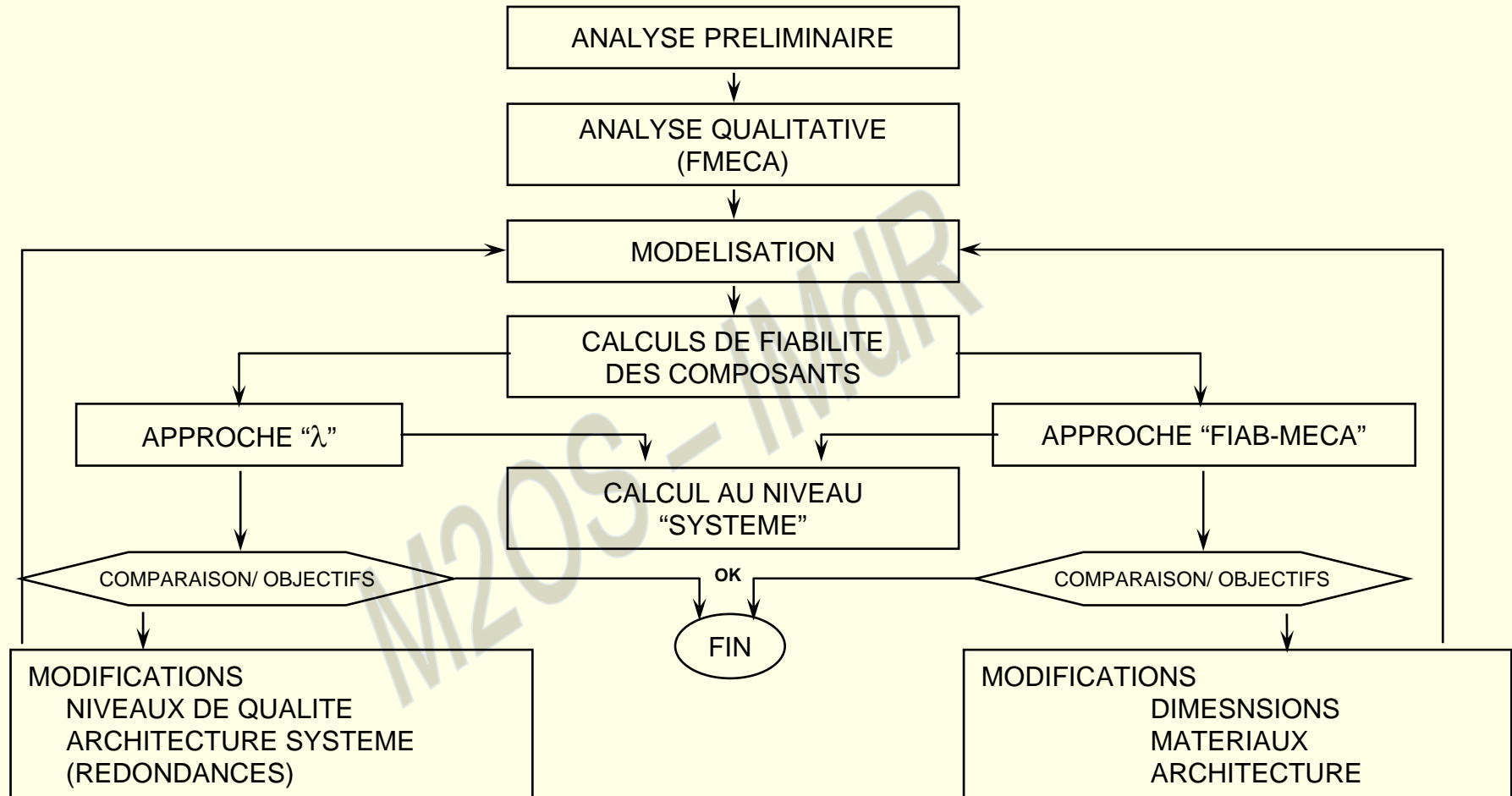
$F(t)$  = source d'excitation aléatoire

$Y(t)$  étant le vecteur  $\begin{vmatrix} X(t) \\ \dot{X}(t) \end{vmatrix}$

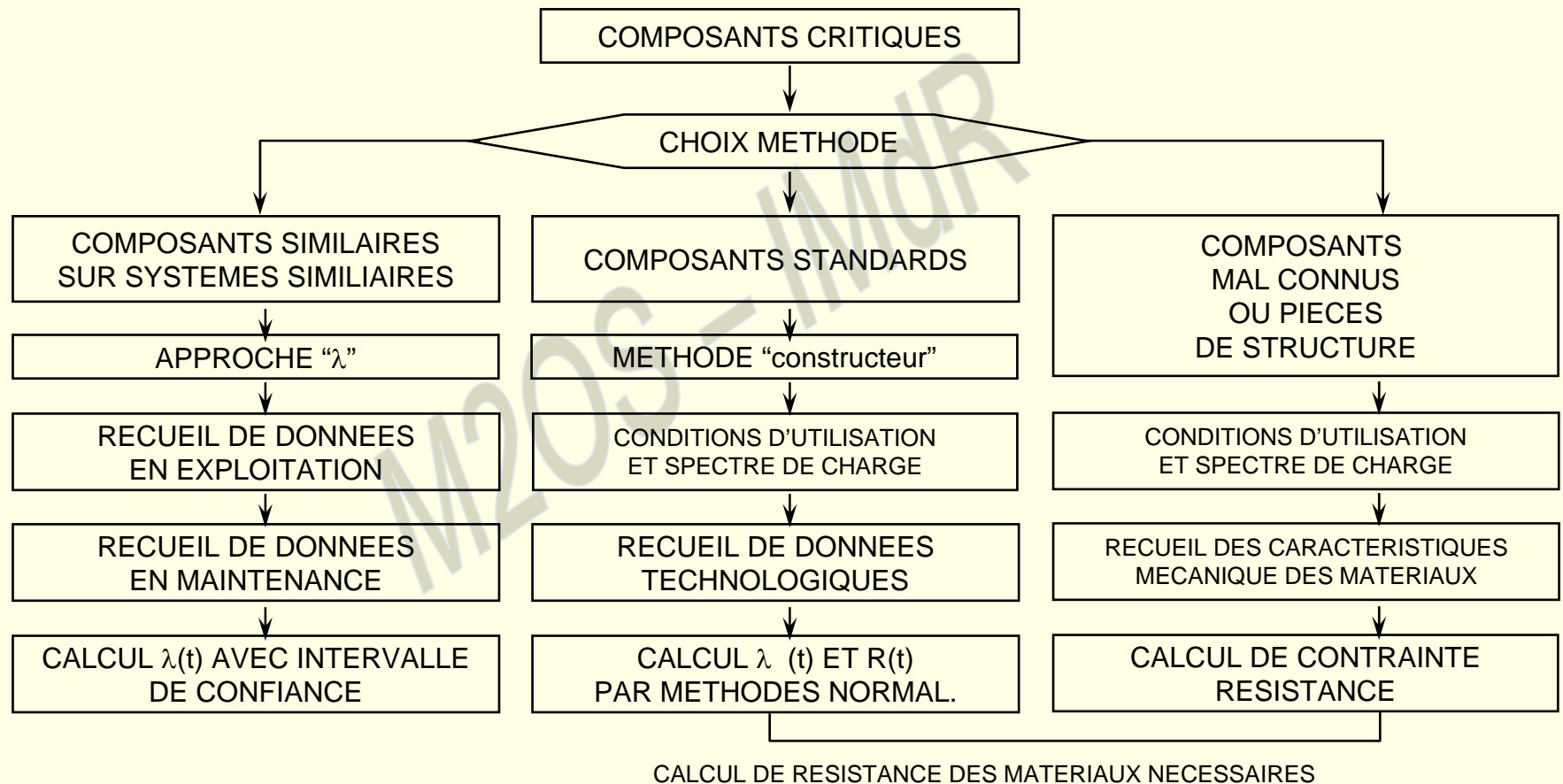
D'une façon générale, les équations de FP peuvent être intéressantes pour analyser des systèmes simples et en déduire certaines règles ou modèles élémentaire qui sont ensuite vérifiés sur des cas plus complexes.

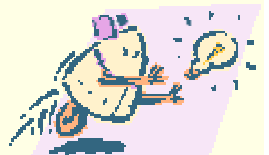
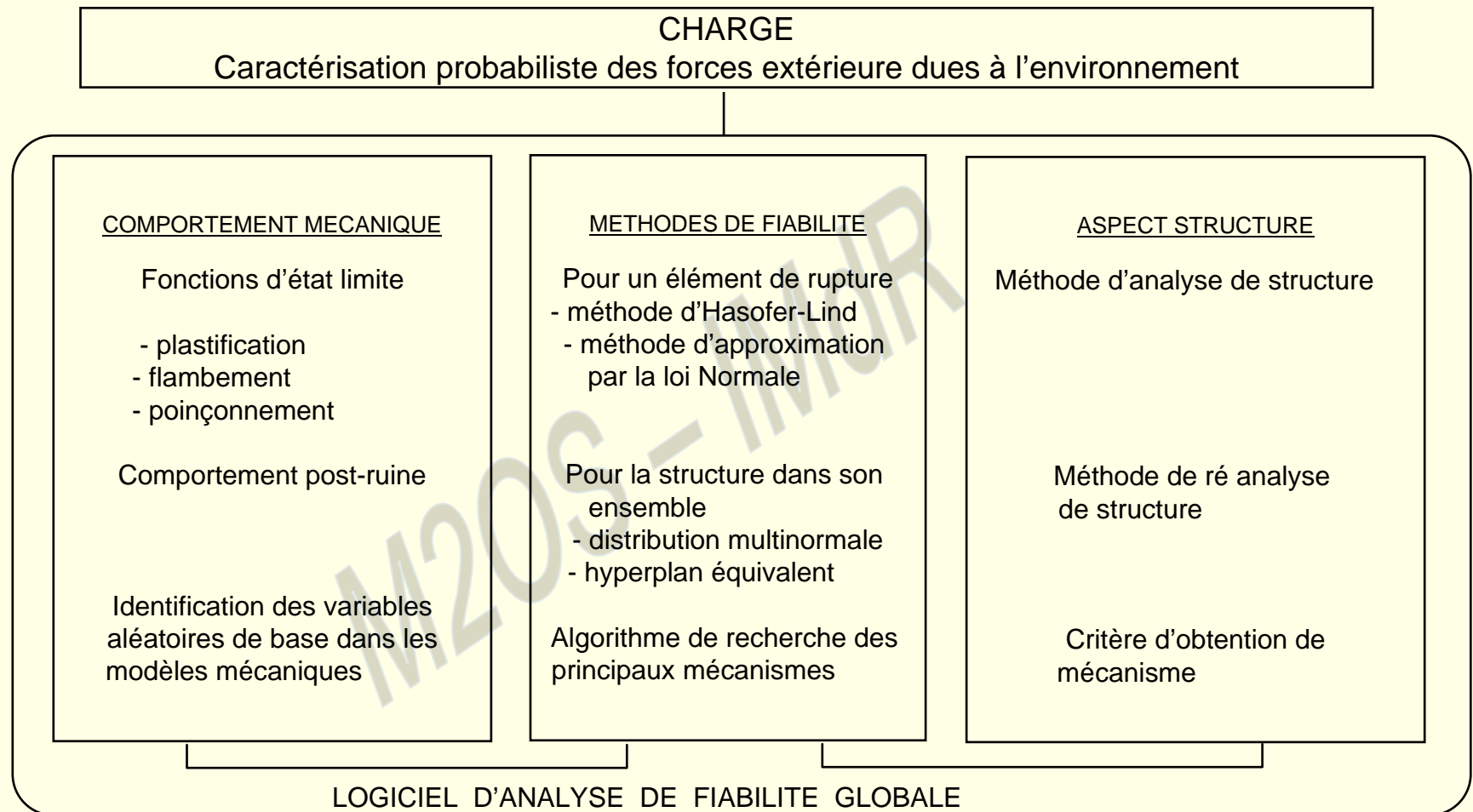






# APPROCHE FIABILITE EN MECANIQUE

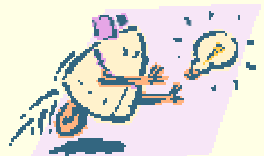
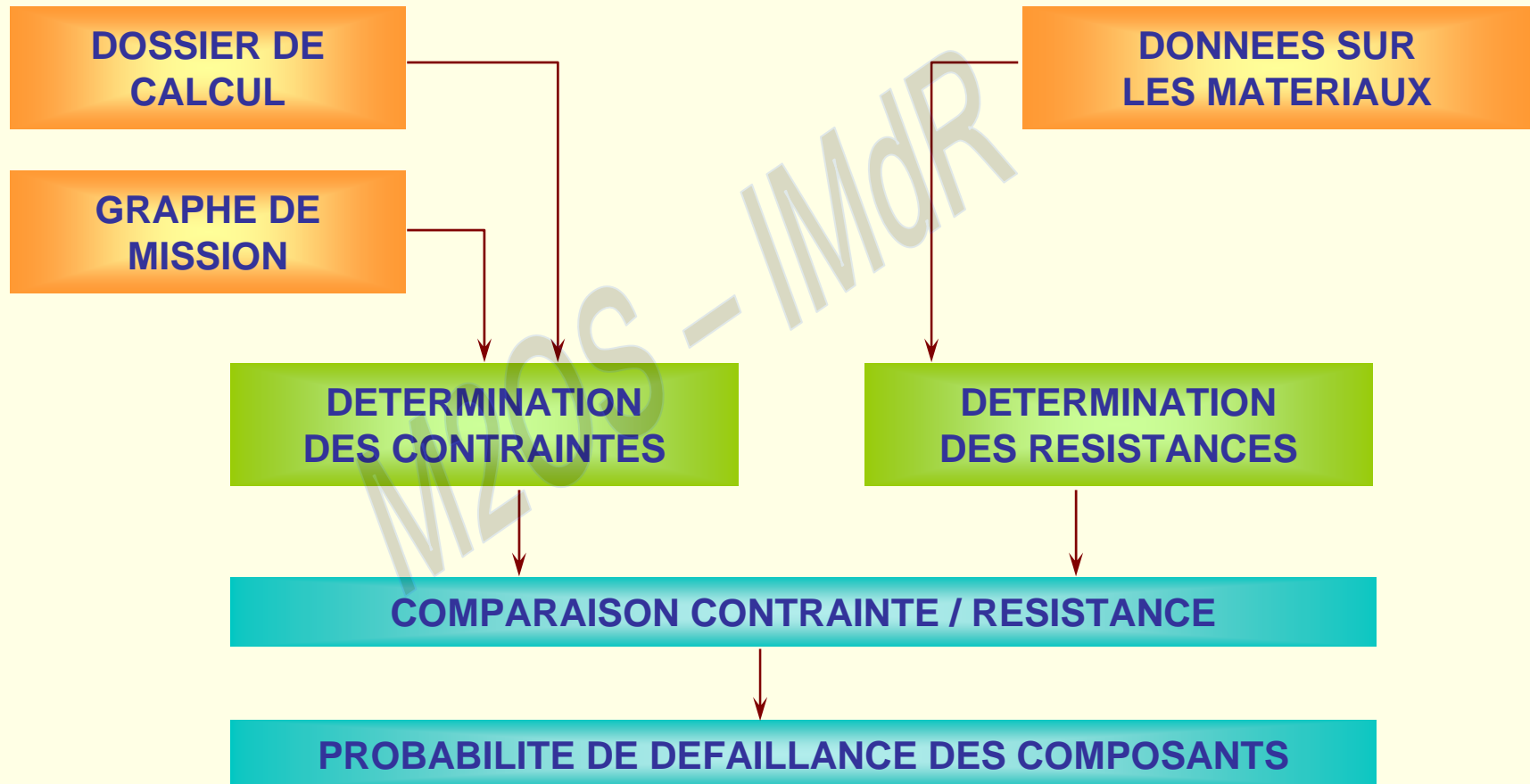


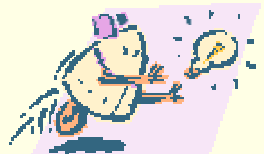
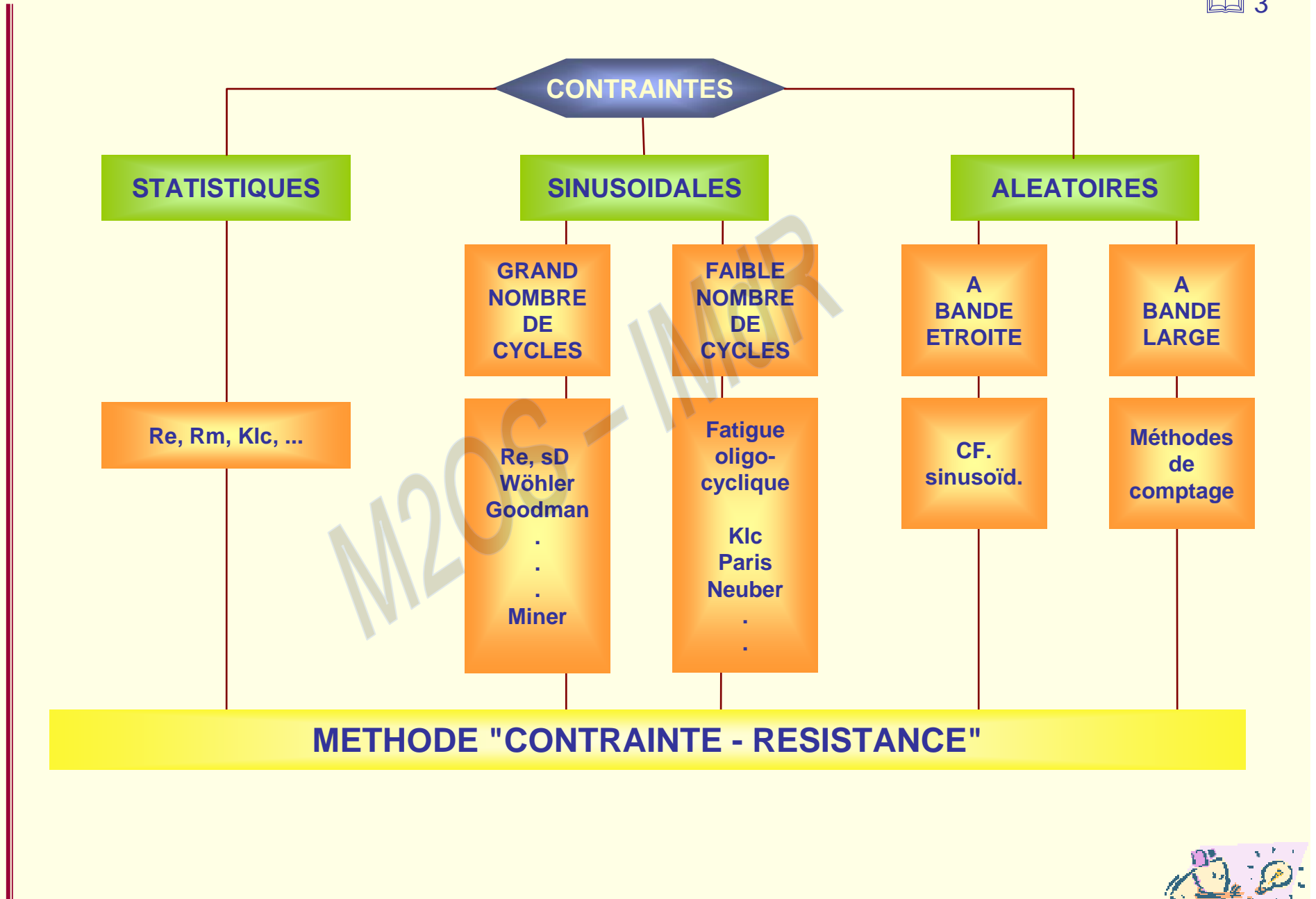


# 3. THEORIE DE CONTRAINTE / RESISTANCE



# METHODOLOGIE "CONTRAINTES-RESISTANCE"





## CONTRAINTE ET RESISTANCE

### VALEURS DE RESISTANCE A LA CONTRAINTE

#### Données nécessaire :

- limite d'élasticité
  - charge à la rupture
  - limite de fatigue
  - module de Young, de Poisson
  - $K_t$ ,  $q$ , etc ...
- si possible  
sous forme  
distributionnelle

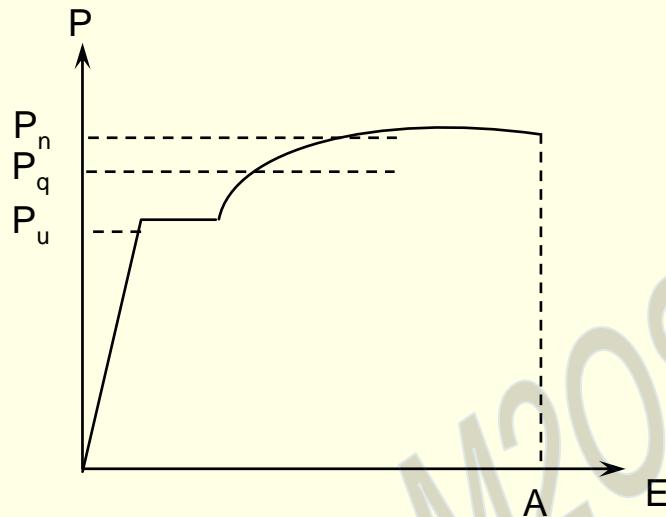
#### Sources :

- données fabricant
- travaux Tucson
- Metal Handbook (AMS)
- MIL HDBK 5B
- essais



# CONTRAINTE ET RESISTANCE

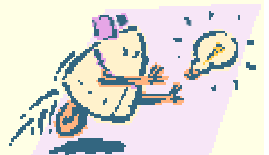
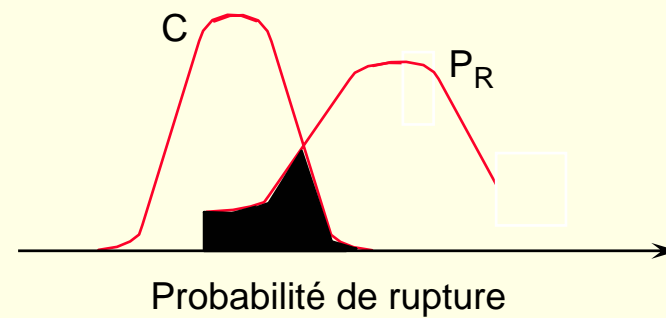
## LES CONTRAINTES STATIQUES



Incertitudes sur  
la contrainte C

Incertitudes sur la résistance P

- Environnement
- Tolérances de montage d'usinage
- Traitements thermiques
- Hétérogénéités
- Etc.





## FACTEURS DE SECURITE

$$1) \quad SF = \frac{US}{WS}$$

WS = CONTRAINTE DE TRAVAIL

US = RESISTANCE MAXIMUM

$$2) \quad SF = \frac{MSL}{NSL}$$

MSL = CHARGE MAXIMUM

NSL = CHARGE NORMALE

$$3) \quad SF = \frac{MS}{ML}$$

MS = RESISTANCE MOYENNE

ML = CHARGE MOYENNE

$$4) \quad SF = \frac{YS}{WS}$$

YS = LIMITE ELASTIQUE

WS = CONTRAINTE DE TRAVAIL



$$5) \quad SF = \frac{DS}{MNS}$$

DS = CONTRAINTE DE DOMMAGE (LIMITE DE FATIGUE)

MNS = CONTRAINTE MAXIMUM CONNUE

$$6) \quad FSg = F_{ol} \cdot F_{ld} \cdot F_{su}$$

FSg = APPLICABLE AUX ENGRENAGES

F<sub>ol</sub> = CORRECTION DE SURCHARGE

F<sub>ld</sub> = CORRECTION DE DISTRIBUTION DE CHARGE

F<sub>su</sub> = FACTEUR DE SECURITE USUEL

$$7) \quad FS = \prod_{i=1}^3 f_i$$

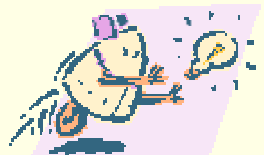
f<sub>1</sub> = FACTEUR DE CHOC

f<sub>2</sub> = FACTEUR D'ELASTICITE

f<sub>3</sub> = MARGE REELLE DE SECURITE

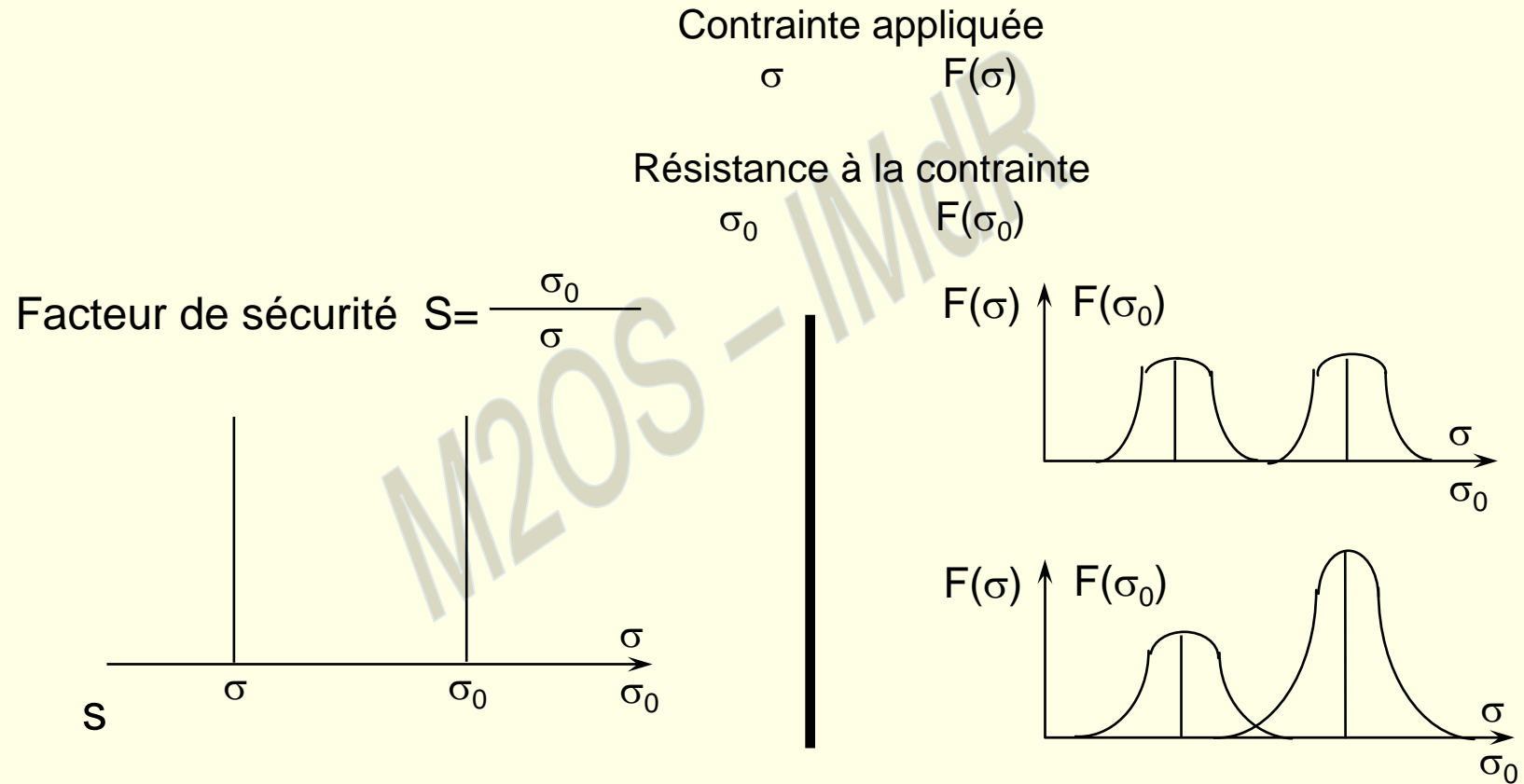
$$f_1 + \frac{S_{sh}}{S_g} = \frac{\text{Contrainte g\u00e9n\u00e9r\u00e9e par le choc}}{\text{Contrainte normale}}$$

$$f_2 + \frac{US}{EL} = \frac{\text{R\u00e9sistance maximum}}{\text{Limite \u00e9lastique}}$$



# FIABILITE EN MECANIQUE

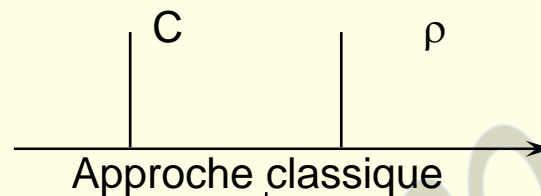
## ASPECTS DETERMINISTES - ASPECTS PROBABILISTES



## COMPARAISON "CONTRAINTE ET RESISTANCE"

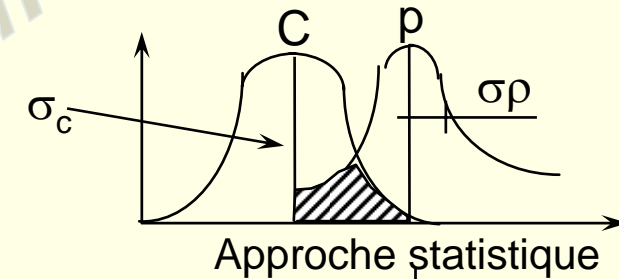
Entrées : Contrainte  $C$  et résistance par composant  
Loi de survie et réparation résistance

Sorties : Loi de fiabilité du composant



Coefficient de sécurité

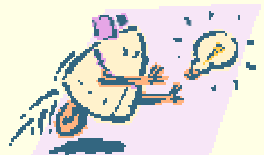
$$k = \frac{\rho}{C}$$

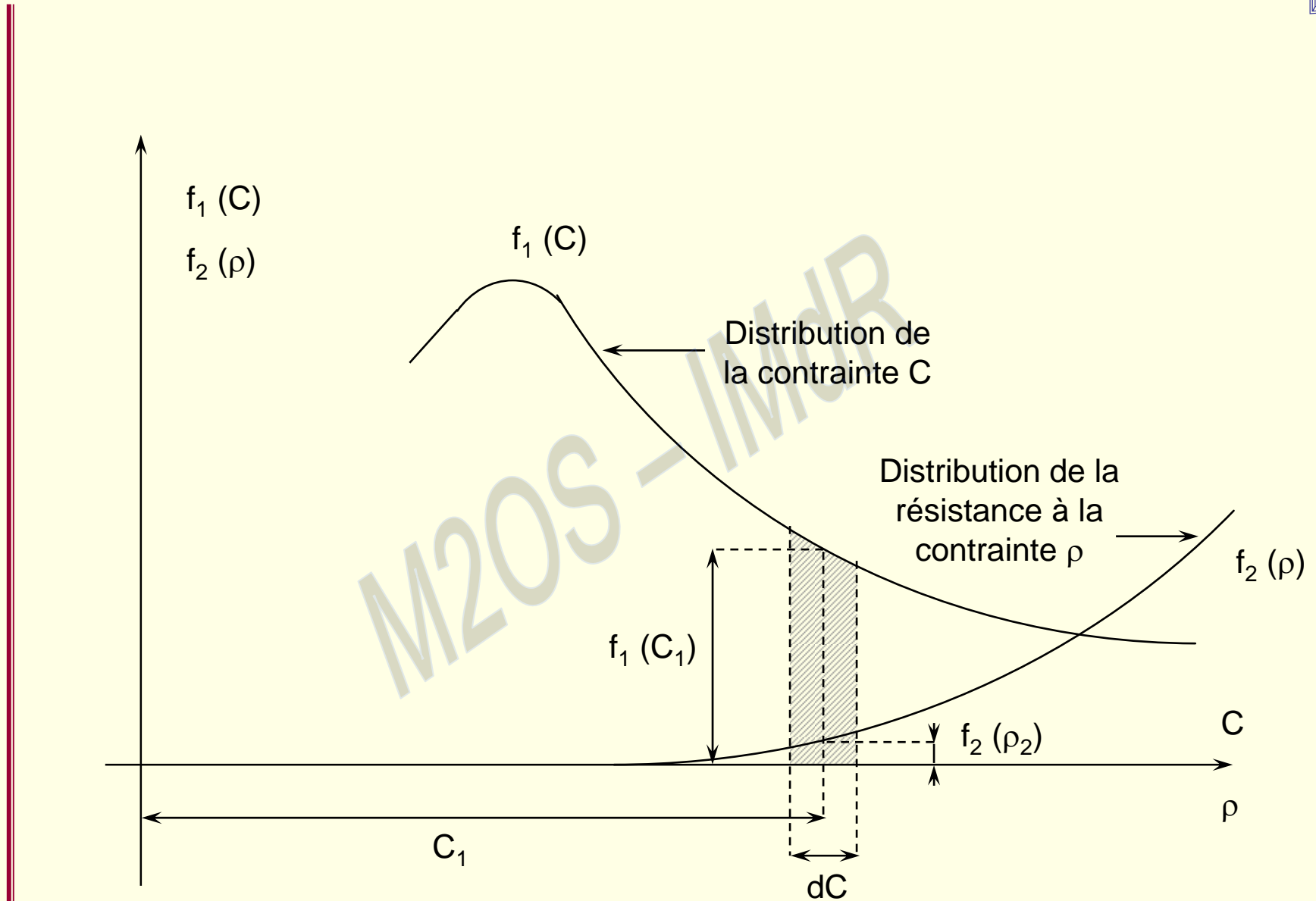


Fiabilité

$$R = \text{proba} (\rho > C)$$

Outils : Algèbre des V.A.  
Simulation de Monte-Carlo  
Méthode R / C  
Transformée de Mellin  
Dérivées partielles





La probabilité d'une contrainte  $C_1$  est égale à la surface de l'élément différentiel  $dC$ , soit :

$$\text{Prob} \left\{ C_1 - \frac{dC}{2} \leq C_1 \leq C_1 + \frac{dC}{2} \right\} = f_1(C_1) dC$$

La probabilité d'une résistance à la contrainte  $\rho$  supérieure à  $C_1$  est :

$$\text{Prob}(\rho > C_1) = \int_{C_1}^{\infty} f_2(\rho) d\rho$$

La probabilité d'avoir une contrainte  $C$ , et d'y résister est donc le produit des deux possibilités, c'est la fiabilité relative à la possibilité d'une contrainte  $C_1$ , soit :

$$dR = f_1(C_1) dC \int_{C_1}^{\infty} f_2(\rho) d\rho$$

La fiabilité est la probabilité que la résistance à la contrainte  $\rho$  soit supérieure à toutes valeurs possibles de  $C$ , soit :

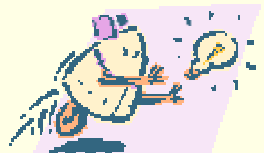
$$R = \int_{-\infty}^{+\infty} dR = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(C) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\rho) d\rho \right) dC$$

$$R = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(C) \left( \int_C^{+\infty} f_2(\rho) d\rho \right) dC$$

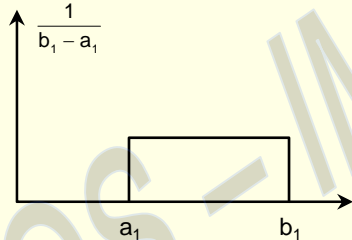
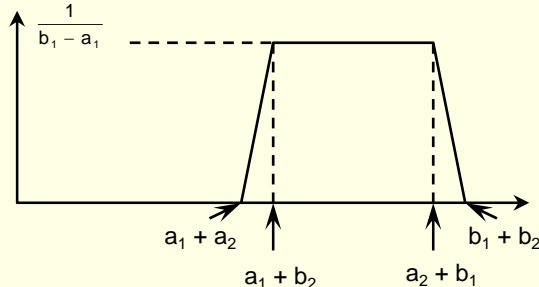
On aurait pu raisonner de la même façon en considérant une résistance à la contrainte  $\rho_2$  et la probabilité que la contrainte appliquée soit inférieure.

On aurait alors :  $dR = f_2(\rho_2) d\rho \int_{-\infty}^{\rho_2} f_1(C) dC$ , soit :

$$R = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\rho) \left( \int_C^{\rho} f_1(C) dC \right) d\rho$$



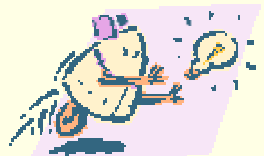
# AUTRES TRANSFORMATION

Transf. z	Distributions d'origine	Distributions finale
$Z = X_1 + X_2 \dots X_n$	Toute normales suivant $N(u_i, \sigma_i)$	Normales suivant : $N\left(\sum_i u_i, \sqrt{\dots}\right)$
$Z = X_1 + X_2$	Uniformes dans $(a_1, b_1)$ et $(a_2, b_2)$ 	$u_z = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{2} \quad \sigma_z^2 = \frac{(b_1 + a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}{12}$ Distribution trapézoïdale Soit $(b_1 - a_1) < (b_2 - a_2)$ on obtient : 
$Z = X_1 + X_2 \dots X_n$	Distributions exponentielles indépendantes de même paramètres $\beta$	Distributions Gamma $f(Z) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} Z^\alpha e^{-Z/\beta}$ avec $\alpha = n - 1$
$Z = X_1 + X_2 \dots X_n$	Distributions Gamma de même $\beta$ et de paramètres $a_1, a_2 \dots a_n$	Distributions Gamma de même $\beta$ et $\alpha = a_1 + a_2 + \dots a_n + (n - 1)$



## MOYENNES ET DISPERSIONS DE FONCTIONS DE VARIABLES ALEATOIRES

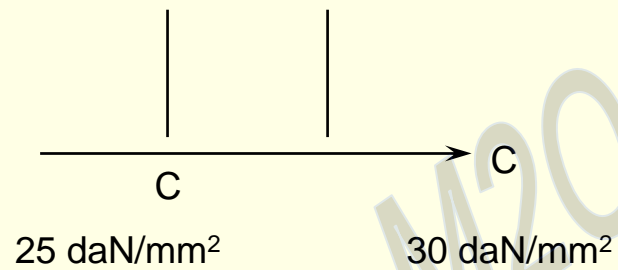
Z	$U_Z$	$V(Z) = \sigma_Z^2$	Observations
$aX$	$a U_X$	$a^2 \sigma_X^2$	$a = \text{constante}$
$X + a$	$U_X + a$	$\sigma_X^2$	$a = \text{constante}$
$X - Y$	$U_X - U_Y$	$\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2r \sigma_X \sigma_Y$	V.A. dépendantes
		$\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$	V.A. indépendantes
$X \cdot Y$	$U_X U_Y + r \sigma_X \sigma_Y$ $U_X U_Y$	$U_X^2 \sigma_Y^2 + U_Y^2 \sigma_X^2 + \sigma_X^2 \sigma_Y^2 + r^2 \sigma_X^2 \sigma_Y^2 + 2r U_X U_Y \sigma_X \sigma_Y$ $U_X^2 \sigma_Y^2 + U_Y^2 \sigma_X^2 + \sigma_X^2 \sigma_Y^2$	V.A. dépendantes Normales  V.A. indépendantes Normales
$X^2$	$U_X^2 + \sigma_X^2$	$4 U_X^2 \sigma_X^2 + 2 \sigma_X^4$	
$X / Y$	$U_X / U_Y$  $(U_X / U_Y) + (U_X \sigma_Y / U_Y^2)(r \sigma_X \sigma_Y / U_X U_Y)$	$U_X^2 \sigma_Y^2 + U_Y^2 \sigma_X^2 / U_Y^4$  $U_X^2 / U_Y^2 (\sigma_X^2 / U_X^2 + \sigma_Y^2 / U_Y^2 - 2r \sigma_X \sigma_Y / U_X U_Y)$	V.A. dépendantes Formules très approchées  V.A. indépendantes Formules très approchées
$X^{1/2}$	$(U_X^2 - \sigma_X^2 / 2)^{1/4}$	$U_X - (2 / \sigma_X - \sigma_X^2 / 2)^{1/2}$	
$\prod_{i=1}^n X_i$	$\prod_{i=1}^n U_{X_i}$	$\prod_{i=1}^n (U_{X_i}^2 + \sigma_{X_i}^2) - \prod_{i=1}^n U_{X_i}^2$	V.A. indépendantes



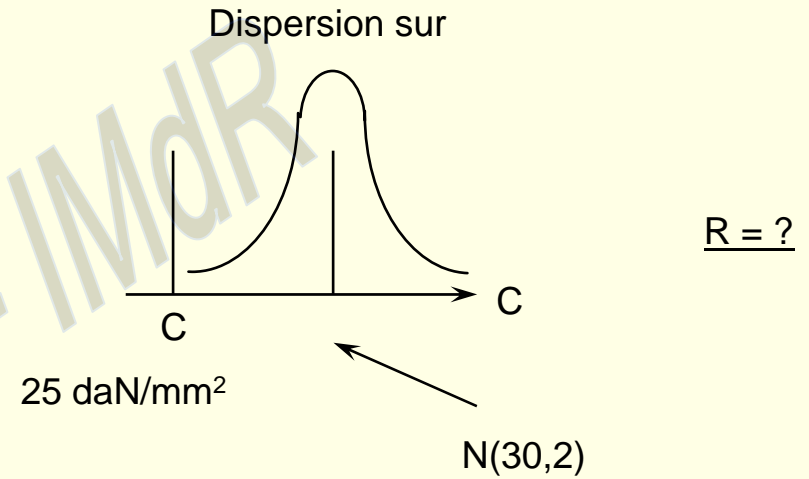


# CALCUL C/R

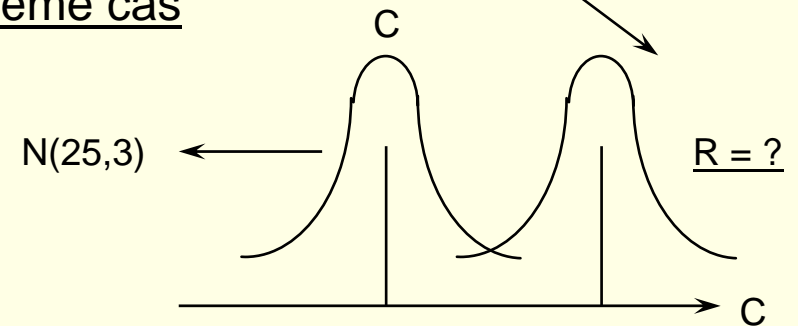
## 1er cas



## 2ème cas



## 3ème cas



## CORRECTION

### 1er cas

$$C_s = \frac{30}{25} = 1,2$$

### 2ème cas

$$u = \frac{25 - 30}{2} = -2,5$$

$$R = 1 - F(-2,5) = F(2,5)$$

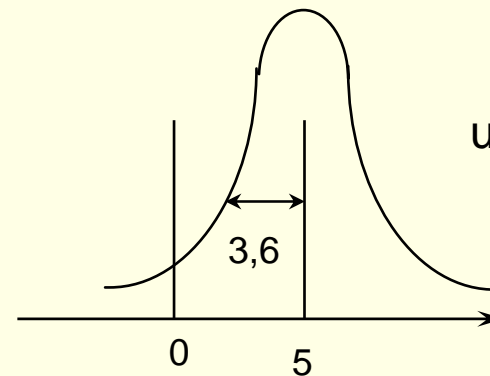
$$\underline{R = 0,9938}$$

### 3ème cas

$$R = P(> C) = P(> 1) \\ = P(\log > 0)$$

$$\text{Log} = N\left(\mu - \mu_C, (\sigma^2 + \sigma_C^2)^{1/2}\right)$$

$$\Rightarrow N(5, 3,6)$$



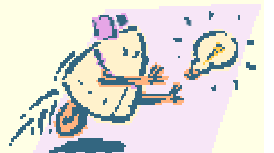
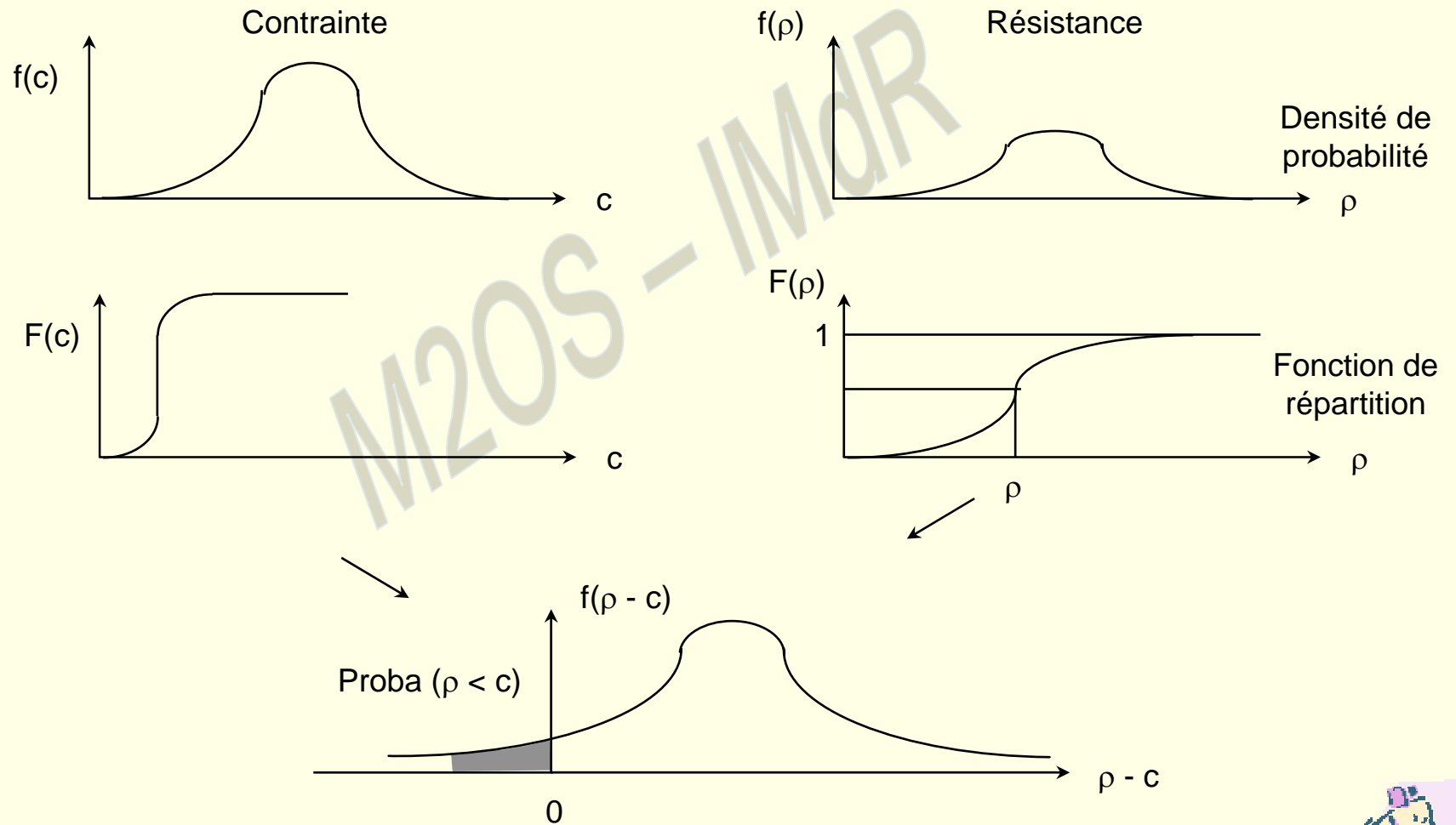
$$u = \frac{0 - \mu}{\sigma} = -\frac{\mu}{\sigma} = -1,38$$

$$R = F(1,38)$$

$$R = 0,916$$



## Comparaison contrainte/résistance Méthode de simulation de Monte-Carlo



# 4. FATIGUE



## CONTRAINTE ET RESISTANCE LES CONTRAINTES DE FATIGUE

Matériau soumis à des cycles de contrainte



création et progression de fissures amorcées  
aux défauts de la matière (pailles, soufflures, ...)



Fragilisation, "fatigue"



rupture au bout d'un certain nombre de cycles  
pour des contraintes  $<$  limite d'élasticité

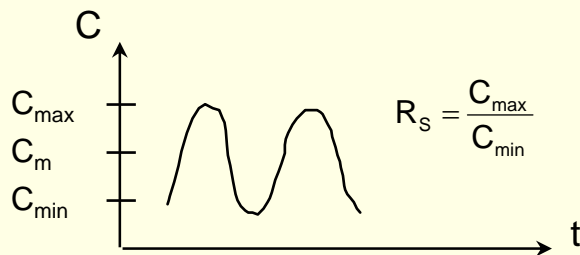
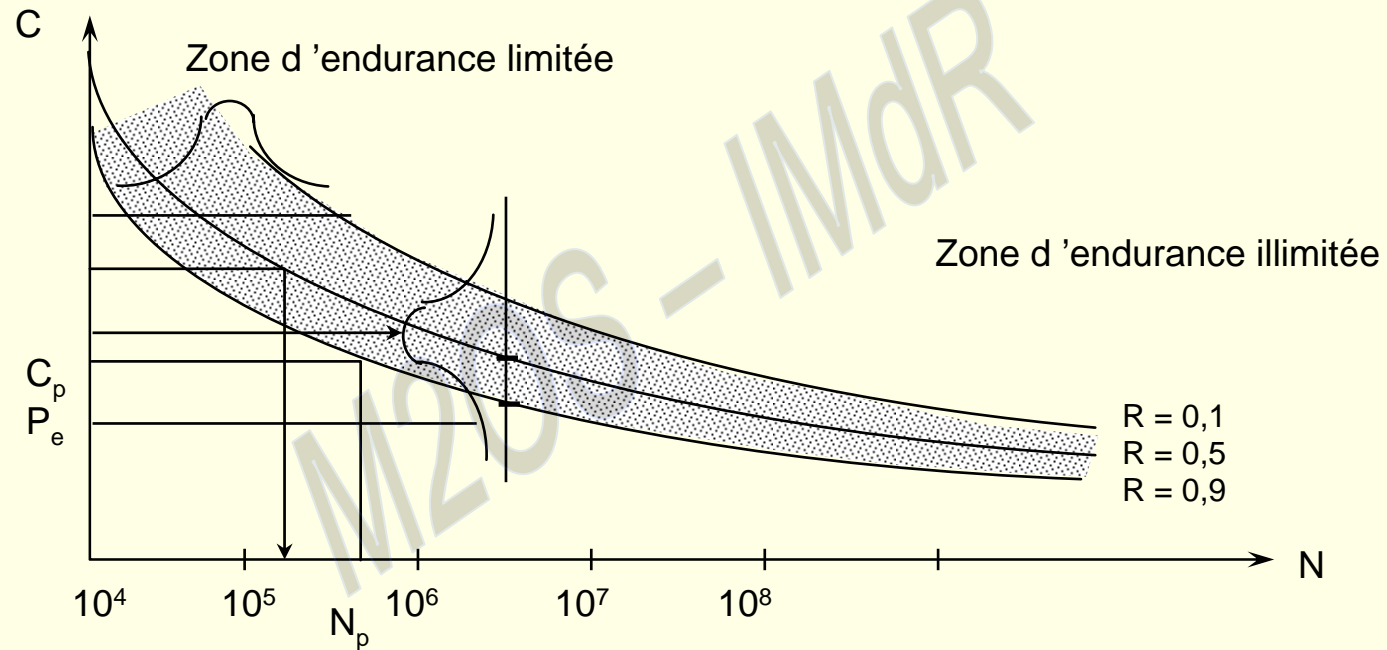
## ESSAIS DE FATIGUE

Éprouvettes soumises à des efforts cycliques  
au niveau  $C_i$  Rupture à  $N_i$  cycles

Courbes d'endurance  
(S.N)



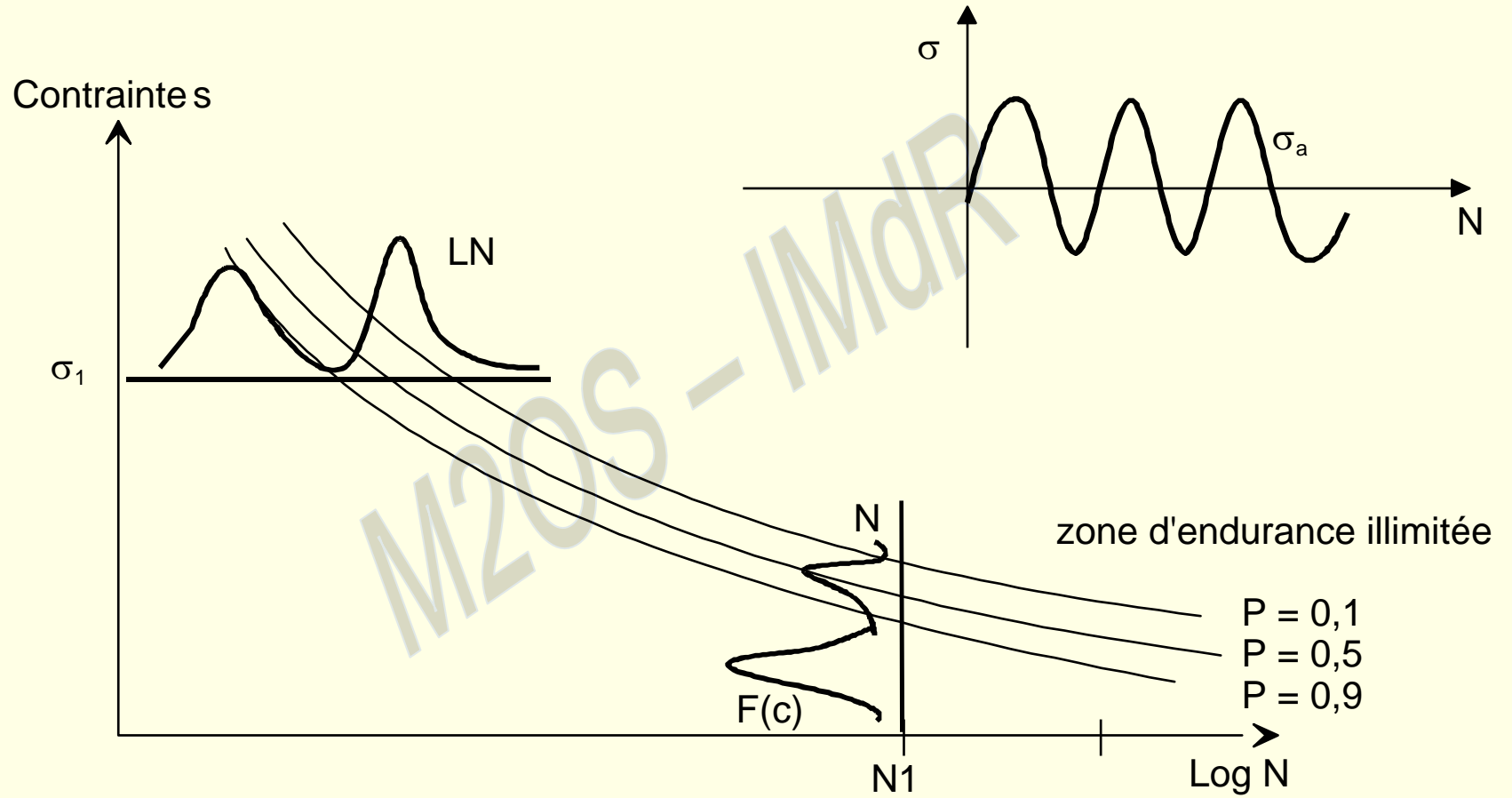
## CONTRAINTE ET RESISTANCE COURBE D'ENDURANCE



Sollicitation

- alternées  $R_{sx} = 1$
- répétées  $R_s = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$
- ondulées  $C_m \neq 0$





## CONTRAINTE ET RESISTANCE LIMITE D'ENDURANCE

$$\rho_e = K_a \cdot K_b \cdot K_c \cdot K_d \cdot K_e \cdot \dots \cdot \rho'_e$$

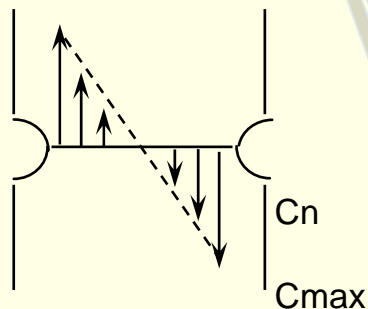
$\rho'_e$  = limite d'endurance sur éprouvette lisse

$K_a$  = effet d'échelle  $K_a = 1$   $1 < 7,5 \text{ mm}$   
 $0,95$   $7,5 < d < 50$   
 $0,75$   $d > 50 \text{ mm}$

$K_b$  = effet de surface

$K_c$  = effet de température

$K_e$  = effet d'entaille

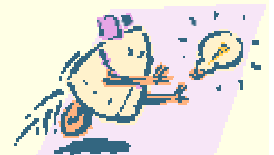


$$K_t = \frac{C_{max}}{C_n} \quad \text{(concentration de contraintes)} \\ \text{(NEUBER)}$$

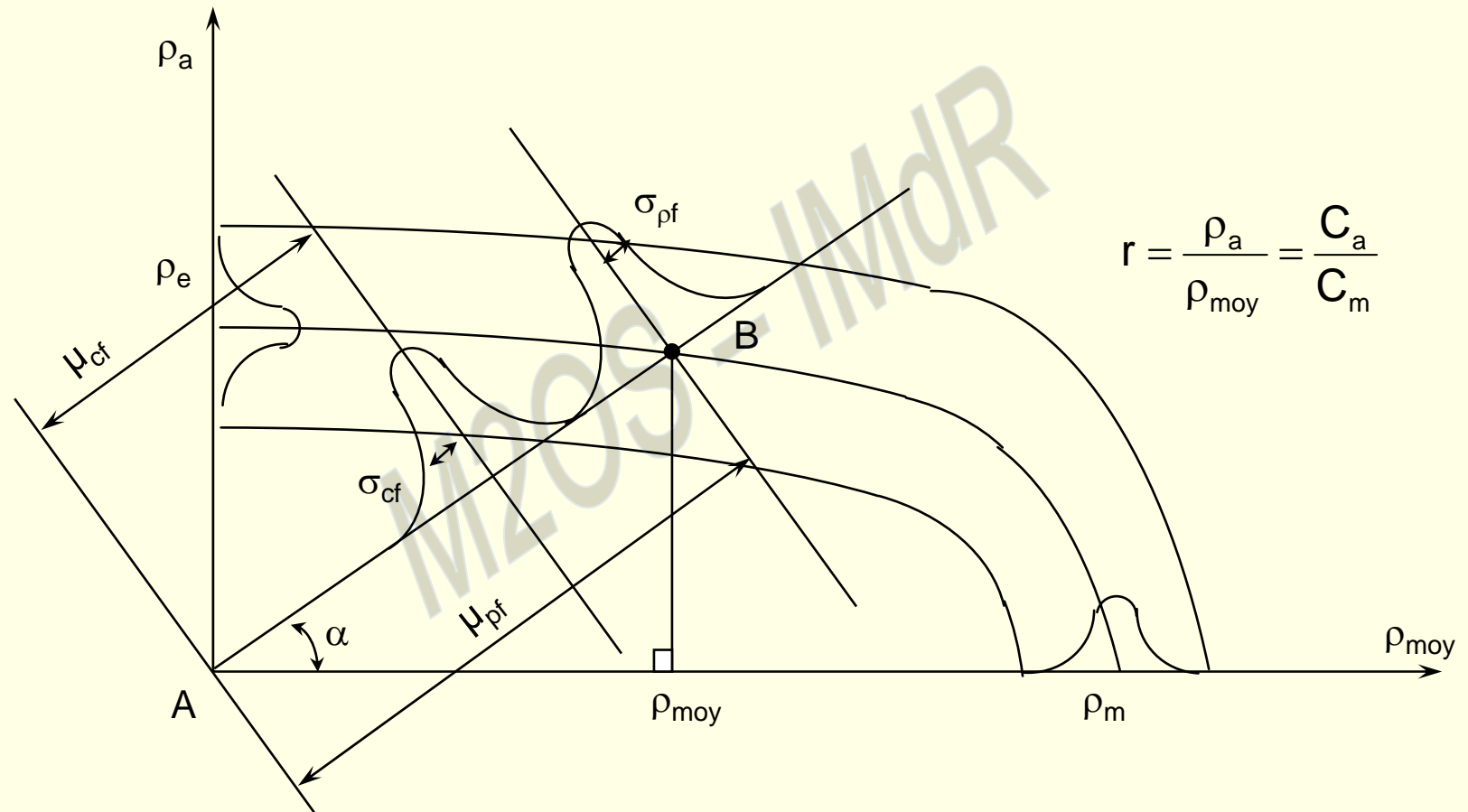
$$K_n = \frac{\rho_e}{\rho_{en}} \quad f = \frac{K_n - 1}{K_t - 1}$$

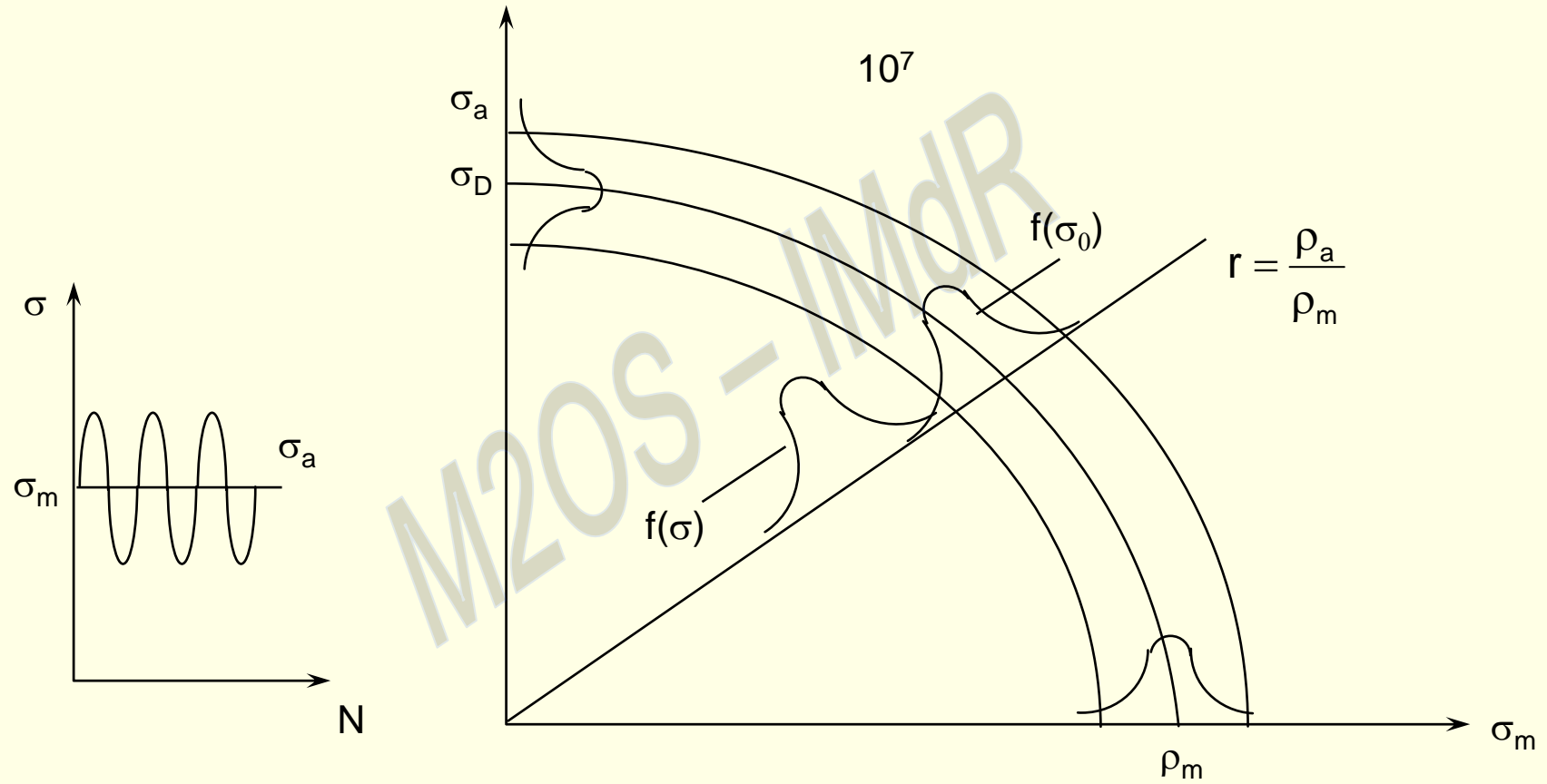
$K_r$  = effets divers (corrosion, radiations....)

$$K_e = 1 / K_n$$



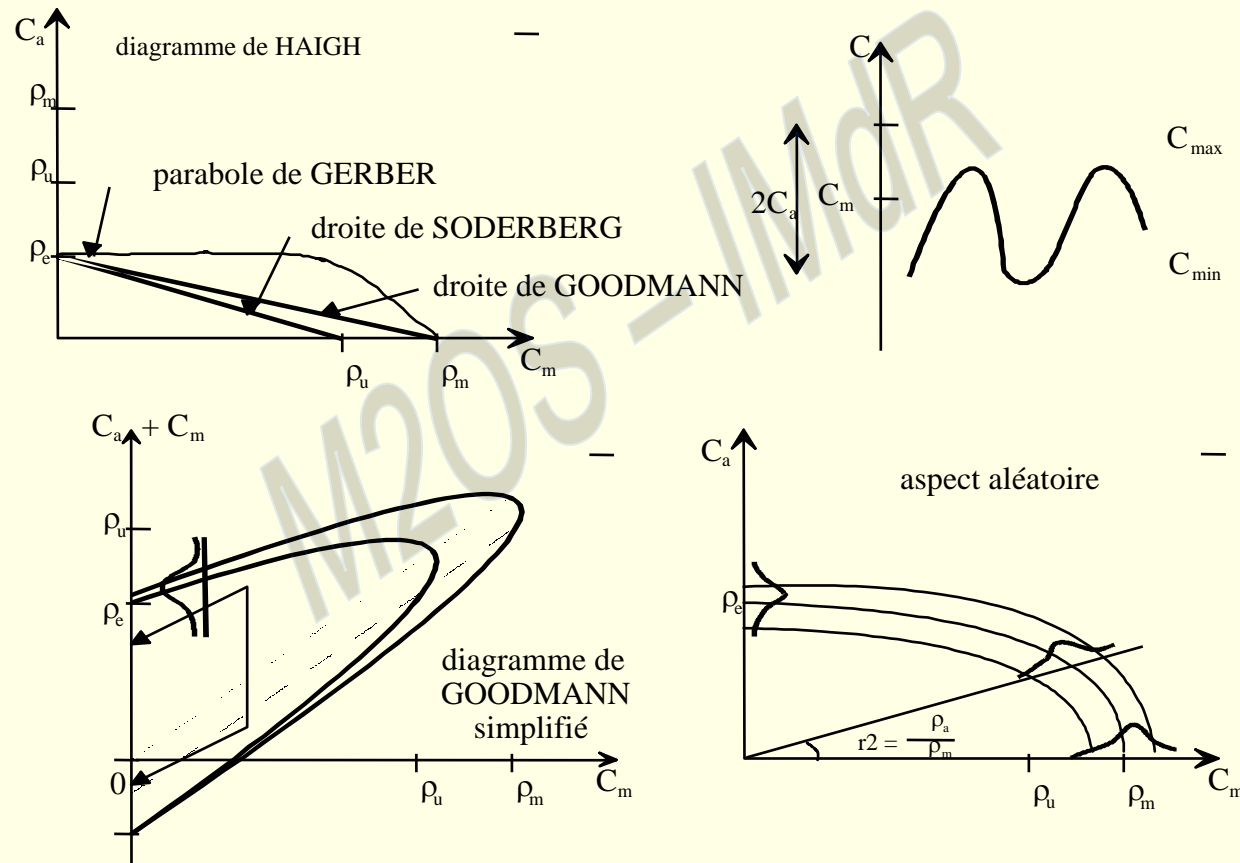






# FATIGUE

## DIAGRAMMES DIVERS



## CONTRAINTE ET RESISTANCE

### Courbe d'endurance

#### Modèles

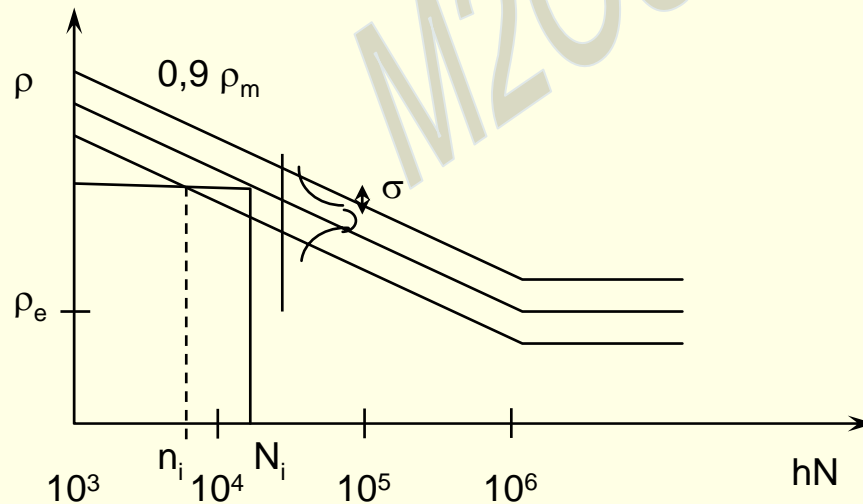
Wöhler

$$\ln N = a - b c$$

Bastenaire

$$N = \frac{A}{c - \rho_e} \exp[-(c - \rho_e)]$$

#### Courbe approchée

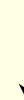


#### Butot - Lieurade

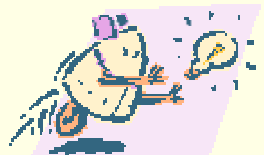
$$\rho_e' = 0,41 \rho_m + 2A \text{ (N/mn}^2\text{)}$$

$$\sigma \approx 0,08 \rho_e'$$

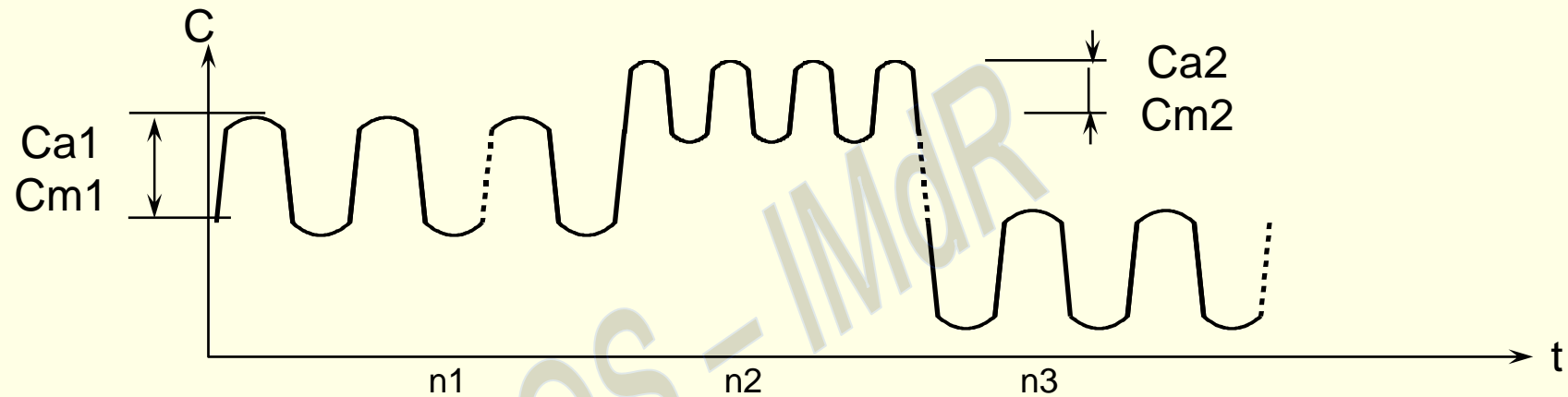
$$\rho_e = K_a \cdot K_b \cdot K_c \dots \rho_e'$$



Éprouvette lisse en flexion rotative



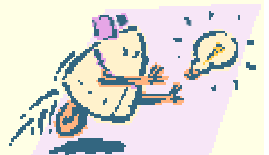
## CAS DES CONTRAINTES SINUSOIDALES



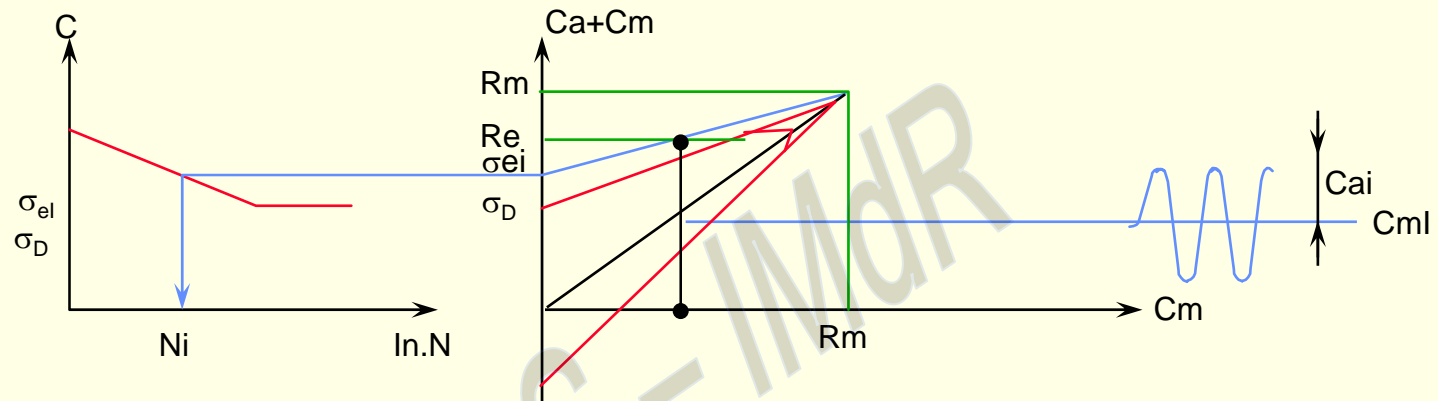
- 1 TRANSFORMER LES CONTRAINTES COMBINEES EN CONTRAINTE UNIAXIALE
 

Critères de	Saint Vénant Tresca Von Misés Dang.Van ....	(traction maxi) (cisaillement maxi) (énergie de distorsion maxi)
-------------	---	--
  
- 2 TRANSFORMER CHAQUE NIVEAU DE CONTRAINTES A MOYENNE NON NULLE EN CONTRAINTE EQUIVALENTE A MOYENNE NULLE
 

Diagrammes de	Goodmann Haigh
---------------	-------------------



- 3 CALCULER LE NOMBRE DE CYCLES LIMITE A PARTIR DE LA COURBE DE WOHLER DU MATERIAU



- 4 CALCUL DU DOMMAGE CUMULE

Loi de MINER  $d = \sum \frac{ni}{Ni}$

Loi de HENRY  $d = \sum \left[ \frac{ni}{Ni} \left( 1 + \left( 1 - \frac{ni}{Ni} \right) \right) \right]$

- 5 COMPARAISON AU DOMMAGE LIMITE (I)



## CRITERES DE RUPTURE

Saint Venant

$\sigma_e$  = traction

$\sigma_e$  = compression

$\sigma_e$  = cission

Comp  $\longrightarrow$   $\sigma'_e = \frac{\sigma_e}{\nu}$

Cis.  $\longrightarrow$   $\tau_e = \frac{\sigma_e}{1 + \nu}$

Coulomb Tresca

Comp  $\longrightarrow$   $\sigma'_e = \sigma_e$

Cis.  $\longrightarrow$   $\tau_e = \frac{\sigma_e}{2}$

Rankine

Cis.  $\longrightarrow$   $\tau_e = \sigma_e$

Von Mises

Comp  $\longrightarrow$   $\sigma'_e = \sigma_e$

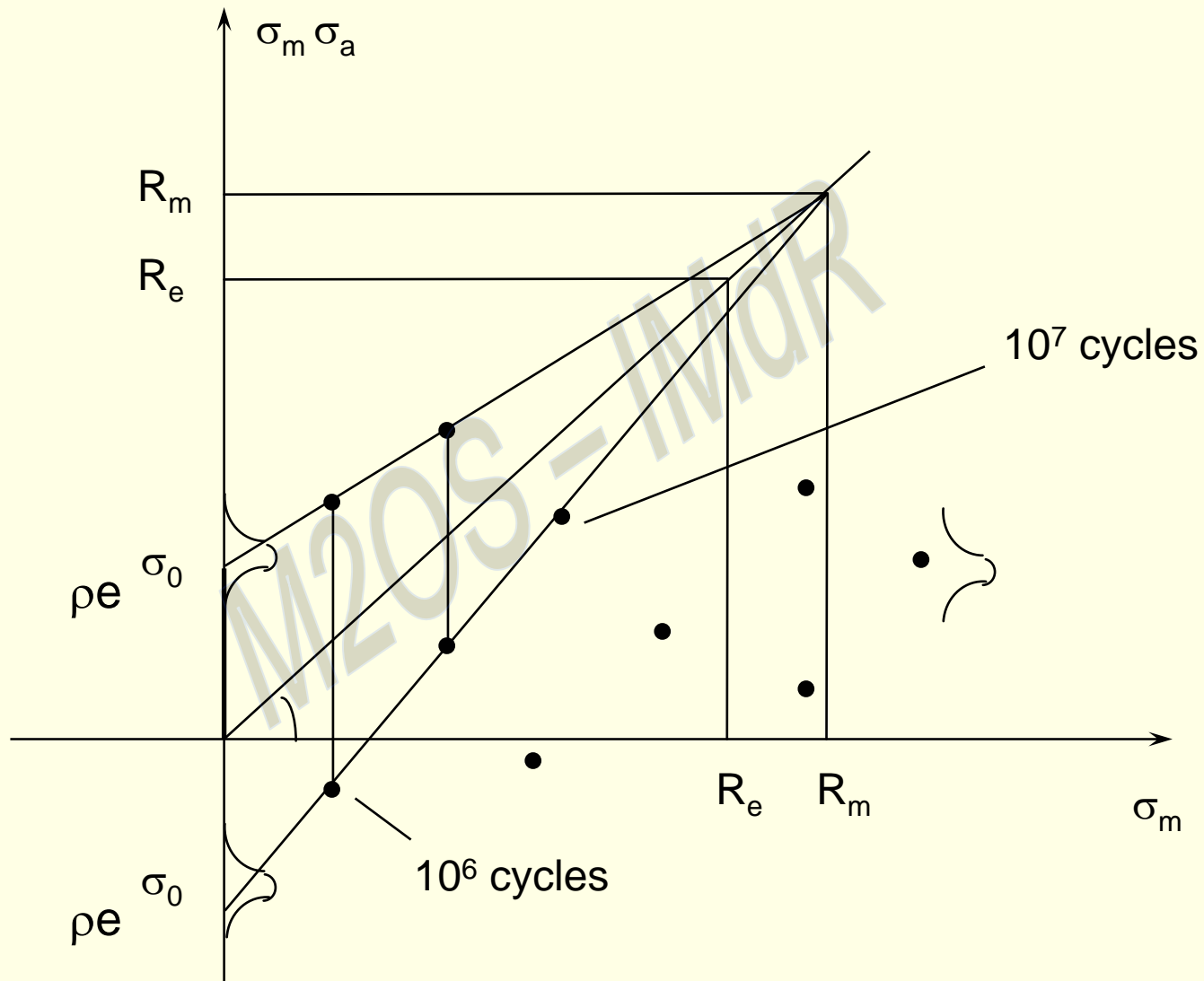
Cis.  $\longrightarrow$   $\tau_e = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}$

Torre Stassi

Cis.  $\longrightarrow$   $\tau_e = \sqrt{\frac{\sigma_e \sigma_e}{3}}$

Bahaud - Dang Van







## FATIGUE

### BASTENAIRE

Zone	Endurance	Interm	Élevées
Distribution N	1/N Normale censurée	Interm	Log N Normale
Courbes	1/N f de (c - $\rho e$ )	C - $\rho e =$ A (N+B) <sup>m</sup>	Log N f(linéaire) de c
Distribution C	Normale	Normale	Normale



## RELATION DE BASQUIN

$$\sigma_a = \sigma_f' (2N_f)^b$$

$\sigma_f'$  = coefficient de résistance en fatigue

b = Exposant de résistance à la fatigue  
varie entre -0.05 et -0.12

## RELATION DE MANSON COFFIN

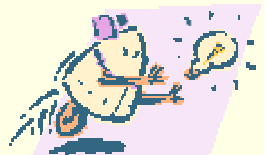
$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\sigma_f'}{2} (2N_f)^b + \varepsilon_f' (2N_f)^c$$

$$b = -\frac{n'}{1 + 5n'}$$

$$c = -\frac{1}{1 + 5n'}$$



$$n' = \frac{b}{c}$$



## RELATION DE MANSON COFFIN

- Limite de fatigue  $S_f$

$$S_f = \frac{S_u}{2} = 0.25 \text{ HB}$$

HB = dureté Brinell

$$\sigma'_f = \sigma_f = S_u + 50$$

$\sigma_f$  = contrainte vraie à rupture

- b exposant de résistance en fatigue

$$b = -\frac{1}{G} \text{Log} \left( \frac{2\sigma_f}{S_u} \right)$$

- $\varepsilon_f$  = coefficient de ductilité en fatigue

- $R_A$  = réduction de la section à la rupture

- C ductilité en fatigue = -0.5

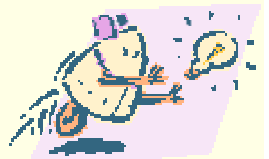


$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \frac{a}{r}}$$

$$a = \left( \frac{300}{S_u} \right)^{1.8} \times 10^3 = \left( \frac{300}{0.5 \cdot HB} \right)^{1.8} \times 10^3$$

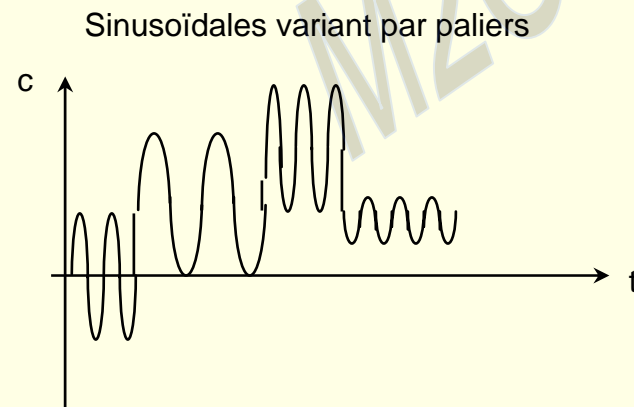
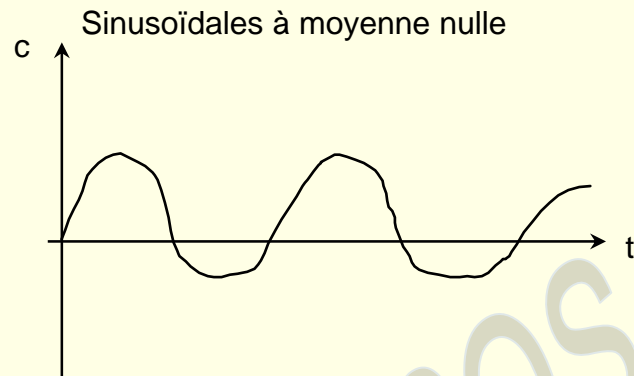
r = Rayon

M2OS - IMdR

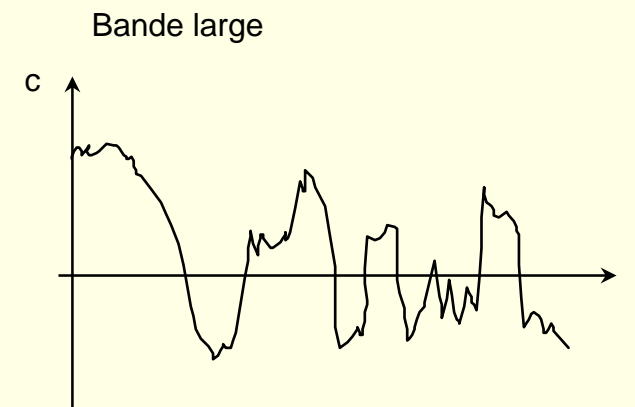
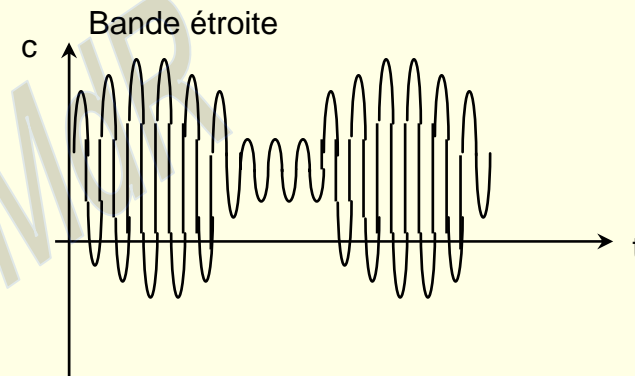


## FIABILITE EN FONCTION DU NOMBRE DE CYCLES

### DETERMINISTES



### ALEATOIRES



## DOMMAGE

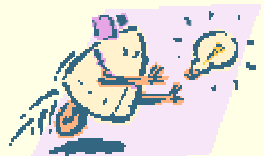
MINER       $\sum \frac{n_i}{N_i} = 1$       Understressing et Overstressing négligés

HENRY       $D = \frac{n}{N} \left[ 1 + \alpha \left( 1 - \frac{n}{N} \right) \right]$

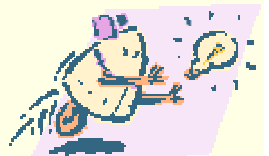
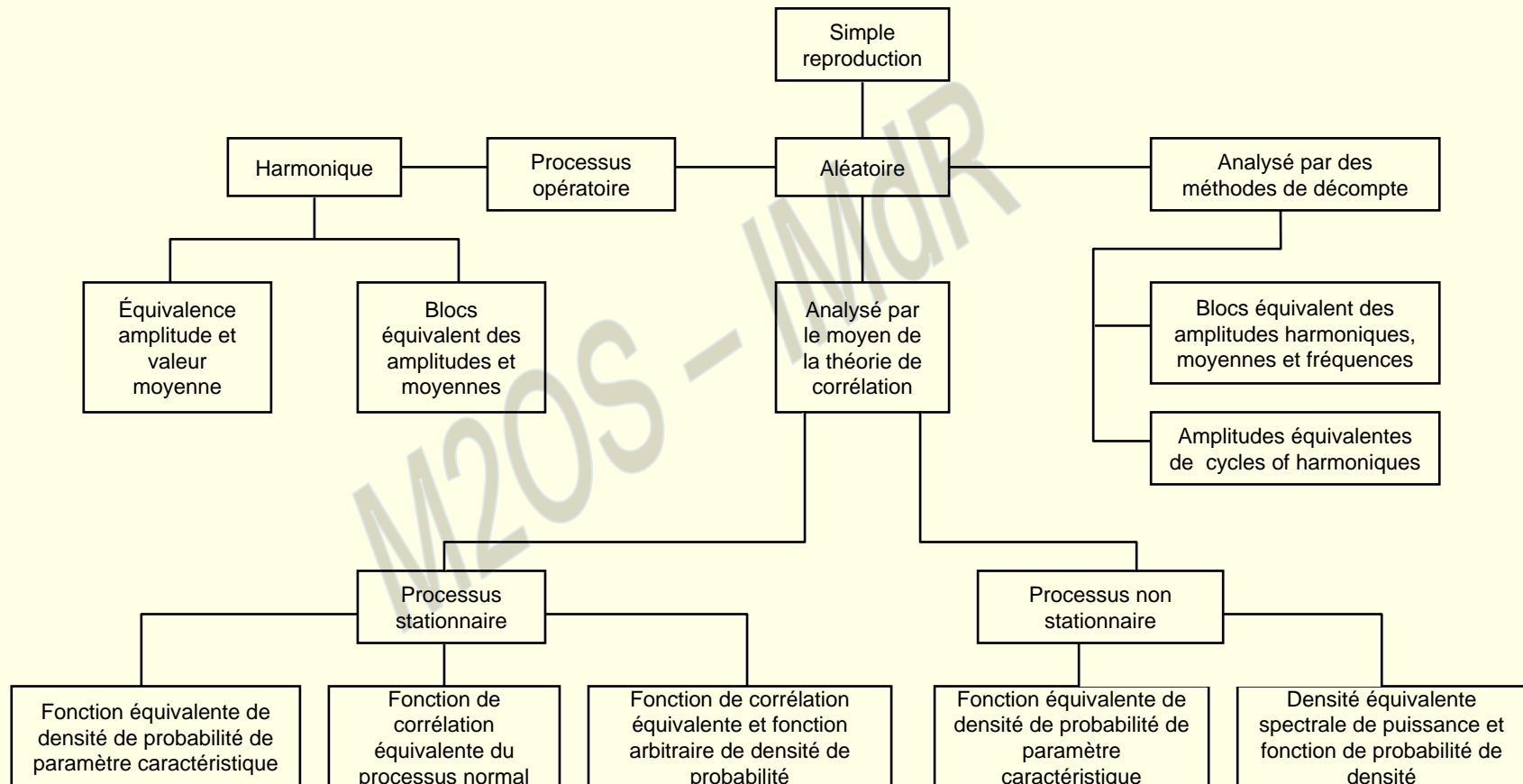
$$\alpha = \rho_e (c - \rho_e)$$

CORTEN et DOLAN      
$$Ng = \frac{N1}{\alpha_1 + \alpha_2 \left( \frac{C^2}{C^1} \right)^d + \alpha^3 \left( \frac{C^3}{C^1} \right)^d + \dots}$$

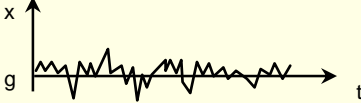
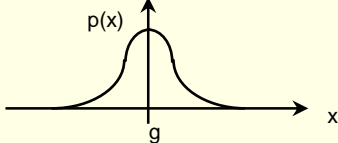

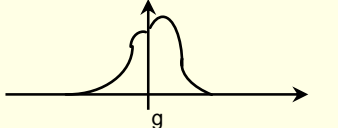
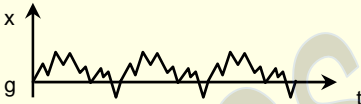
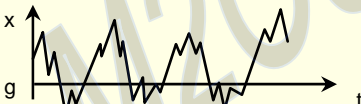

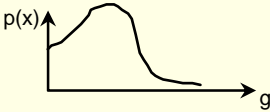
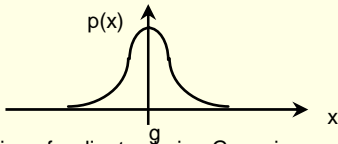

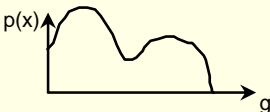
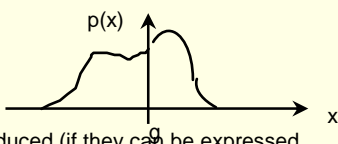
Manson et Newmark  
E.S.D.U.

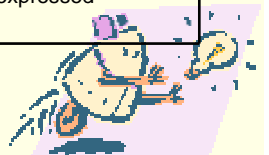


## POSSIBILITES DE SIMULATION DU PROCESSUS OPERATOIRE ALEATOIRE



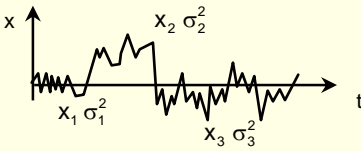
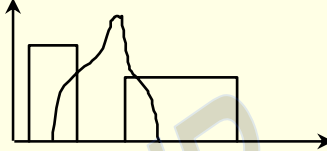


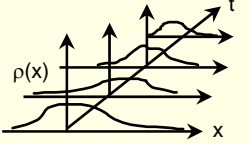
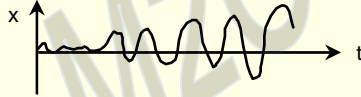
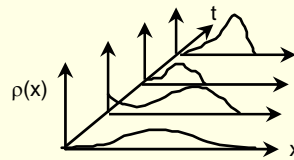
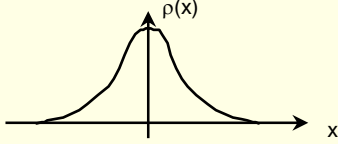
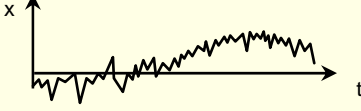
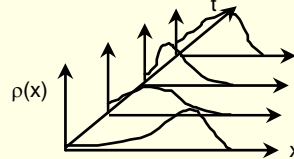
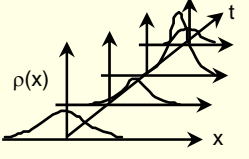
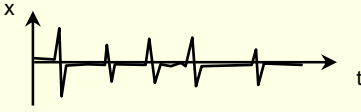
## VARIOUS POSSIBILITIES FOR SIMULATING RANDOM PROCESSES ON THE BASIS OF CORRELATION THEORY CHARACTERISTICS

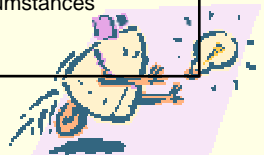
Type of process	Exemple of simulated process	Power spectral density	Probability density function of ordinates
Stationary Gaussian (with Gaussian probability density function)	 <p>From all statistical characteristics only the Gaussian probability density function is reproduced</p>	Not simulated	
Stationary with an arbitrary probability density function	 <p>From all statistical characteristics only the probability density function is reproduced (if it has an analytical form, the simulation algorithm is simpler)</p>	Not simulated	
Stationary Gaussian (with Gaussian probability density function)	 <p>From all statistical characteristics only the transition probability density matrix, characterizing transitions between two or more successive ordinates, is reproduced</p>	Not simulated	Not simulated
Stationary with an arbitrary probability density function of peaks	 <p>From all statistical characteristics only the probability density function of local peaks (envelopes) is reproduced</p>	Not simulated	Not simulated
Stationary Gaussian with an arbitrary power spectral density	 <p>From all statistical characteristics only the power spectral density is reproduced the probability density function of ordinates being Gaussian</p>		
Stationary with an arbitrary power spectral density and an arbitrary probability density function	 <p>From all statistical characteristics both the power spectral density and probability density function are reproduced (if they can be expressed analytically the simulation algorithm is simpler)</p>		




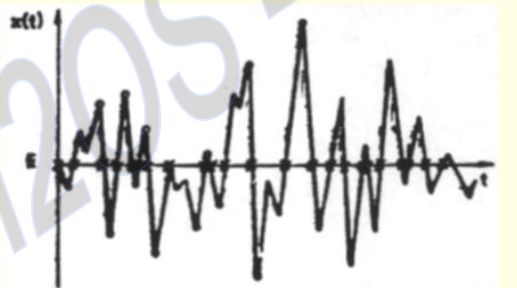
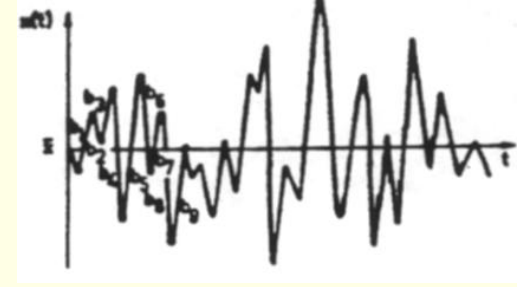


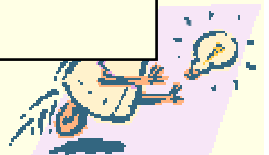
**VARIOUS POSSIBILITIES FOR SIMULATING RANDOM PROCESSES ON THE BASIS OF CORRELATION THEORY CHARACTERISTICS**

Type of process	Example of simulated process	Power spectral density	Probability density function of ordinates
Part-by-part stationary	 <p>Individual partial stationary sections of a non-stationary process are simulated according to previous algorithms (simulation of <math>\rho(x)</math> or <math>S(a)</math> or both of them)</p>		
Non-stationary with an analytical probability density function of ordinates	 <p>From all statistical characteristics only the analytical time-dependent probability density function of ordinates is reproduced (the corresponding power spectral density usually represents white noise)</p>	Not simulated	
Non-stationary Gaussian with a given power spectral density	 <p>From all statistical characteristics only the analytical time-dependent power spectral density is reproduced, the probability density function of ordinates being Gaussian (time-dependent or time-independent)</p>		
Non-stationary with an arbitrary power spectral density in an arbitrary probability density function of ordinates	 <p>From all statistical characteristics both time-dependent power spectral density and probability density function of ordinates are reproduced</p>		
Special		Depending on circumstances	Depending on circumstances

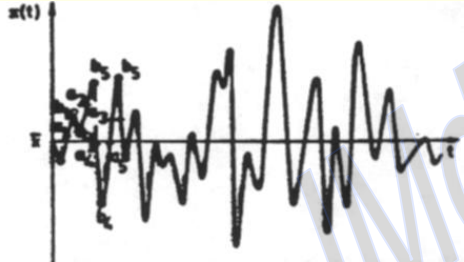
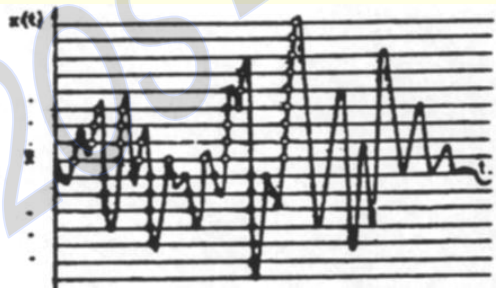
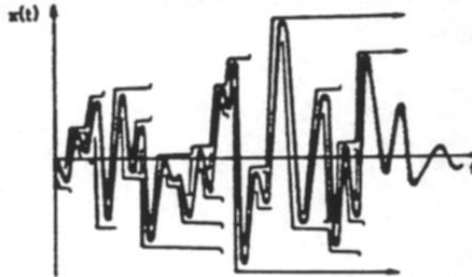


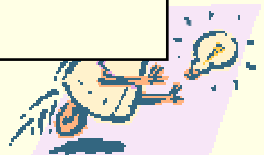
## PRINCIPLES OF COUNTING METHODS

Method	Graphical representation	Characteristic parameters
Relative peak method		<ul style="list-style-type: none"> <li>○ Positive peak</li> <li>● Negative peak</li> </ul>
Maximum amplitude method		<ul style="list-style-type: none"> <li>○ Counted peak</li> <li>x Mean level crossing</li> </ul>
Relative range method		<p><math>b_1, b_3, b_5, \dots</math> Positive ranges  <math>b_2, b_4, b_6, \dots</math> Negative ranges</p>



## PRINCIPLES OF COUNTING METHODS

Method	Graphical representation	Characteristic parameters
Relative range-mean method		$b_1, b_2, b_3, \dots$ Relative ranges $a_1, a_2, a_3, \dots$ Their corresponding mean values
Level crossing method		<ul style="list-style-type: none"> <li>○ Positive crossing above the common mean level</li> <li>● Negative crossing below the common mean level</li> </ul>
Rain flow method		Relative ranges



## CHARGE ALEATOIRE

$$\Delta K_{\text{rms}} = \sqrt{\sum \Delta \frac{K_i^2}{n}}$$

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{\text{rms}})^n$$



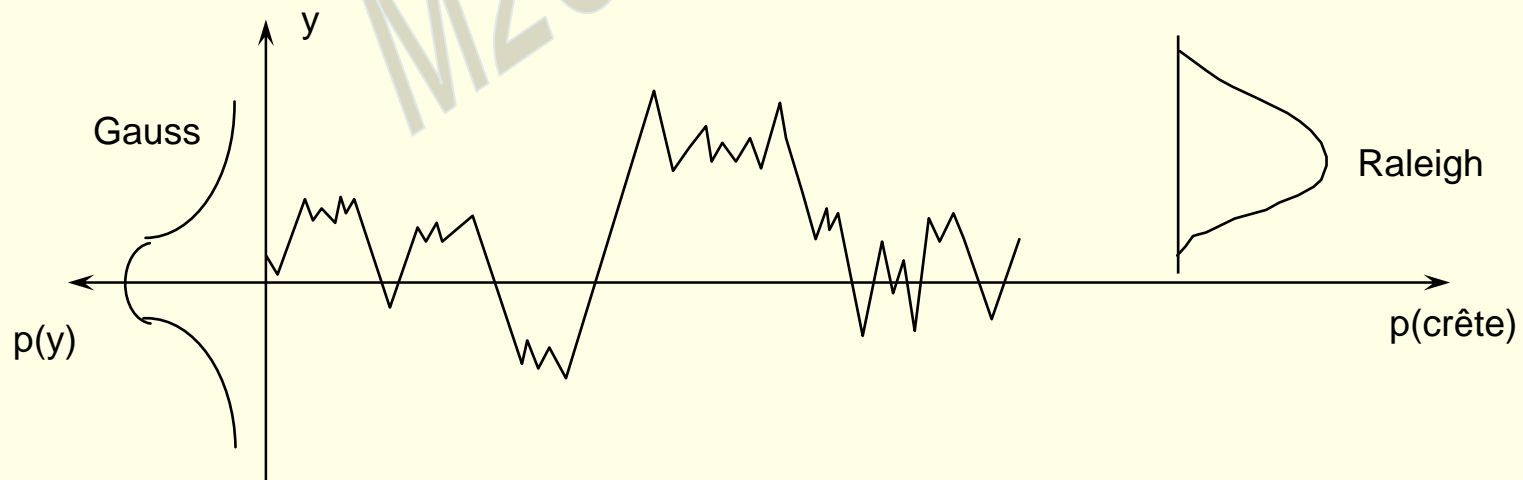
## CAS DES CONTRAINTES ALEATOIRES A BANDE ETROITE

$$d = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n(\sigma)}{N(\sigma)} d\sigma$$

## CAS DES CONTRAINTES ALEATOIRES A BANDE LARGE

Méthodes de comptage, par exemple

- comptage des pics
- comptage des cycles moyens



## DOMMAGE SOUS CHARGE ALEATOIRE

$$C_{eq} = \left[ \frac{1}{\sigma_e^2} \int_0^\infty C_i^{\alpha+1} e^{-\frac{C_i}{e\sigma_i}} dc_i \right]$$

$$E[D] = \frac{N_0 T}{2K} \cdot (\sqrt{2\sigma})^\alpha \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\sigma[D]^2 = \sum_{i=1}^n \sigma^2 d_i + 2 \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^n \rho_{ij} \sigma_{d_i} \sigma_{d_j}$$

$N_0$  = Nombre moyen par unité de temps de passage à zéro du signal



## CHARGES ALEATOIRES A BANDE DE FREQUENCE ETROITE

Expression de la courbe de Wohler

$$N = K(c - \rho_e)^n$$

Loi de Weibull

$$\text{Log } N = a - bc$$

Wohler

$$\text{Log } N = a - b \text{ Log } C$$

Basquin

$$\text{Log } N = a - b \text{ Log}(c - \rho_e)$$

Stromeyer

$$N1 = \frac{A}{c - \rho_e} e^{-(c_1 - \rho_e)}$$

Bastenaire

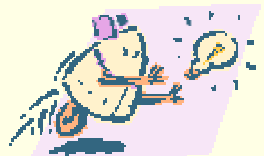
$$NC^\alpha = K$$

Modèle utilisé



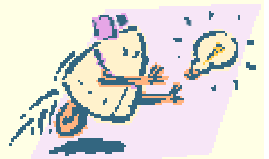
## BIBLIOGRAPHIE

SHWOB et PEYRACHE	Traité et fiabilité	ED. MASSON
BAZOVSKY	Théorie et pratique de la sûreté de fonctionnement	ED. DUNOD
MARCOVICI et LIGERON	Utilisation des technique de fiabilité en mécanique	ED. LAVOISIER
LIGERON	La fiabilité en mécanique	ED. DESFORGES
HAVGEN	Probabilistic approach to design	ED. WILEY AND SONS
SHIGLEY	Mechanical engineering design	ED. MC GRAW HILL
CAZAUX, POMEY et RABBE	La fatigue des métaux	ED. DUNOD
BATHIAS et BAILON	La fatigue des matériaux et des structures	ED. MALOINE
BARTHELEMY	Notions pratiques de mécanique de la rupture	ED. EYROLLES

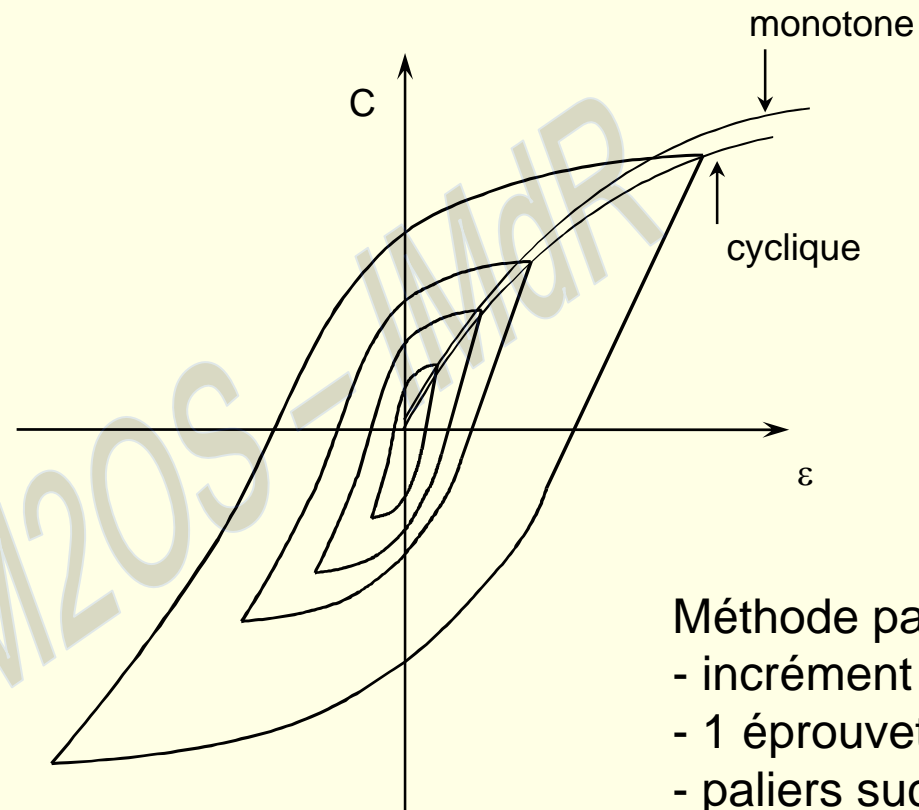




## 5. FATIGUE OLIGOCYCLIQUE



## COURBE DE TRACTION



Statique

$$\frac{\Delta C}{2} = K \left( \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} \right)^n$$

Dynamique

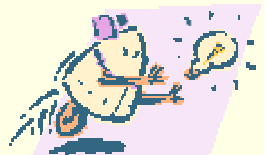
$$\frac{\Delta C}{2} = K' \left( \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} \right)^{n'}$$

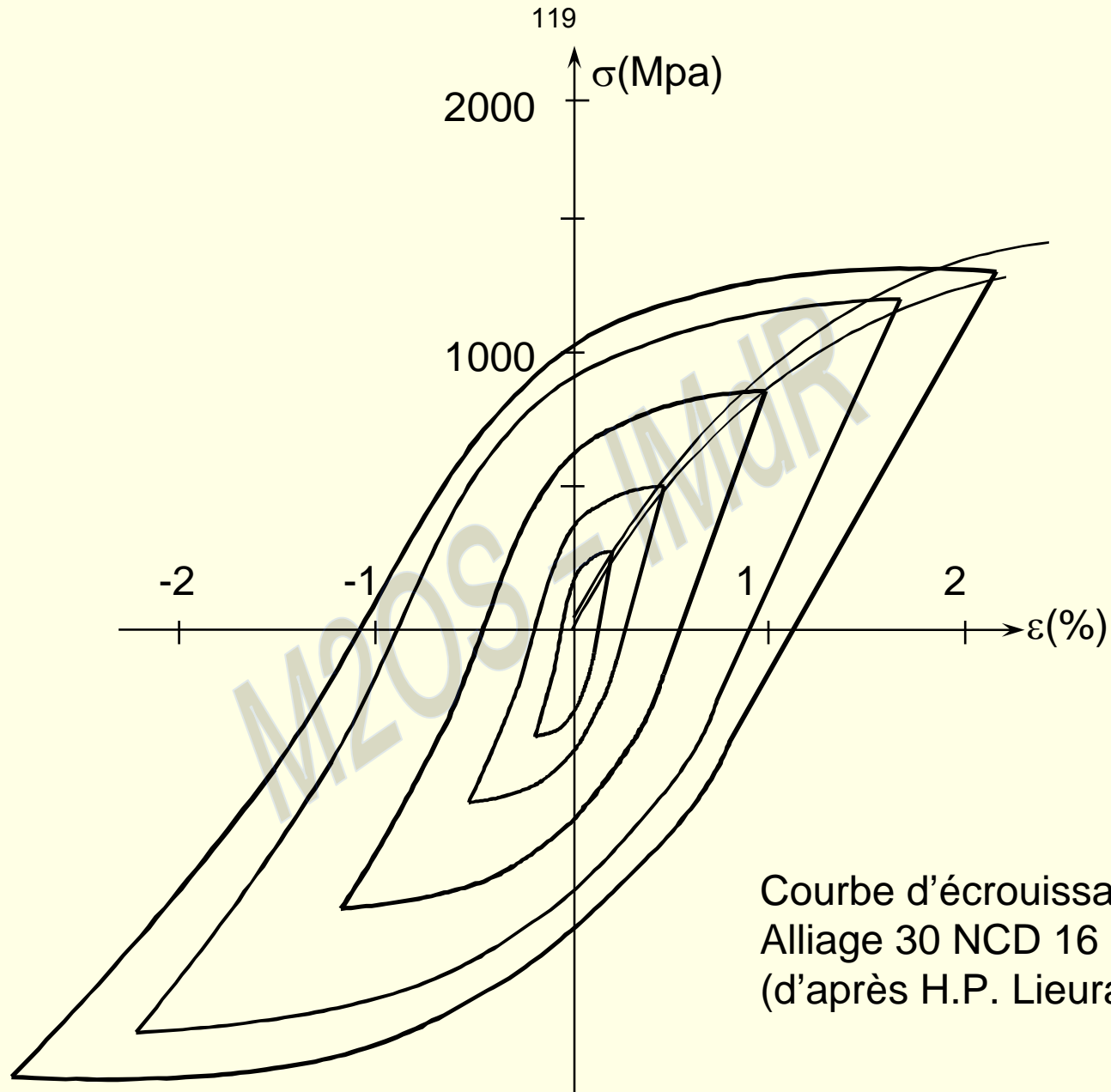
$n$  = écrouissage monotone

$n'$  = écrouissage cyclique

Méthode par :

- incrément
- 1 éprouvette par niveau
- paliers successifs
- traction après cyclage





Courbe d'écrouissage cyclique  
Alliage 30 NCD 16  
(d'après H.P. Lieurade)



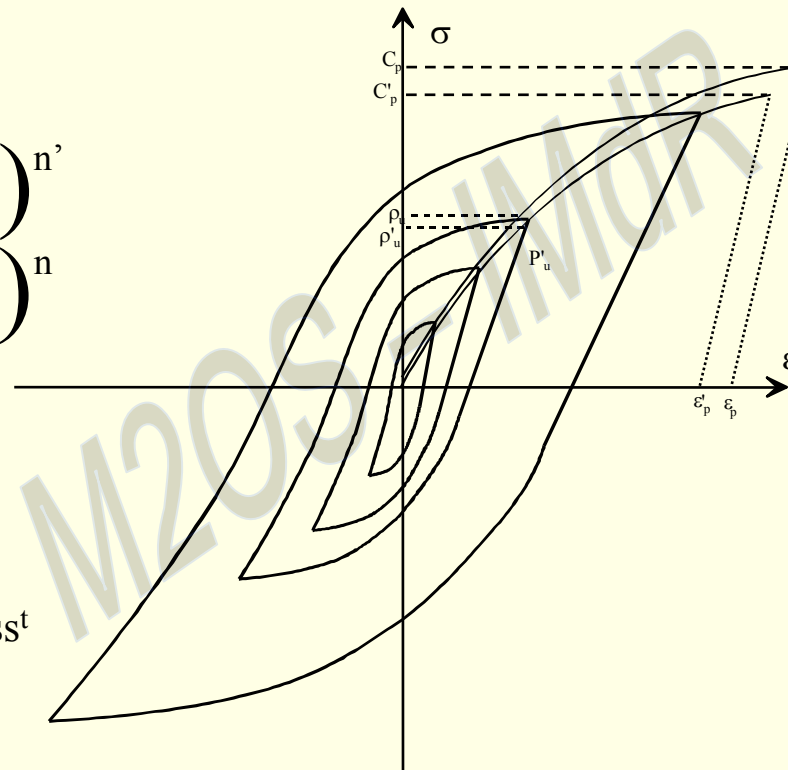
# FATIGUE OLIGOCYCLIQUE

Loi d'écrouissage cyclique

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = K' \left( \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} \right)^{n'}$$

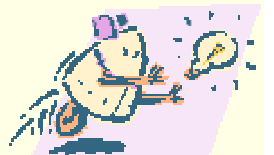
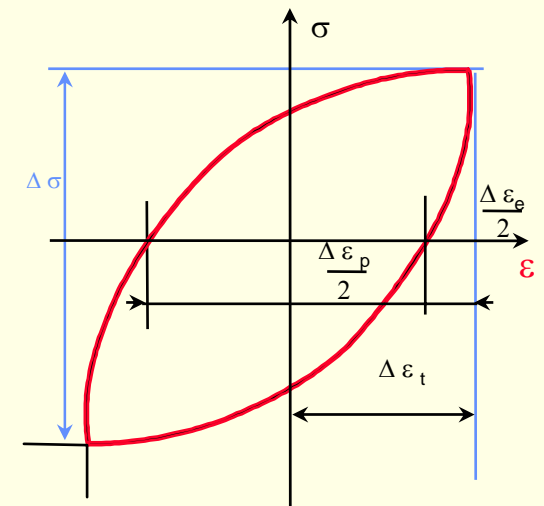
$$\frac{\Delta\sigma}{2} = K \left( \frac{\varepsilon_t}{2} \right)^n$$

$n < 0,1$		adouciss <sup>t</sup>
$\frac{\rho_m}{\rho_n} < 1,2$		
$n \geq 0,1$		durciss <sup>t</sup>
$\frac{\rho_m}{\rho_n} > 1,4$		



Courbe d'écrouissage monotone

Courbe d'écrouissage cyclique (adoucissement)



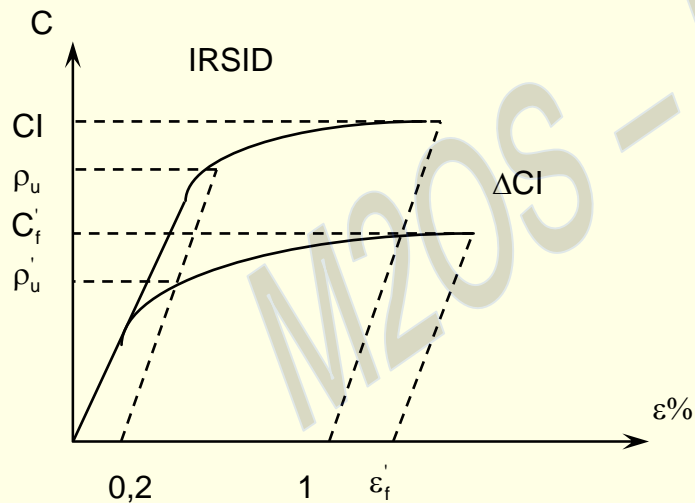
# FATIGUE OLIGOCYCLIQUE

Adoucissement  $\frac{\rho_m}{\rho_u} < 1.2$  ou  $n < 0.1$

Adoucissement  $\frac{CI}{\rho_u} < 1.3$

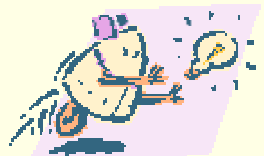
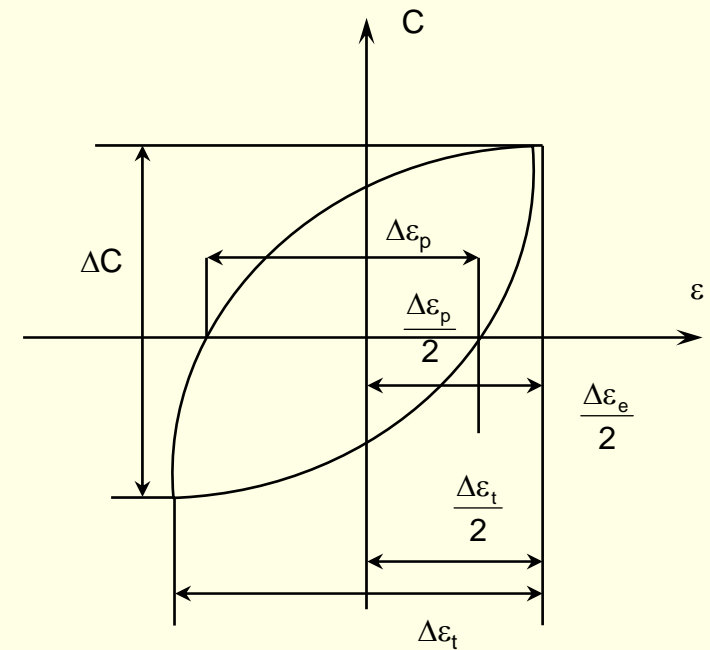
Durcissement  $\frac{\rho_m}{\rho_u} < 1.4$

Durcissement  $\frac{CI}{\rho_u} > 1.5$

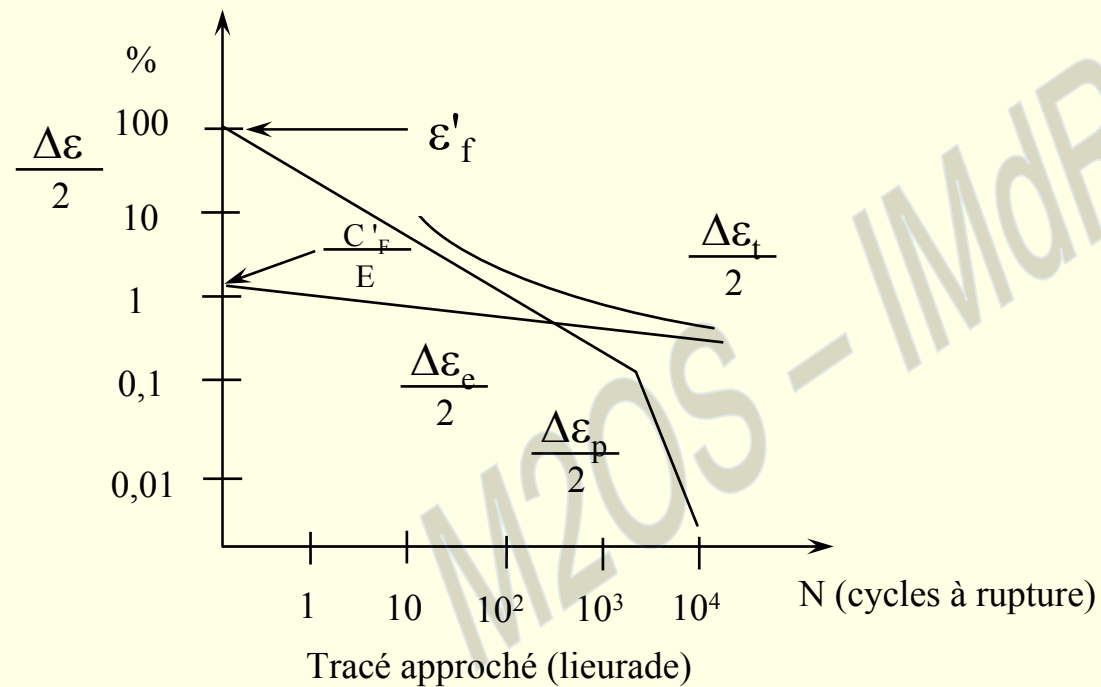


Statique  $\frac{\Delta C}{2} = K \left( \frac{\Delta \varepsilon}{2} \right)^n$

Dynamique  $\frac{\Delta C}{2} = K' \left( \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} \right)^{n'}$



## RESISTANCE A LA FATIGUE COURBES DE MANSON-COFFIN



(ductilité)

$$1) \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \varepsilon'_f (2N)^{-c} \quad (\text{MANSON})$$

$$2) \frac{\Delta \varepsilon_e}{2} = C'_f (2N)^b \quad (\text{BASQUIN})$$

$$10^7 \text{ cycles : } \sigma_D = E \cdot \frac{\Delta \varepsilon_e}{2} = 0.41 \rho_m + 2A$$

$$1/2 \text{ cycle } \frac{C'_f}{E'} = \frac{C_f}{E}$$

$$10^3 \text{ cycles : } \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = 0.01 - \frac{\Delta \varepsilon_e}{2}$$

$$1/2 \text{ cycle } \varepsilon'_f = \varepsilon_f$$



# FATIGUE OLIGOCYCLIQUE

## Lois de Manson-Coffin

$$\frac{\Delta \Sigma e}{2} = \frac{C_f}{E} (2N)^b \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta \Sigma t}{2} = \frac{\Delta \Sigma e}{2} + \frac{\Delta \Sigma p}{2} = \frac{C_f}{E} (2N)^b + \Sigma f (2N)^c$$

$$\frac{\Delta \Sigma p}{2} = \Sigma f (2N)^c$$

$C'_f$  = coefficient de résistance en fatigue

$C_f$  = contrainte vraie à rupture

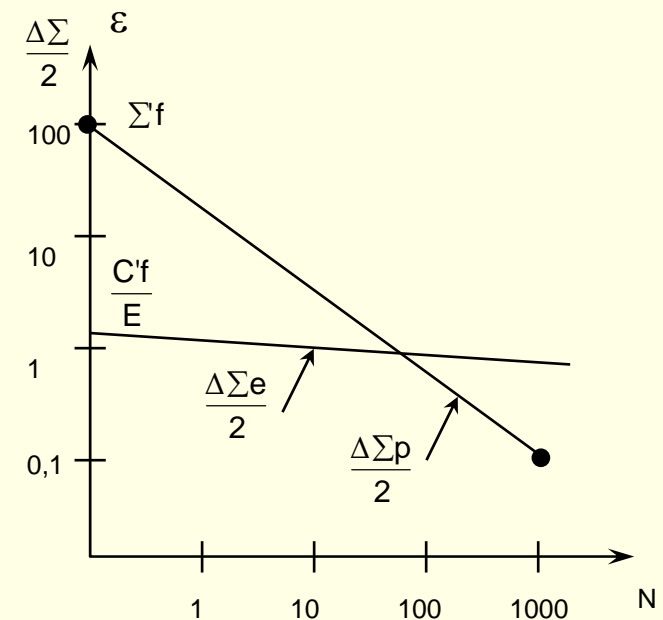
$\Sigma'_f$  = coefficient de ductilité en fatigue

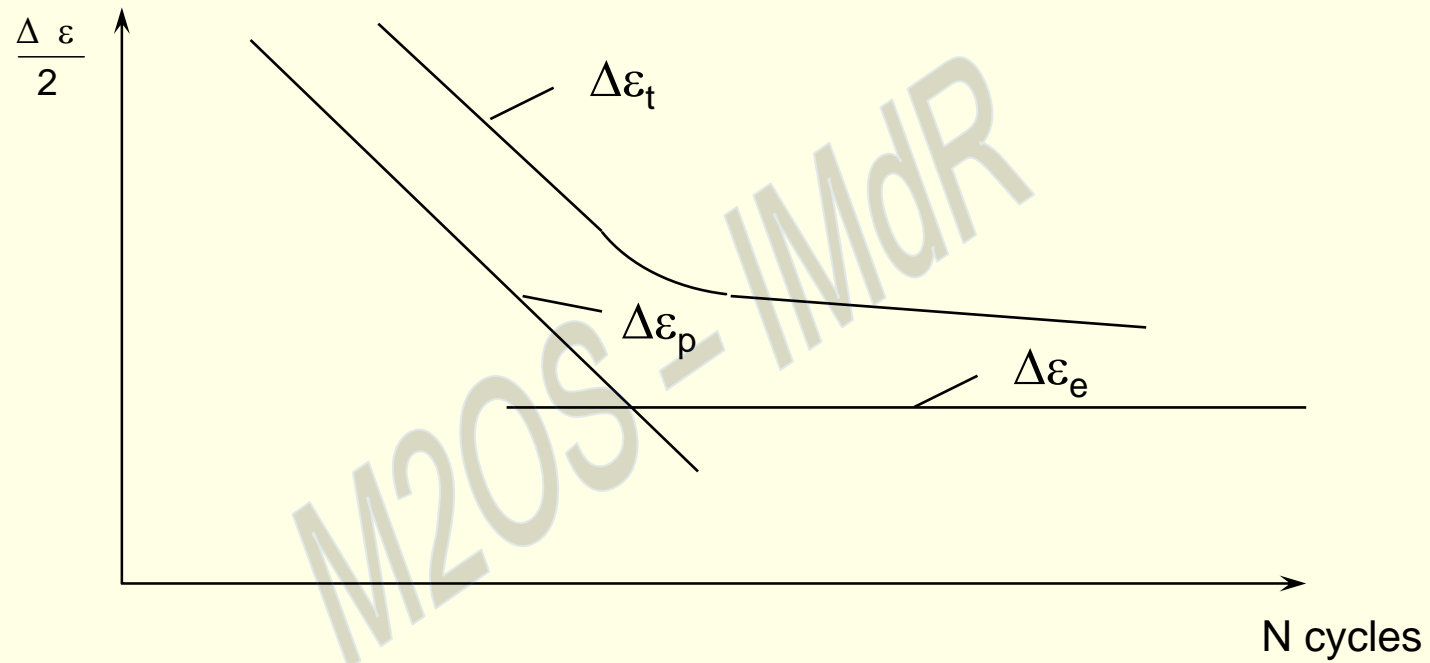
$\Sigma_f$  = déformation vraie à rupture

## Relation énergétique

$$W_f = C_3 (2N)^a \quad \Delta W = 2C_a \Delta \Sigma p \left( \frac{1-n'}{1+n'} \right)$$

$C_a$  = Amplitude de contrainte de la boucle d'hystérésis





$$\frac{\Delta \varepsilon_e}{2} = \frac{Cf}{E} (2N)^b$$

$$\Delta \varepsilon_t = \Delta \varepsilon_e + \Delta \varepsilon_p \quad \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = Cf (2N)^{-c}$$





# FATIGUE OLIGOCYCLIQUE

## Lois de Manson-Coffin

$$\frac{\Delta \varepsilon_e}{2} = \frac{C_f}{E} (2N)^b$$

$$\frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \varepsilon'_f (2N)^{c_2}$$

$$\frac{\Delta \varepsilon_t}{2} = \frac{\Delta \varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \frac{C_f}{E} (2N)^b + \varepsilon'_f (2N)^c$$

$C'_f$  = coefficient de résistance en fatigue

$C_f$  = contrainte vraie à rupture

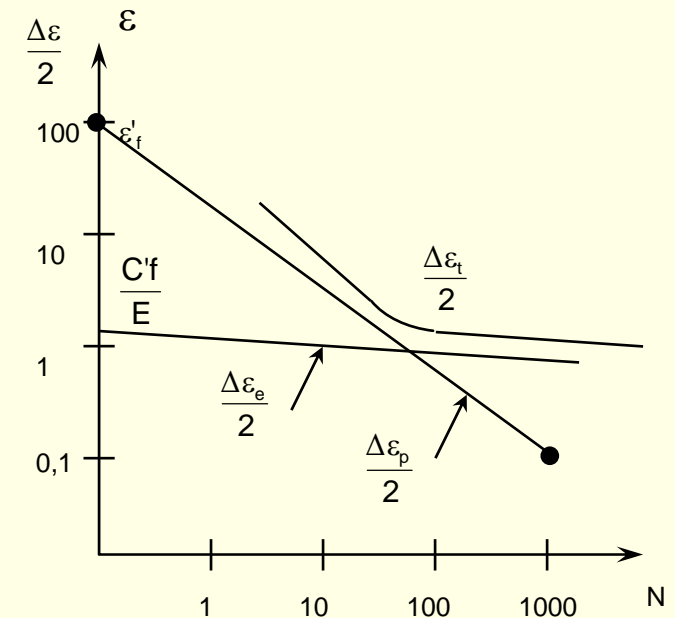
$\varepsilon'_f$  = coefficient de ductilité en fatigue

$\varepsilon_f$  = déformation vraie à rupture

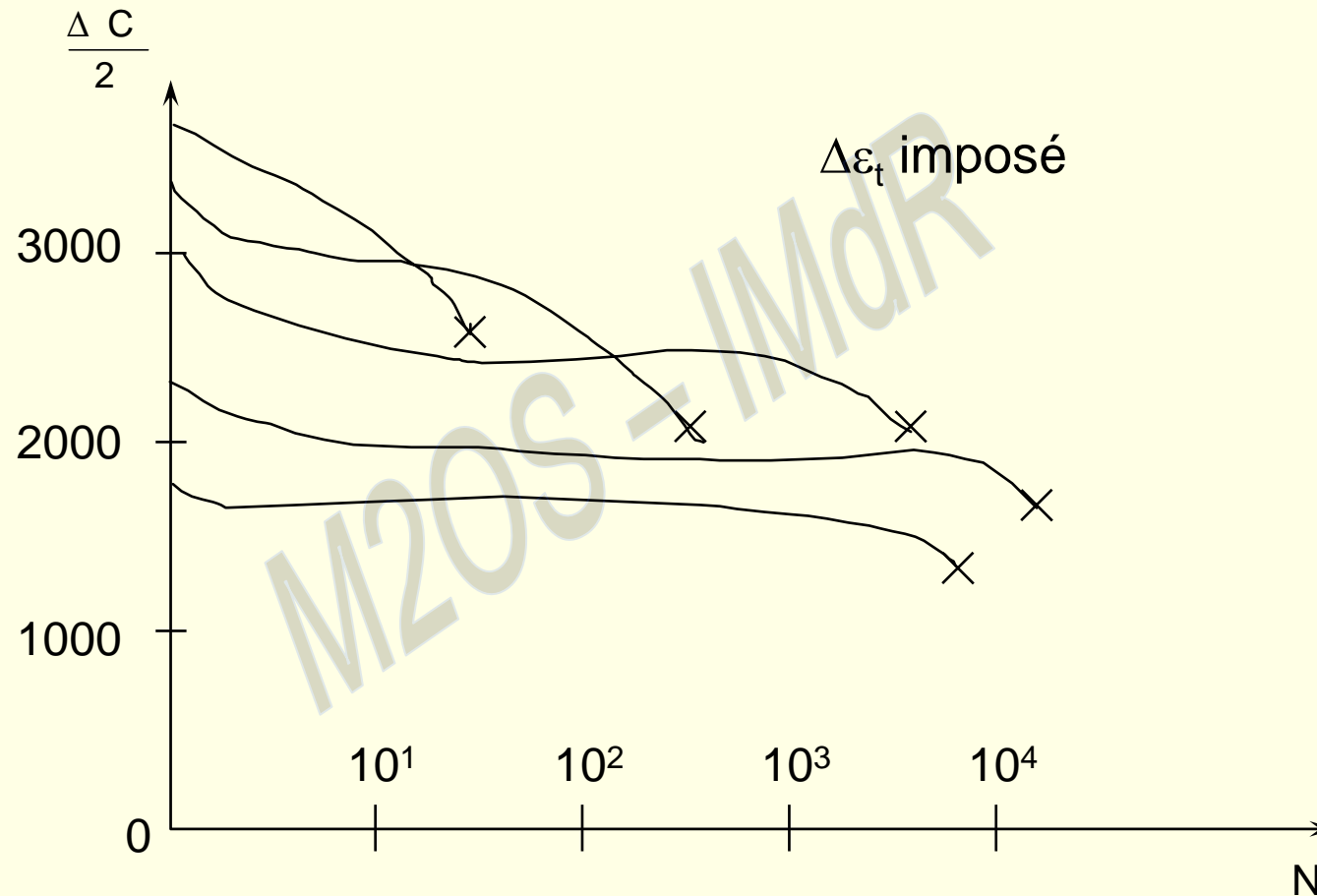
## Relation énergétique

$$W_f = C_3 (2N)^a \quad \Delta W = 2Ca \Delta \varepsilon_p \left( \frac{1-n'}{1+n'} \right)$$

1)  $Ca$  = Amplitude de la boucle d'hystérésis



## AMPLITUDE CONTRAINTE $f(N)$



Boucles de référence  
 $N > 200$  50<sup>e</sup> cycle  
 $\Delta \varepsilon_t$  élevé  $\rightarrow$  moitié de la chute



## PARAMETRE DE FATIGUE OLIGOCYCLIQUE

Énergie dissipée

déformation plastique	↔	mouvement des dislocations
contrainte cyclique	↔	résistance à leur avancement



$W$ (déformation/cycle) = mesure du dommage par fatigue  
 Résistance à la fatigue = capacité à absorber et diffuser  $W$



$$W_f = N \cdot W \quad \begin{array}{l} W = AN^{a-1} \\ W_f = AN^a \end{array} \quad (a = 0,15)$$

$$W = \Delta C \cdot \Delta \varepsilon_p \frac{1-n'}{1+n'}$$

$$b = n'(a-1) / (1+n')$$

$$c = (a-1) / (1+n')$$

(HALFORD)



## APPROXIMATION DES COURBES

### Méthode IRSID

#### Droite élastique

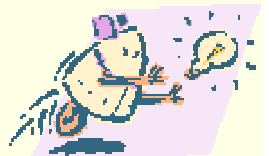
à  $10^7$  cycles  $\frac{\Delta\varepsilon_e}{2} = \frac{0.41 \rho_m + 2A}{E}$  A = allongement

N = 1/2 cycle  $C'_f = C_f =$  contrainte vraie à rupture

#### Droite plastique

à N =  $10^3$  cycles  $\Delta\varepsilon_p = 0.01 - \frac{\Delta\varepsilon_e}{2}$

à  $2N = 1$   $\varepsilon'_f = \varepsilon_f =$  déformation vraie à rupture



## APPROXIMATION DES COURBES

### Méthode des 4 points

	1er point à 1/4 cycle ordonnée $2.5 C_f/E$	}	élastique
	2e point à $10^5$ cycle ordonnée $0.9 \rho_m/E$		
	1er point à 10 cycles ordonnée $1/4(\varepsilon_f)^{0.75}$	}	plastique
	2e point à $10^4$ cycles ordonnée $\Delta\varepsilon_e$ à $10^4$ cycles		

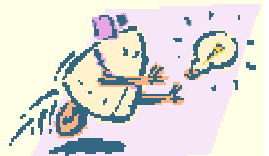
$$\Delta\varepsilon_f = \frac{1}{1.91} \cdot \left( 0.0132 - \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} \right)$$

### Méthodes des pentes universelles

droite élastique  $b = -0.12$

droite plastique  $c2 = -0.6$

pour  $N = 1$   $\varepsilon'_f = (\varepsilon_f)^{0,6} \quad \frac{C'_f}{E} = \frac{3.5 \rho_m}{E}$



## APPROXIMATION DES COURBES

### Relations énergétiques

$$W_f = 3.2 N^{0.15}$$

$$\Delta W = 3.2 N^{0.85}$$

$W_f = \Delta W \cdot N =$  énergie totale à rupture

$\Delta W =$  énergie par cycle mesurée sur boucle

### Durée de vie

$$N = 2600 \left[ \frac{1+n'}{K' \cdot (1-n')} \right]^{1/0.85} \cdot \left( \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} \right)^{-(1+n')/0.85}$$

$\varepsilon'_f$  et  $C'_f$  très proches de  $\varepsilon_f$  et  $C_f$

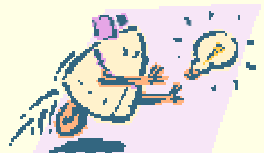
$$\varepsilon_f = \log \frac{100}{100 - Z} \quad Z = \text{striction en } \varepsilon_0$$

$$C_f = \frac{F_f}{S_f} \frac{\text{charge à rupture}}{\text{section finale}}$$

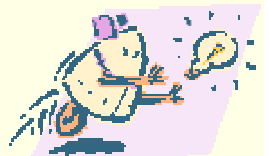
Relation de MORROW :  $b = -n'/(1 + 5n')$        $C_2 = -1/(1 + 5n')$

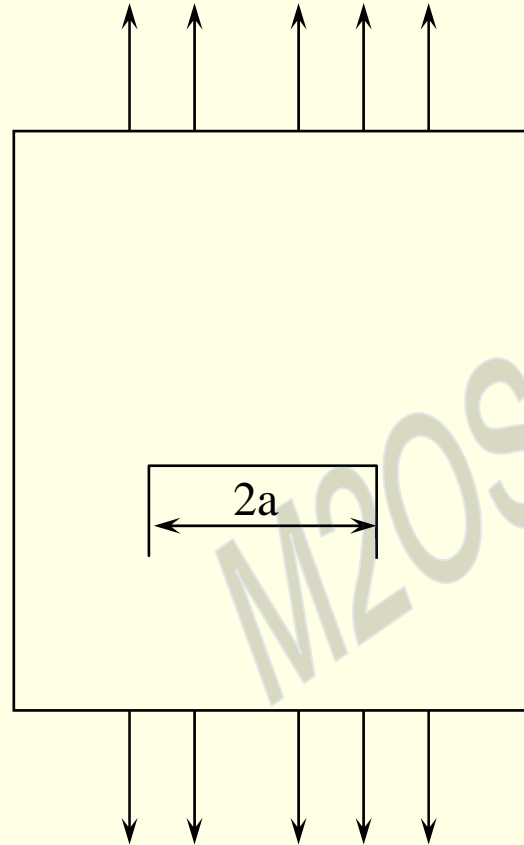
Relation de TOMKINS :  $b = -n'/(1 + 2n')$        $C_2 = -1/(1 + 2n')$

Relation de HALFORD :  $n' \cdot (a - 1) / (1 + n')$        $C_2 = (a - 1) / (1 + n')$



## 6. MECANIQUE DE LA RUPTURE





$$K_{IC} = \alpha \sigma_C \sqrt{2\pi a_C}$$

$$\frac{ca}{dN} = C_I \Delta k^m$$





# MECANIQUE DE LA RUPTURE

Hypothèse : point  $r, \theta$

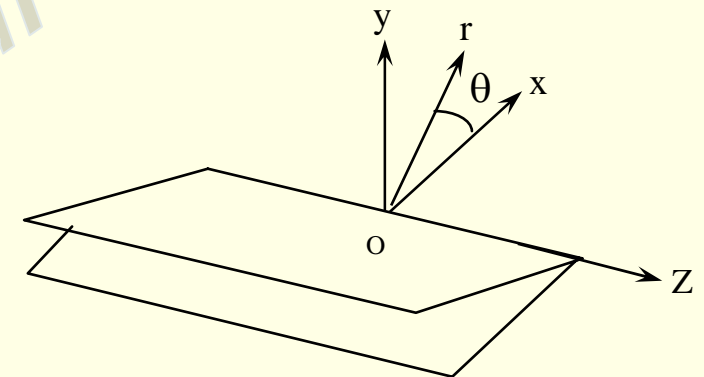
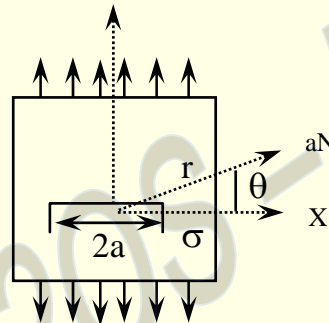
$$C_{IJ} = K_2 \frac{f_{IJ}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}}$$

$$K_I = C N \sqrt{\pi a}$$

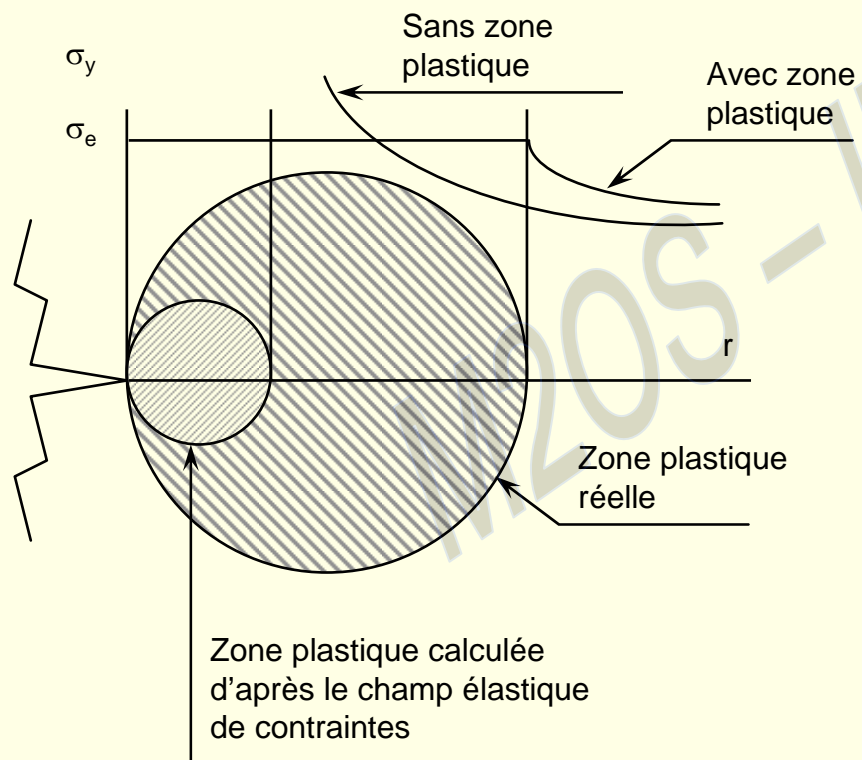
$$K_I = \alpha C N \sqrt{\pi a}$$

$\alpha$  est fonction : Géométrie pièce  
Mise en charge

Mode I = ouverture  
Mode II = glissement droit  
Mode III = glissement vis



## ZONE PLASTIQUE



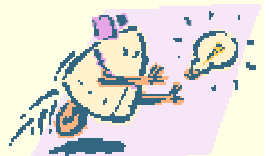
$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_e} \right)^2$$

Contrainte plane

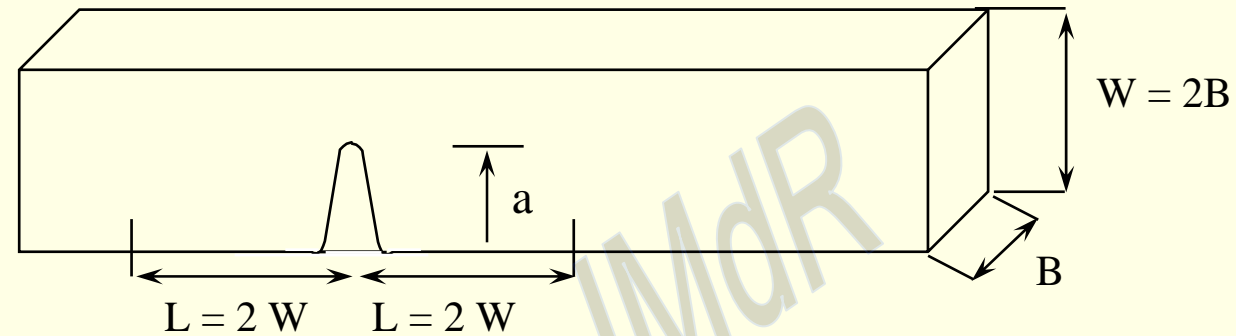
$$r_p = \frac{1}{6\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_e} \right)^2$$

Déformation plane

Autres formules en utilisant VON MISES ou TRESCA

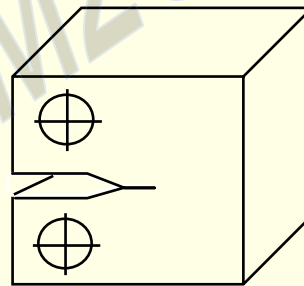


# EPROUVETTES



$$K_{IC} = \frac{P_c}{B\sqrt{W}} \left[ 11.58 \left( \frac{a}{W} \right)^{1/2} - 18.42 \left( \frac{a}{W} \right)^{3/2} + 87.8 \left( \frac{a}{W} \right)^{5/2} - 150.66 \left( \frac{a}{W} \right)^{7/2} + 154.8 \left( \frac{a}{W} \right)^{9/2} \right]$$

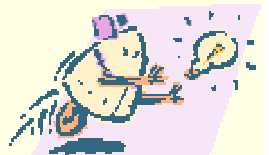
$a$  = longueur de la fissure  
 $P_c$  = charge à l'instabilité



Éprouvette  
compacte

Déformation plane (conditions essais)

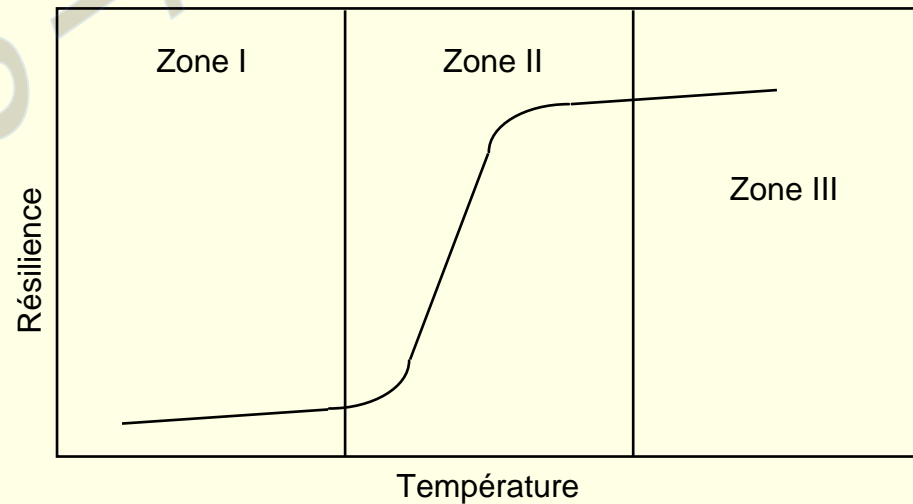
$$a \geq 2.5 \left( \frac{K_{IC}}{\rho_u} \right)^2 \quad b \geq 2.5 \left( \frac{K_{IC}}{\rho_u} \right)^2$$



# RESILIENCE

Unités Forme de l'entaille	Joules/cm <sup>2</sup>	Joules
V	KCV	KV
U	KCU	KU

Essai SCHNADT  
Essai BATTELLE  
Essai de traction par choc  
Essai PELLINI  
Essai ROBERTSON

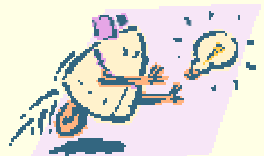


$$\text{Cristallinité} = \frac{\text{Surface à grains}}{\text{Surface totale}} \times 100$$



## RELATIONS ENTRE $K_{Ic}$ et $K_v$

- Niveau ductile de la courbe de transition = BARSOM et ROLFE
- Niveau fragile et bas = SAILORS et CORTEN
- Corrélation globale = BEGLEY et LOGSDON



## MECANIQUE DE LA RUPTURE

$K_I \rightarrow K_{Ic}$  rupture brutale

- Influence de la température
- Influence de la vitesse,

$K_{Ic} \rightarrow K_{Id}$

Unités = Mpa x m<sup>1/2</sup>      aciers haute résistance  
30 à 100 Mpa . m<sup>1/2</sup>

KI SCC = seuil de non propagation

Corrélations :

$$\text{Barsom et Rolfe} \left( \frac{K_{Ic}}{\rho_u} \right)^2 = 6.4 \left[ 100 \left( \frac{K_v}{\rho_u} \right) - 1 \right]$$

Hahn et Rosenfield

$$K_{Ic} = [0.017 E \rho_u \varepsilon_f (0.0005 + n^2)]^{1/2}$$

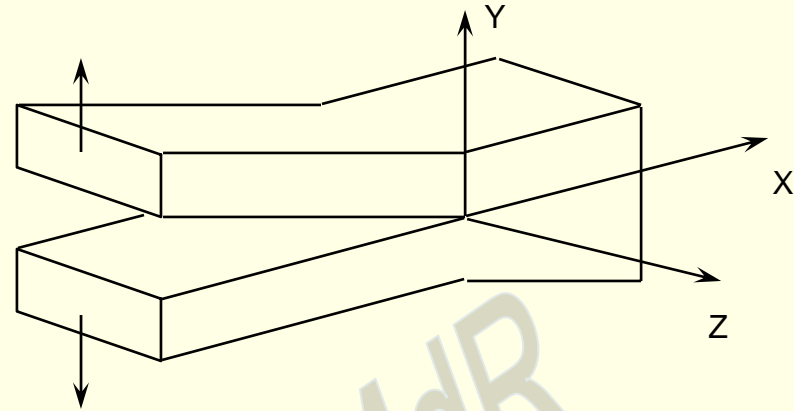
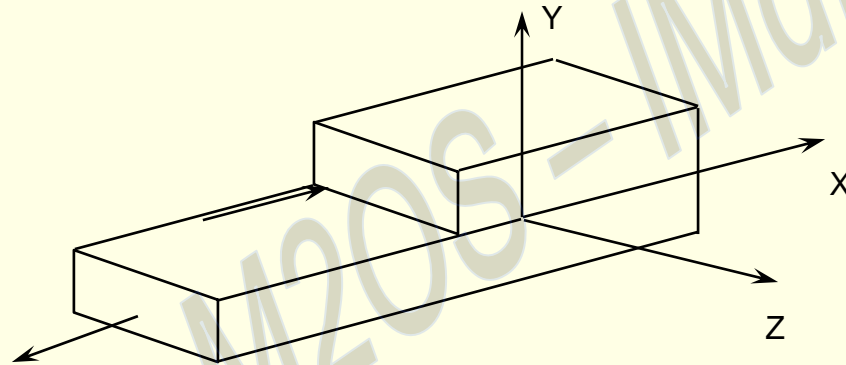
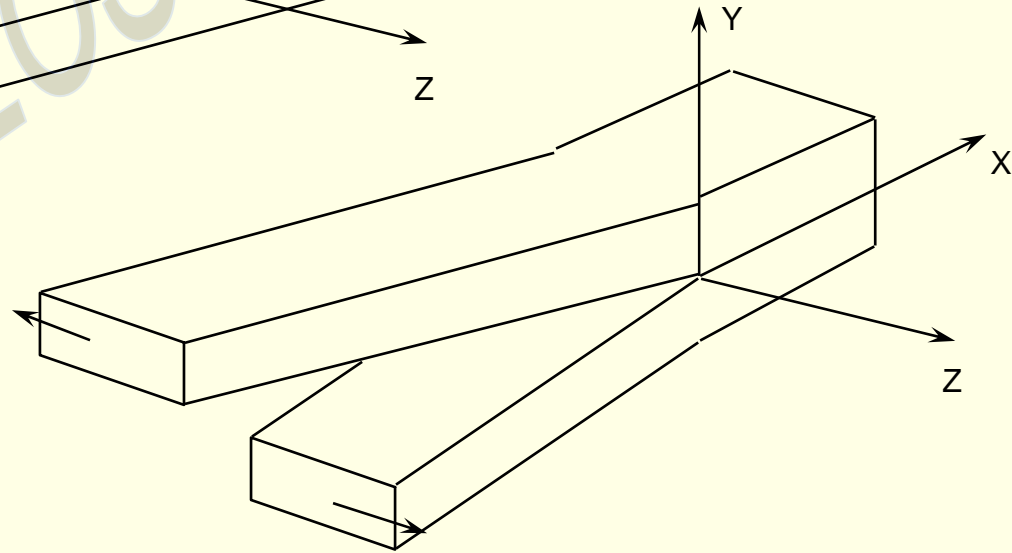
$\varepsilon_f$  = déformation rationnelle à rupture

$n$  = coeff d 'écrouissage .  $KV$  = résilience

$\rho_u$  = limite élasticité

Courbe variation = Méthode IRSID



**MODE I****MODE II****MODE III**

### Mode I

$$\sigma_x = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$u = \frac{K_I}{G} \left[ \frac{r}{2\pi} \right]^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$v = \frac{K_I}{G} \left[ \frac{r}{2\pi} \right]^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$w = 0 \text{ (déformations planes)}$$

### Mode II

$$\sigma_x = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 - \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

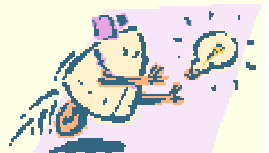
$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$u = \frac{K_{II}}{G} \left[ \frac{r}{2\pi} \right]^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$v = \frac{K_{II}}{G} \left[ \frac{r}{2\pi} \right]^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[ -1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$w = 0 \text{ (déformations planes)}$$





### Mode III

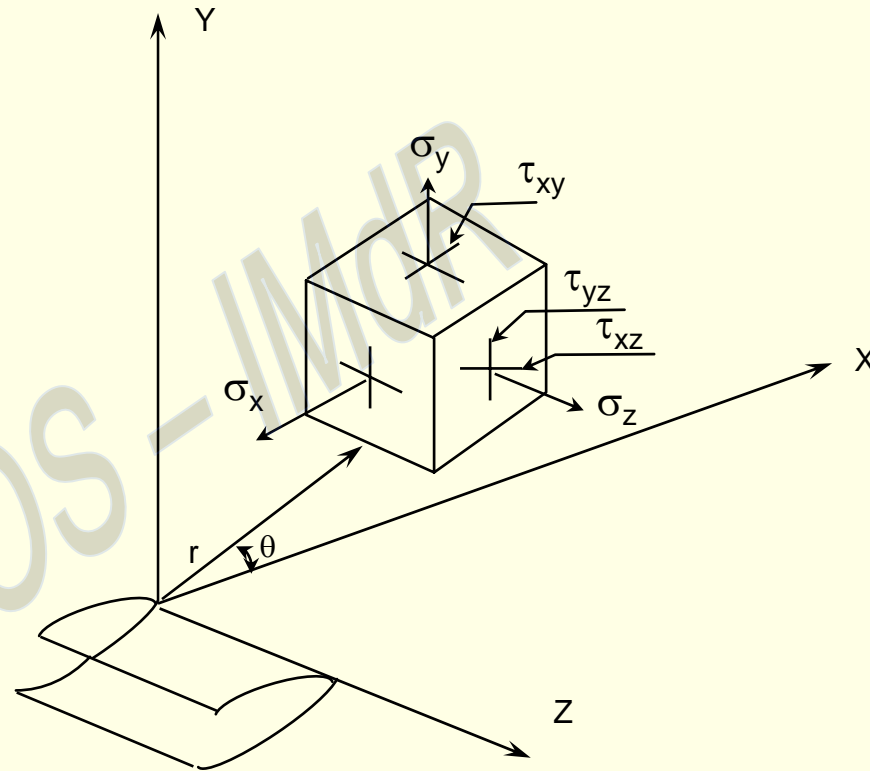
$$\tau_{xz} = \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

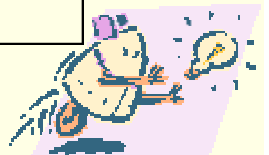
$$w = \frac{K_{III}}{G} \left[ \frac{2r}{\pi} \right]^{1/2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$u = v = 0$$



## Expression de la dimension $r$ , de la zone plastifiée périphérique

Expression de $r_y$	Etat de contrainte	Mode de détermination	Matériaux	Auteur
$r_y = 0.15 \frac{K^2}{\sigma_y^2}$	Déformation plane	Calcul	Solide sans consolidation	J. Rice
$r_y = 0.40 \frac{K^2}{\sigma_y^2}$	Contrainte plane	Calcul	Solide sans consolidation	J. Rice
$r_y = 0.32 \left( \frac{K^2}{\sigma_y^2} \right)^{\frac{1+n}{1+3n}}$	Contrainte plane	Calcul	Solide de coefficient d'écroutissement $n$	Hutchinson
$r_y = 0.13 \frac{K^2}{\sigma_y^2}$	Déformation plane	Métallographie	Acier au silicium	Hahn Rosenfield
$r_y = 0.05 \text{ à } 0.1 \frac{K^2}{\sigma_y^2}$	Déformation plane	Microdureté	Ferrite, austénite, maraging	Bathias
$r_y = 0.06 \frac{K^2}{\sigma_y^2}$	Déformation plane	Métallographie	Inco 718	Pineau
$r_y = 0.145 \frac{K^2}{\sigma_y^2}$	Contrainte plane	Contraste cristallin	6061 T6	Lankford Davidson



## METHODES ANALYTIQUES D'EVALUATION DE K

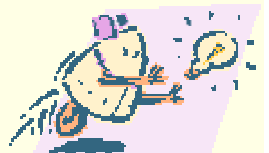
- Approche par variable complexe
- Approche par fonction de GREEN

## EXEMPLES DE FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE

Méthode facteurs de correction

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} * F_1 * F_2 * F_3 * F_4 * F_5$$

- $F_1$  Facteur tenant compte de la surface libre à l'origine de la fissure
- $F_2$  Facteur tenant compte de la surface libre vers laquelle se dirige la fissure
- $F_3$  Facteur tenant compte de la forme réelle de la fissure
- $F_4$  Facteur tenant compte du gradient de contrainte
- $F_5$  Facteur tenant compte de la zone plastique



## CRITERES D'ENERGIE

$$\sigma_1 = \sum \Delta W_i + \Delta W e_1$$

$\Delta W_i$  = Travail de  $F_i$

$\Delta W e_1$  = Variation d'énergie élastique du corps

$G_1$  = Énergie disponible pour progression de la fissure

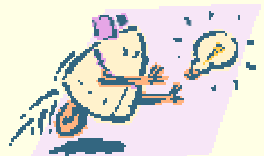
$$G_{1C} = \frac{K_{1C}^2}{E} \text{ Contraintes planes}$$

$$G_{1C} = \frac{K_{1C}^2}{E} (1 - \nu^2) \text{ déformations planes}$$



## MECANIQUE DE LA RUPTURE ELASTO-PLASTIQUE

- Écartement en fond de fissure (COD)
- Intégrale J. de RICE
- Courbe R
- Énergie équivalente



## INTEGRALE J. DE RICE

$$\sigma_1 = \frac{dP}{da} \quad J = \frac{K_{I^2}}{E}$$

P = énergie potentielle par unité d'épaisseur

$$J = \int_{\Gamma} W \, dx_2 - \bar{t} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, ds$$

W = densité d'énergie de déformation

$\bar{u}$  = déplacement

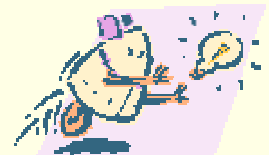
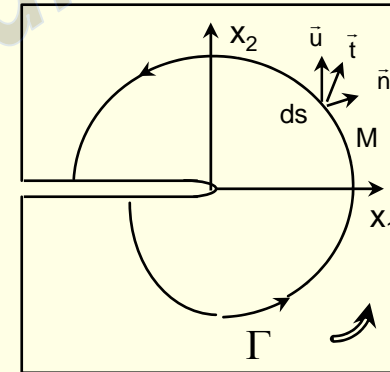
$\Gamma$  = chemin dans le plan

$\bar{t}$  = vecteur traction

$$W(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} \, d\varepsilon_{ij}$$

$\varepsilon_{ij}$  = tenseur des déformations

- Méthodes d'essais = Begley et Landes



## CORRELATIONS

- ROLFE et NOVAK

$$K_{IC}^2 = 0.64 \operatorname{Re}(KV) - 6.4 \cdot 10^{-3} (\operatorname{Re})^2$$

- BARSOM et ROLFE

$$\frac{K_{IC}^2}{E} = 0.222 (KV)^{3/2}$$

$$\frac{K_{IC}}{E} = 0.65 (KV) \text{ STATIQUE}$$

$$\frac{K_{Id}}{E} = 0.65 (KV) \text{ DYNAMIQUE}$$

- SAILORS et CORTEN

$$K_{IC} = 14.6 (KV)^{1/2}$$

- BEGLEY et LOGDSON

$$K_{IC} = 0.0718 \cdot \operatorname{Re}$$

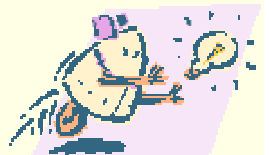
- IRDID  $f(\theta)$

- KRAFT

$$K_{IC} = E n \sqrt{2 \pi d T}$$

- HAHN et ROSENFELD

$$K_{IC} = [0.017 \cdot E \cdot \operatorname{Re} \cdot \varepsilon_f (0.0005 + n^2)]^{1/2}$$



## COD

Écartement en fond de fissure  $\delta$

$$\delta = \frac{8Re^3}{\pi E} \ln \frac{1}{\frac{\cos \pi \sigma}{2Re}}$$

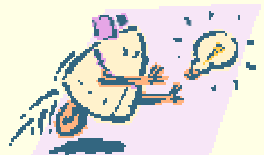
$$\delta = 0.49 \frac{K^2}{ReE} \quad \text{Déformations planes}$$

## COURBE R

A partir de charge appliquée P

$$a_{\text{eff}} + a_0 \Delta a + r_y$$

$r_y$  = Rayon de la zone déformée plastiquement





## MODELE DE WHEELER

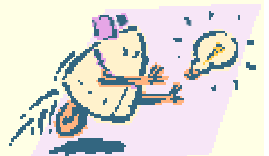
Deux zones plastiques

$R_v$  = zone plastique réelle

$R_f$  = zone plastique fictive si non surcharge

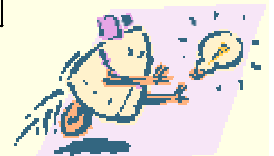
$$\frac{da}{dN} = CK^m \max \lambda^\beta$$

$$\lambda = \frac{R_f}{R_v}$$



## ANALOGIE ENTRE LES CONCEPTS DE J ET DE K

Mécanique linéaire élastique	Mécanique élasto-plastique
	$J = \int_{\Gamma} W dx_2 - \bar{t} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} ds$ $W = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ <p style="text-align: center;">J indépendant du contour <math>\Gamma</math></p>
$\sigma = E\varepsilon$ $\sigma_{ij} = Kr^{-1/2} f_{ij}(\theta)$ $\varepsilon_{ij} = Kr^{-1/2} g_{ij}(\theta)$ $u_i = Kr^{1/2} g_{ij}(\theta)$	$\sigma = k\varepsilon^n$ $\sigma_{ij} = k \left( \frac{J}{kl_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{-\frac{n}{n+1}} f_{ij}(\theta)$ $\varepsilon_{ij} = \left( \frac{J}{kl_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{-\frac{n}{n+1}} g_{ij}(\theta)$ $u_{ij} = \left( \frac{J}{kl_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{-\frac{n}{n+1}} g_i(\theta)$
$G = \frac{K^2}{E} = -\frac{dP}{da}$	$J = -\frac{dP}{da}$



## MECANIQUE RUPTURE - FLUAGE

$$\frac{da}{dt} = hK^s$$

h et S f(MATERIAU,  $\theta$ , EPAISSEUR)

- Utilisateur intégrale J. de RICE
- Introduction par Landes et Begley d'un paramètre C\*

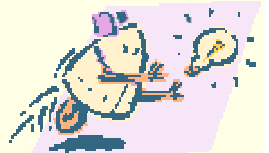
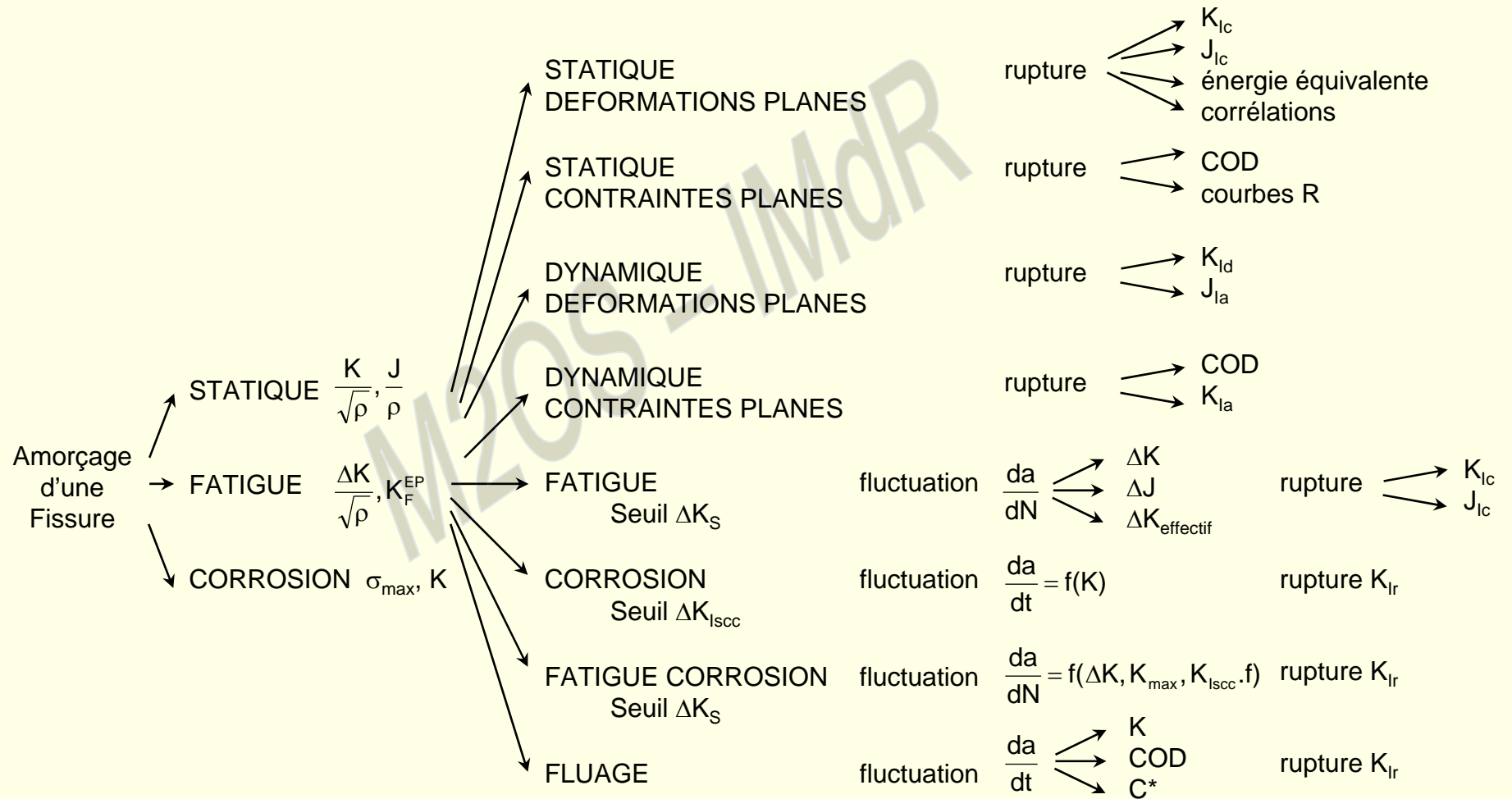


## ANALOGIE ENTRE LES CONCEPTS DE K, J et C\*

Mécanique linéaire élastique	Mécanique élasto-plastique	Mécanique visco-plastique
	$J = \int_{\Gamma} W dx_2 - \bar{t} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} ds$ $W = \int \sigma_{ij} d \varepsilon_{ij}$ <p style="text-align: center;">J indépendant du contour <math>\Gamma</math></p>	$C^* = \int_{\Gamma} W^* dx_2 - \bar{t} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} ds$ $W^* = \int \sigma_{ij} d \dot{\varepsilon}_{ij}$ <p style="text-align: center;">C* indépendant du contour <math>\Gamma</math></p>
$\sigma = E \varepsilon$ $\sigma_{ij} = K r^{-1/2} f_{ij}(\theta)$ $\varepsilon_{ij} = K r^{-1/2} g_{ij}(\theta)$ $u_i = K r^{-1/2} g_i(\theta)$	$\sigma = k \varepsilon^n$ $\sigma_{ij} = k \left( \frac{J}{k l_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{-\frac{n}{n+1}} f_{ij}(\theta)$ $\varepsilon_{ij} = \left( \frac{J}{k l_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{-\frac{n}{n+1}} g_{ij}(\theta)$ $u_i = \left( \frac{J}{k l_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{\frac{n}{n+1}} g_i(\theta)$	$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_0} = \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n$ $\sigma_{ij} = \sigma_0 \left( \frac{C^*}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 l_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{-\frac{n}{n+1}} f_{ij}(\theta)$ $\dot{\varepsilon}_{ij} = \alpha \sigma_0 \left( \frac{C^*}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 l_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{-\frac{n}{n+1}} g_{ij}(\theta)$
$G = \frac{K^2}{E} = - \frac{dP}{da}$	$J = - \frac{dP}{da}$	$C^* = - \frac{dP^*}{da}$



## PARAMETRES UTILISES POUR DECRIRE LES DIFFERENTES ETAPES DE LA VIE D'UNE STRUCTURE



## METHODE IRSID

$TK_{Ic}$  = température à laquelle  $K_{Ic} = 100 \text{ Mpa} \cdot \text{m}^{1/2}$

$TK_{3.5} = KV = 28 \text{ J}$  (KCY = 35 J/cm<sup>2</sup>)

- Tracé de la courbe de résilience ISO - Y
- Calcul des valeurs de  $K_{Ic}$  à partir de la résilience KV par la relation :

$$K_{Ic} = 19(KV)^{1/2}$$

- Tracé de la courbe  $K_{Ic} \cdot f(l)$
- Calcul de  $T K_{Ic}$  à partir de  $TK_{3.5}$   
(température)
- Translation de la courbe  $K_{Ic} f(\theta)$  de telle manière qu'elle passe par le point

$$T = T_{K_{Ic}} \cdot K_{Ic} = 100 \text{ MP} \cdot \text{am}^{1/2}$$



## VITESSE DE FISSURATION

Vitesse fonction de  $\Delta K$  et  $R = \frac{K_{min}}{K_{max}}$

$$\text{Loi utilisée} = \text{Loi IRSID} = 10^{-4} \left[ \frac{K}{K_0 \left(1 - \frac{R}{2}\right)} \right]^m K_0 \rightarrow \Delta K \frac{da}{dN} = 10^{-4} \text{ mm/c}$$

$$\text{Loi de PARIS} = C_1 (\Delta K)^m = \frac{da}{dN}$$

- Caractérisée fissuration lente

- Mise en évidence seuil de non fissuration  $\Delta K_s \frac{da}{dN} \Leftarrow 10^{-7} \text{ mm/cycle}$   
 C1 = formules de KRAFT

Mc Evily et Johnson

Mc Clintock

IRSID

$m = 20'$   $n' = \text{coeff d'écrouissage cyclique}$

$C_1 = -1.35m - 4.03$

$n'$  déductible de  $b$  et  $C_2$  Lois de Manson-Coffin



# Lois phénoménologiques

Lois da/dN =	Remarques	Réf.	Lois da/dN =	Remarques	Réf.
<p><b>Classe VII (suite)</b></p> $\left[ \frac{\Delta K}{\sqrt{\lambda \sigma_{pc}}} \right]^{2n'(p+1)^2/(1+n')(p+2)}$ $C \left[ \frac{\Delta K^4}{\sigma_r^2 (K_{ic}^2 - K_{max}^2)} \right]^m$ $C \left[ \frac{(\Delta K - \Delta K_{th})^4}{\sigma_r^2 (K_{ic}^2 - K_{max}^2)} \right]^m$ $C \left[ \frac{\Delta K^4}{\sigma_r^2 K_{ic}^2} \right]^n$ $\frac{(1-\nu) \Delta K^2}{4 G \sigma_r}$	<p>(acier haut carbone) modification de [31]</p> <p>modification de [A 38]</p> <p>modification [30]</p>	<p>[42]</p> <p>[A 38]</p> <p>[A 37]</p> <p>[A 35]</p> <p>[45]</p>	<p><b>Classe IX (suite)</b></p> $a \left( \frac{\sigma}{0,1 E} \right)^2 - \frac{\rho_F}{2}$ $\frac{2 - \epsilon_F}{2 \pi \sigma_{pc} \epsilon_F} \cdot \frac{\Delta K^2}{E}$ $\frac{1}{\pi \sigma_{pc} \epsilon_F} \cdot \frac{\Delta K^2}{E} - a_0 \ln \left[ \frac{2}{2 - (1 - R)^2} \right]$ $C \left( \frac{\Delta \sigma \sqrt{a}}{\sigma_r - \Delta \sigma} \right)$ $\frac{\Delta \sigma \Delta K^2}{2 \pi E^2 \sigma_r} \left[ \ln \frac{4 E}{\Delta \sigma} - 1 \right]^2$ $C \left( \frac{\Delta K}{E} \right)^2$ $\frac{C \Delta K^4}{1 - \left( \frac{K_{max}}{K_{ic}} \right)^2}$ $\frac{C(1 - \nu^2) \Delta K^2}{\epsilon_f \sigma_{pc} E}$ $\frac{C \Delta K^m}{\mu E^2 \sigma_r^2 \epsilon_f^2}$ $\frac{C \Delta K^m}{E^2 \sigma_r^2 \epsilon_f^2}$ $C_{a_0} \left\{ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{max} - \sigma_{th}}{\sigma_r - \sigma_{th}} \right)^n \right] \right\}^{1, m}$	<p><math>\rho_F</math> = dimension de la zone d'activité (« process zone »)</p> <p><math>\mu</math> = longueur de la zone où est défini le critère de rupture</p>	<p>[51]</p> <p>[53]</p> <p>[53]</p> <p>[A 55]</p> <p>[49]</p> <p>[49]</p> <p>[A 52]</p> <p>[A 45]</p> <p>[A 14]</p> <p>[A 13]</p> <p>[A 56]</p>
<p><b>Classe VIII</b></p> $\frac{C \Delta K^2}{E \sigma_{pc}}$ $\frac{(1 - 2\nu)^2}{4 \pi (1 + n) \sigma_r^2} \left[ \frac{2 \sigma_r}{\epsilon_f E} \right]^{1+n} \Delta K^2$	<p>Rupture dans la zone de déformation log- arithmique</p>	<p>[47]</p> <p>[A 47]</p> <p>[A 11]</p> <p>[71]</p>			
<p><b>Classe IX</b></p> $C \left( \frac{\Delta K}{E} \right)^2$		<p>[48]</p>			





## Lois phénoménologiques

Lois da/dN =	Remarques	Réf.	Lois da/dN =	Remarques	Réf.
<p><i>Classe X</i></p> $C \left\{ \frac{2}{\varepsilon_f E (K_C - K_{max})} \left[ 1 - \frac{\Delta K}{K_C} \right] \right\}^{1/n} \Delta K^{2/n}$		[57]	<p><i>Classe XI</i></p> $\frac{C}{K_s^{1/n'} \cdot \sigma_y^{1+n'}} f\left(\frac{\theta}{W}, n'\right) \Delta K^{1+n'+1/n'}$		[60]
$C \left( \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_f} \right)^2 \left( \frac{\Delta K}{\sigma_y} \right)^4$		[58]	$\frac{C}{\sigma_y^2} \left[ \frac{\sigma_y}{E \varepsilon_f} \right]^{1+n} (\Delta K - \Delta K_{th})^2 \frac{K_C}{K - K_{max}}$		[62]
$\left( \frac{C}{E \sigma_y \varepsilon_f} \right)^{1/n} \frac{1}{l^{1/2} - 1} \Delta K^{2/n}$	$l$ = dimension des cellules de dislocations	[59]	$C f(\theta) \Delta K^2$		[63]
$\frac{C \Delta K^4}{\varepsilon_f E^2 \sigma_y^2 \rho^2}$	$\rho$ = longueur de la zone où agit la contrainte	[104]	$C \frac{\Delta K^2 (\Delta K^2 - \Delta K_{th}^2)}{K_{ic}^2 - 1}$		[64]
			$\frac{5 \pi (1 - \nu^2)}{96 \sigma_y^2 W^* E} \Delta K^4$	$W^*$ val. critique de l'énergie de déformation plastique	[A 57]
			$\frac{C \Delta K^4}{G U_0 \sigma^2}$	$U_0$ = énergie de surface	



## Détermination de C1

KRAFT 
$$C1 = \frac{16 \cdot 10^6 \cdot (1 + \gamma)^4 \cdot 1 - (1 - \nu)^2}{7 E^3 \cdot K_c^2 \cdot n}$$

Mc EVILY 
$$C1 = \frac{\text{cste}}{\left( \frac{\rho_u + \rho_m}{2} \right) \cdot \varepsilon_u \cdot \rho_m^2 E}$$

Mc CLINTOCK 
$$C1 = \frac{0.76}{\rho \cdot E^2 \cdot \rho_m^2 \cdot \varepsilon_f^2}$$

$\rho_m$  = résistance traction KSI

$\rho_u$  = limite élasticité KSI

$K_c$  = tenacité KSI inches<sup>1/2</sup>

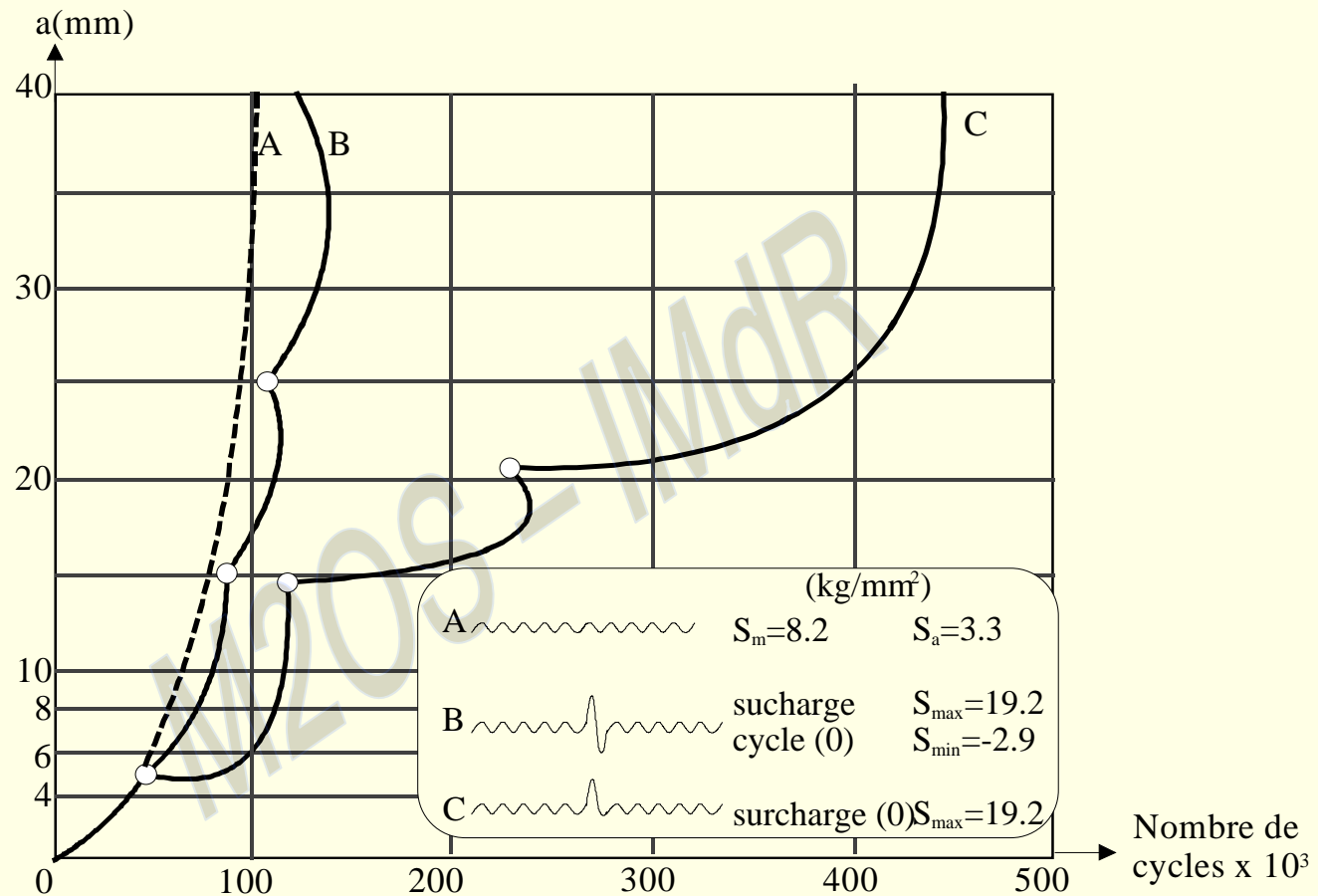
$\varepsilon_u$  = allongement réparti

$\varepsilon_f$  = déformation rationnelle à rupture

$n$  = coefficient d'écroutissage

$$\gamma = \frac{\Delta K}{K_{\max}} \quad \rho = \text{intervalle inclusionnaire}$$

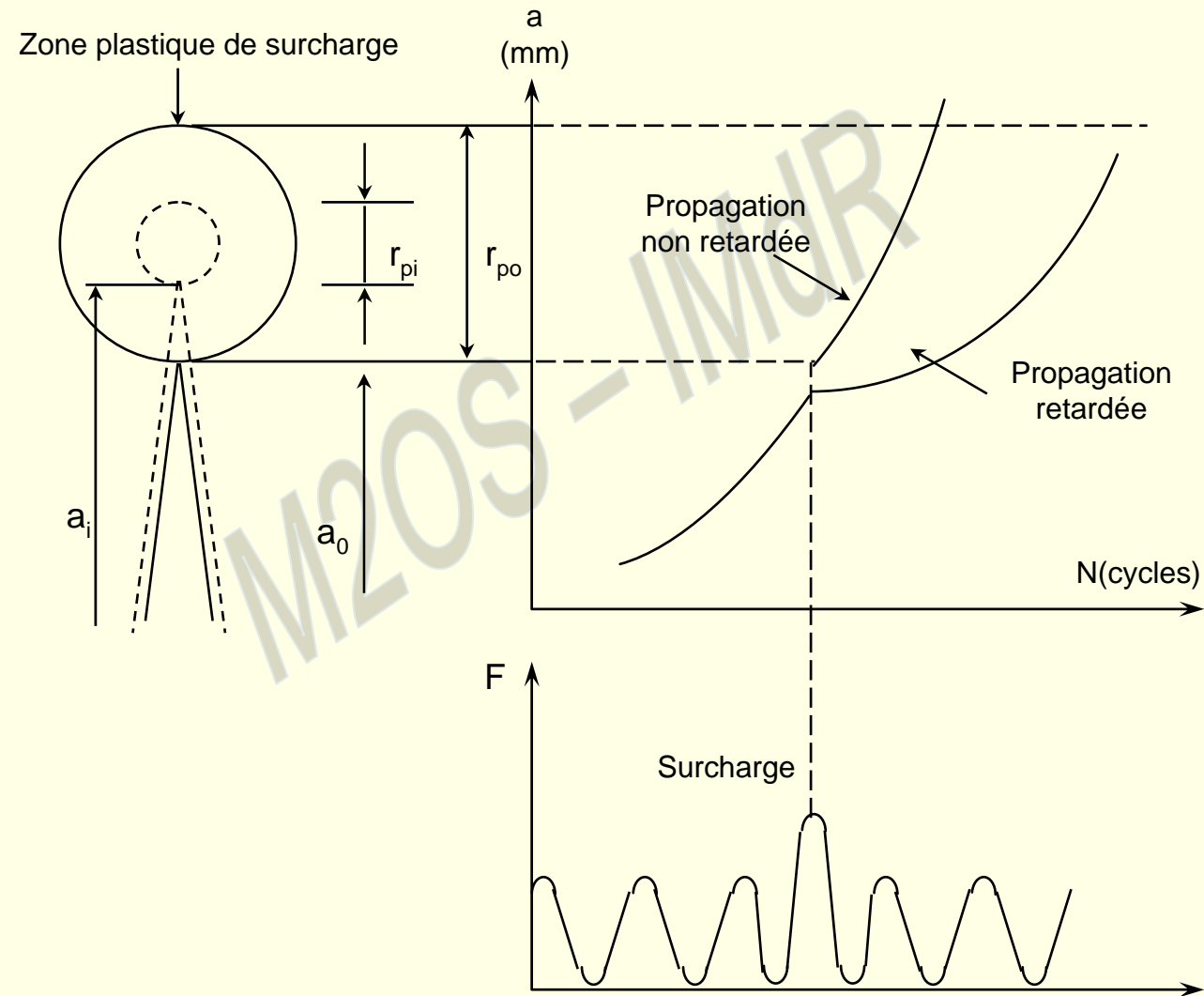




Retard après surcharges dans l'alliage d'aluminium 2024-T3 d'après Schijve et Broek



## Schématisation du modèle de Wheeler



## COURBES DE DEFORMATION D'ASHBY

- Tracées en fonction de  $s$ ,  $T$  indique les domaines ou prédomine un mécanisme de déformation et de rupture donné
- Tracées en coordonnées réduites
- Plusieurs domaines sont distingués :
  - ↻ clivage 1 : amorce sur macro défaut
  - ↻ clivage 2 : zone de déformation plastique hétérogène
  - ↻ clivage 3 : après déformation plastique macroscopique
  - ↻ ductile
  - ↻ fluage transgranulaire
  - ↻ fluage intergranulaire
  - ↻ recristallisation dynamique



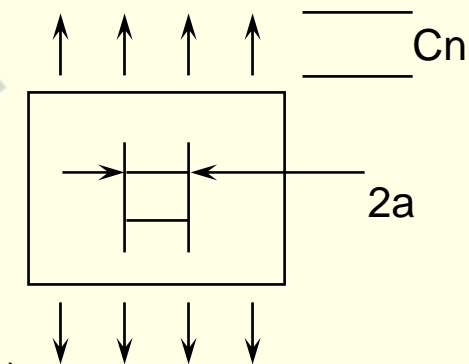
# MECANIQUE DE LA RUPTURE

## P.B. : VITESSE DE PROPAGATION DES FISSURES DE FATIGUE

Taille critique d'un défaut

Définition de KI  $KI \propto C_n \sqrt{2\pi a}$

KIC mesure de la résistance d'un matériau  
à la propagation brutale d'une fissure  
(KISCC : utilisé pour la corrosion sous tension)



## APPLICATION A LA FATIGUE

Propagation de fissure et  $C_n$ (charge)  $\longrightarrow$  Variations  $a$  (géométrique)  
 $\longrightarrow$  Variation de  $K$

PARIS :  $\frac{da}{dn} = C_1 (\Delta K)^m$   $K = K_{max} - K_{min}$   
 $K_s =$  seuil de non propagation

$$\frac{da}{dn} < 5 \cdot 10^{-7} \text{ mm/cycle}$$



## MODELES DE FISSURATION

- Modèles phénoménologiques
- Modèles basés sur la théorie des dislocations
- Modèles basés sur le comportement du matériau en tête de fissure
- Modèles fondés sur les propriétés cycliques du matériau
  - ↳ lois de fatigue oligocyclique
  - ↳ dissipation d'énergie plastique en tête de la fissure



## VITESSE DE FISSURATION

### → Loi de PARIS

$$\frac{da}{dN} = C_1 [\Delta K]^{n_1}$$

### → Loi de FORMAN

Introduit

- ➔ la sollicitation moyenne
- ➔ la rupture fragile

$$\left( K_M \rightarrow K_C \Rightarrow \frac{da}{dN} \rightarrow \infty \right)$$

$$\boxed{\frac{da}{dN} = \frac{C_2 [\Delta K]^{n_2}}{(1-R)(K_C - K_M)}} \quad \text{avec } R = \frac{K_{\max}}{K_{\min}}$$

- ➔ Modèle de WHEELER-PARIS (4 paramètres)
- ➔ Introduit un coefficient de retard : b1





## VITESSE DE FISSURATION (suite)

→  $\rho_K = \frac{K_I^2}{2\pi \sigma_y^2}$  : longueur Zmc plastique

→  $\sigma_y$  : limite élasticité matériau

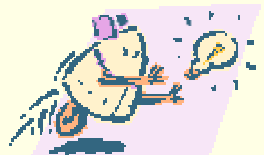
→ Surcharge rMS  $\rho_N = \frac{K_I^2 \rho_{MS}}{2\pi \sigma_y^2} - (a - a_s)$

→  $a_s$  longueur correspond à  $\rho_{MS}$

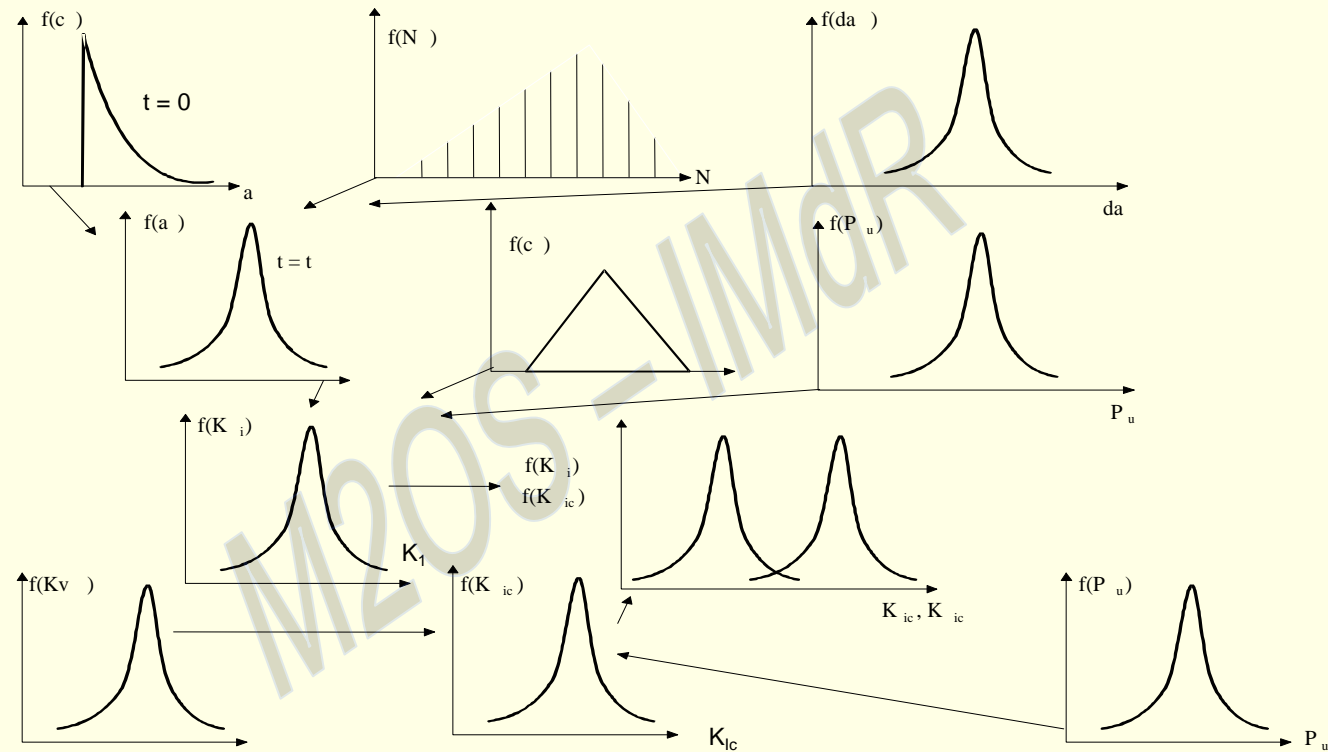
$$\frac{da}{dN} = C_5 K_M \left[ \frac{1-R}{1-mR} \right]^{\eta_5} - \left( \frac{\rho_K}{\rho_N} \right)^{\beta_1}$$

→ Loi RMS

$$\frac{da}{dN} = C_7 (\Delta K_{RMS})^{\eta_7} \quad \text{avec} \quad \Delta K_{RMS} = \left[ \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \Delta K_i^2 \right]^{1/2}$$



# UTILISATION EN FIABILITE



$$\int_{a_c}^{a_0} \frac{da}{h(a)^n} = \sum_{K=1}^{N(t)} \Delta C_K^n$$



## UTILISATION EN FIABILITE

### Mécanique de la rupture

Données : Facteur d'intensité de contrainte pour une pièce et une géométrie de défaut

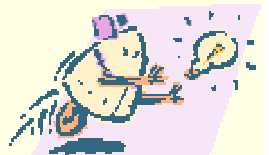
$a_0$  = dimension du plus grand défaut initial

$a_c$  = dimension critique conduisant à la rupture

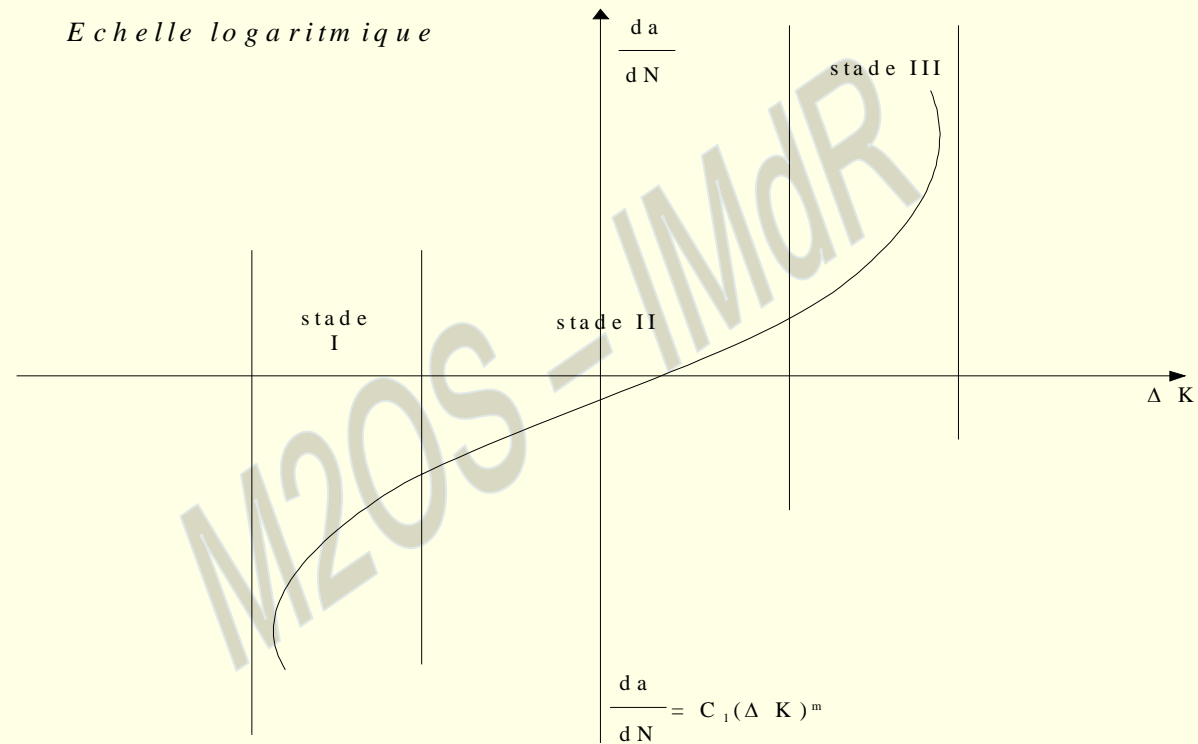
$$\int_{a_c}^{a_0} \frac{da}{a^{m/2}} = A C_1 \alpha^m \cdot \Delta C^m N_f$$

si  $a_c \gg a_0$  et  $m \neq 2$

$$N_f = 1 / \left[ (a_0)^{\frac{m}{2}-1} \cdot A_1 \cdot C_1 \alpha^m \cdot \Delta C^m \right]$$



# LOI DE FISSURATION



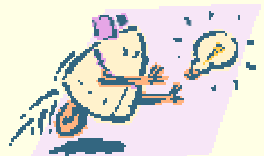
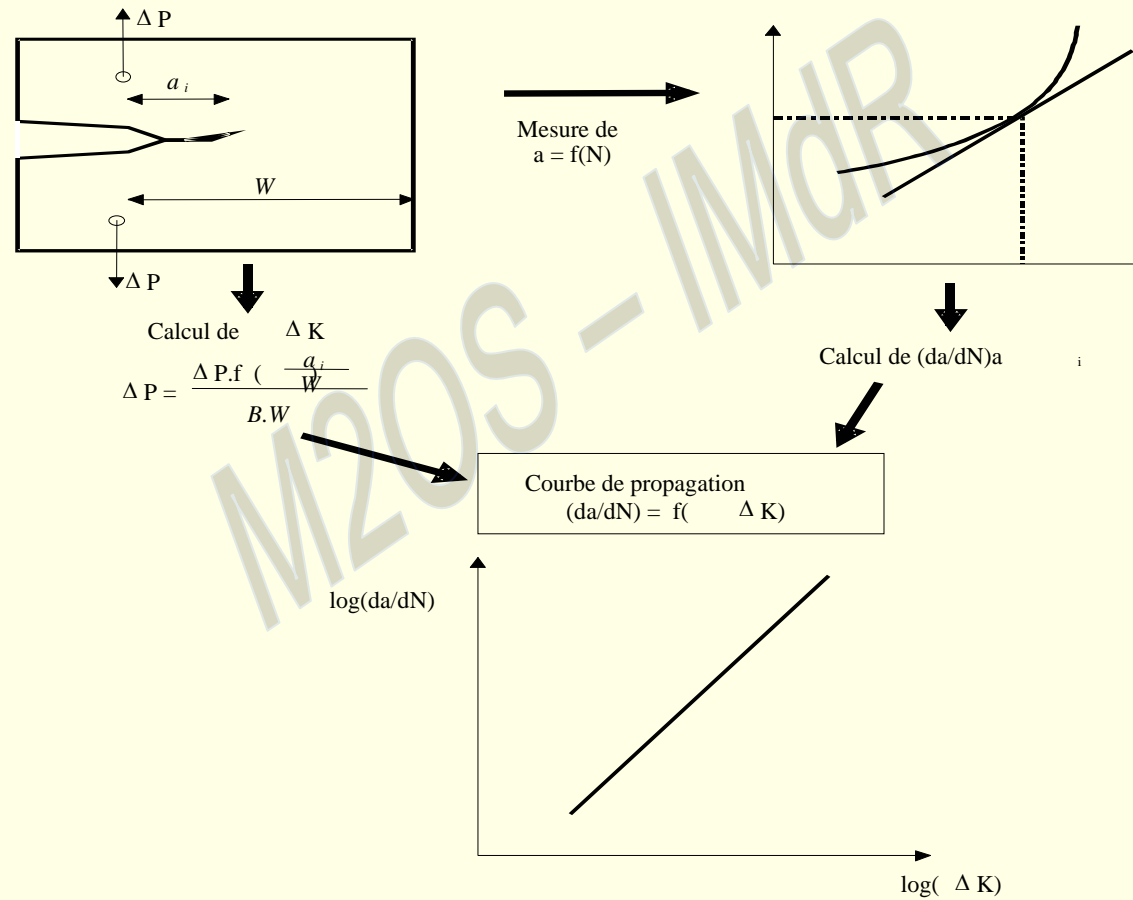
Stade I - Fonction de la charge MAX

Stade II - Loi de PARIS propagation lente

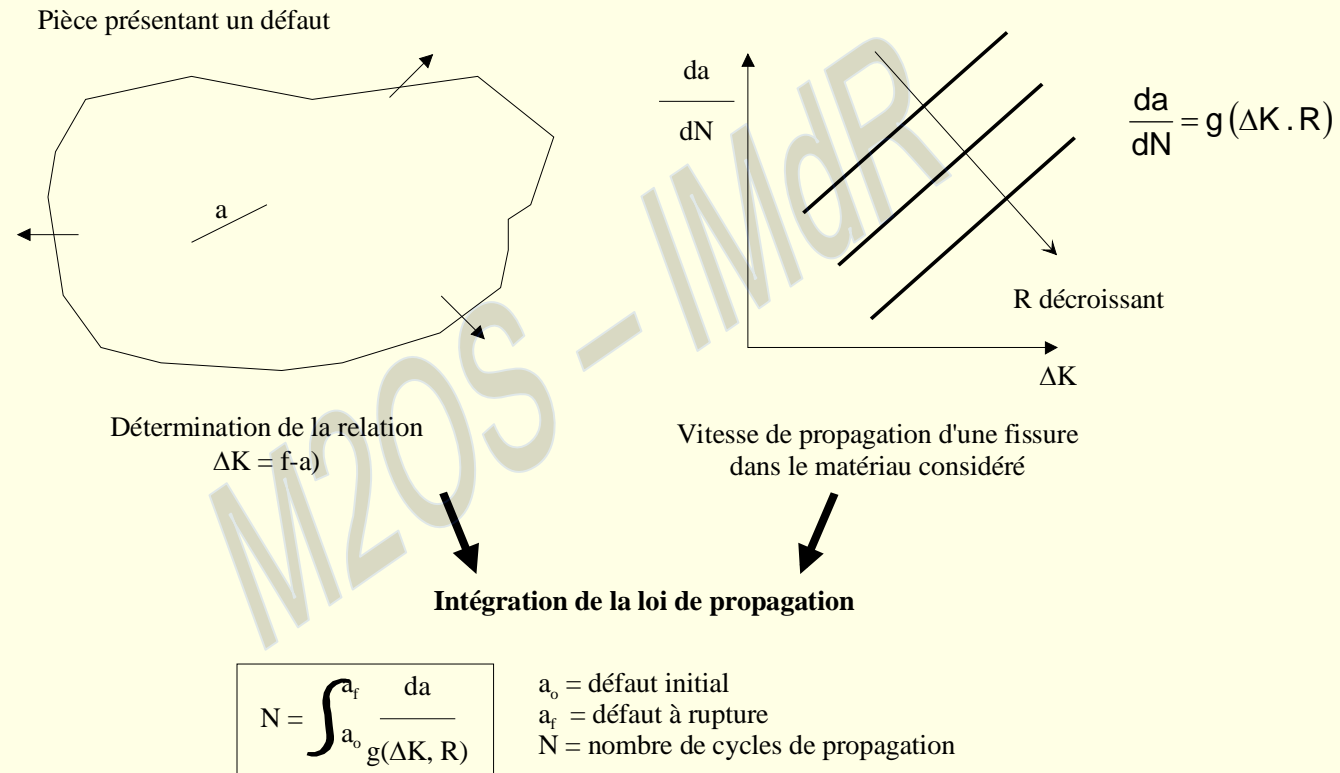
Stade III - Rupture finale



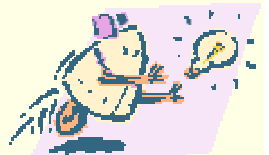
## Principe de la détermination de la vitesse de propagation d'une fissure en fatigue



## Principe du calcul du temps de propagation d'un défaut



Cette intégration peut être réalisée de manière analytique ou par un calcul itératif



# Lois phénoménologiques

Lois da/dN =	Remarques	Réf.	Lois da/dN =	Remarques	Réf.
<p><i>Classe I</i></p> <p><math>C\sigma^m a^p</math></p> <p><math>C\sigma^3 a</math></p> <p><math>\frac{C\sigma^3 a^{3/2}}{(\sigma_y - \Delta\sigma)^2 a_0^{1/2}}</math></p> <p><math>C\sigma^m</math></p> <p><math>C\sigma a</math></p> <p><math>C\sigma\sqrt{a}</math></p> <p><math>C\sigma^2 a</math></p> <p><math>\frac{C\sigma^2 a}{EG_{IC}\sigma_u^2}</math></p> <p><math>C(P + Q\bar{\sigma}) \Delta\sigma^m a</math></p> <p><math>C\sigma\sqrt{a} (1 - R)^m</math></p> <p><math>\left\{ \frac{\sigma\sqrt{a}}{\left[ \left( \frac{\sigma_y + \sigma_u}{2} \right) \epsilon_u \sigma_u^2 E \right]^{1/4}} \right\}^m</math></p> <p><math>\frac{C\sigma^4 a^2}{\left( \frac{\sigma_y + \sigma_u}{2} \right) \epsilon_u \sigma_u^2 E}</math></p> <p><math>C\sigma^m a</math></p> <p><math>C \frac{\sigma^2 a}{\sigma_y - \sigma}</math></p>	<p><math>a_0 =</math> longueur initiale de la fissure (aciers)</p> <p>plusieurs métaux alliages aluminium</p> <p>issu du modèle de Weertman</p> <p>(cuivre)</p>	<p>[A 25]</p> <p>[A 27]</p> <p>[A 30]</p> <p>[A 24]</p> <p>[A 54]</p> <p>[A 28]</p> <p>[A 26]</p> <p>[A 20]</p> <p>[5]</p> <p>[A 21]</p> <p>[A 14]</p> <p>[A 5]</p> <p>[A 15]</p> <p>[A 7]</p>	<p><i>Classe II</i></p> <p><math>C \Delta K^m</math></p> <p><math>\frac{C}{E^3} \left( \frac{K_{max}}{K_{IC}} \right)^4</math></p> <p><math>\frac{C \Delta K^m}{E^3 K_I^2}</math></p> <p><math>C \left( K_{max} \frac{\Delta K}{2} \right)^2</math></p> <p><math>C \Delta K^m K_{max}^n</math></p> <p><math>C \frac{\Delta K^m}{K_c}</math></p> <p><math>CK_{max}^m</math> et <math>\frac{CK_{max}^m}{E\sigma_y K_{IC}}</math></p> <p><math>\frac{C \Delta K^m}{E\sigma_y K_{IC}}</math> ou <math>\frac{C \Delta K^m}{E\sigma_u \epsilon_f}</math></p> <p><math>\frac{C(\Delta K - \Delta K_{th})^m K_{max}}{K_c - K_{max}}</math></p> <p><math>\left( \frac{\Delta K}{E} \right)^2</math></p> <p><math>\frac{C}{E} (\Delta K^2 - \Delta K_{th}^2)</math></p> <p><math>C(K_{max} - K_{ouv})^m</math> ou <math>C[U(R) \Delta K]^m</math></p>	<p>(aluminium)</p> <p>Acier 4340</p>	<p>[1]</p> <p>[A 29]</p> <p>[A 31]</p> <p>[A 3]</p> <p>[A 8]</p> <p>[A 32]</p> <p>[A 51]</p> <p>[84]</p> <p>[12]</p> <p>[A 6-A 4]</p> <p>[A 22]</p> <p>[21]</p>



# Lois phénoménologiques

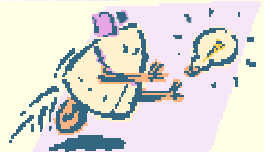
Lois da/dN =	Remarques	Réf.	Lois da/dN =	Remarques	Réf.
<p><i>Classe II (suite)</i></p> $C \frac{\Delta K^n}{E_{\sigma'}} \text{ avec } m \propto \frac{1}{E_{\sigma'}^2}$ $C \Delta K^3$			<p><i>Classe III</i></p> $\frac{C \cdot \Delta K^m}{(1-R) K_C - \Delta K}$		
	(plusieurs métaux)	[66]		(aluminium, aciers hautes résistances)	[6]
	(acier bas et moyen carbone)	[A 33]	$C \left( \frac{\Delta K}{1-R} \right)^3 \exp(-BR)$		[4]
$C(\Delta K^m - \Delta K_{th}^m)$	(acier au carbone)	[A 1]	$C(1+\beta)^n \Delta K^m$	$\beta = \frac{1+R}{1-R}$	[A 48]
$C \left( \frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{K_C - K_{max}} \right)^m$		[A 34]	$\frac{C(1+\beta) \Delta K^3}{K_C - (1+\beta) \Delta K}$		[A 49]
$10^{-4} \left( \frac{\Delta K}{\Delta K_C} \right)^m$		[A 15]	$\frac{C \cdot \Delta K^m}{\sqrt{(1-R) K_C - \Delta K}}$		[11]
$C \left( \frac{\Delta K}{E} \right)^{3,5}$	(aluminium)	[A 9]	$\frac{C \cdot \Delta K^m}{(1-R)(K_C - K_{max})}$		[A 2]
$C \left( \frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{K_C - K_{max}} \right)^m$		[14]	$\left( \frac{A}{B-R} \right) \Delta K^m$	(Ti-6Al-4V)	[A 39]
$\frac{C \Delta K^m K_{max}}{K_C - K_{max}}$		[A 19]	$\frac{C(\Delta K - \Delta K_{th})^m}{[(1-R) K_C - \Delta K]^n}$	(acier haute résistance)	[A 42]
$CK_{max}^m \left( \frac{K_{max} - \Delta K_{th}}{K_{max}} \right)^n \left( \frac{K_{max}}{K_C - K_{max}} \right)^m$	cycle au hasard	[A 19]	$\frac{C \Delta K^n}{(1-R) K_C - \Delta K} N_2$		[A 58]
$C \left( \frac{\omega}{\sigma_p - \sigma} \right) \Delta K^m$	effet surcharge	[A 10-44]	$\frac{C \Delta K^n}{(K_i/K_{max} - 1)^{n_1}} \cdot \left( \frac{K_{max}}{\Delta K_{th}} - 1 \right)^{n_2}$		[A 59]
$\frac{(\Delta K - \Delta K_{th})^n}{K_C - \Delta K}$	(R = 0, aluminium)	[A 43]	$\frac{C \Delta K_{eff}^3}{\sigma_{re} E}; \Delta K_{eff} = \frac{\Delta K}{(1-R)^m}$	(m = 0,2, super-alliage)	[A 45]
$\frac{C}{\sigma_p E} [\Delta K - \Delta K_{th}]^2 \left[ 1 + \frac{\Delta K}{K_{IC} - K_{max}} \right]$		[50]			





## Lois phénoménologiques

Lois da/dN =	Remarques	Réf.	Lois da/dN =	Remarques	Réf.
<p><i>Classe III (suite)</i></p> $\frac{C(\Delta K^m - \Delta K_{th}^m)}{(1-R)^r}$ $(\Delta K - \Delta K_{th})^2 \frac{C \Delta K^N}{(1-R) K_c - \Delta K}$ $C \Delta K^N \frac{(K_{max} - K_{th})^{N_2}}{\Delta K_{th}^{N_2} K_c^{N_2}} K_{max}^{N_1} \left( \frac{K_c}{K_c - K_{max}} \right)^{N_1}$	acier	[A 38] [A 61] [A 62]	<p><i>Classe V (suite)</i></p> <p><math>f_{(a)}</math> = polynôme qui dépend environnement</p> $C_1 \exp \left[ C_2 \operatorname{th}^{-1} \left\{ \frac{\ln \left[ \frac{\Delta K^2}{(1-R) K_c \Delta K_{th}} \right]}{\ln \left[ \frac{(1-R) K_c}{\Delta K_{th}} \right]} \right\} \right]$		[A 18] [A 60]
<p><i>Classe IV</i></p> $C \Delta \sigma^3 \bar{\sigma} a$ $C(R) \Delta K^m a^r$		[A 27] [A 17]	<p><i>Classe VI</i></p> $C \exp - \frac{Q(\Delta K)}{RT}$ $C \Delta K^{(1/mA T)(2n'/n + 1)}$	effet température (acier) modèle dislocation	[A 45] [A 46] [A 53]
<p><i>Classe V</i></p> $B \exp \left[ - \operatorname{Arctg} \pi \frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{K_{IC} - \Delta K_{th}} \right]$ <p><math>\ln [C_1 + C_2 \operatorname{Arctg} \phi_{eff}]</math> avec <math>\phi_{eff} = \frac{\ln (K_c \Delta K_{th} / K_{eff}^2)}{\ln (\Delta K_{th} / K_c)}</math></p> <p>et <math>K_{eff} = K_{max}(1-R)^m</math></p> <p><math>\exp [C_1 \operatorname{sh} (C_2 \ln \Delta K + C_3) + C_4]</math> Intègre effet T, f, R</p> $C \left\{ f_{(a)} \left[ 1 - \frac{\Delta K_{th}}{K_{max}} \right]^n \left( \frac{K_{max}}{K_{th}} \right)^m \right\}$		[68] [A 16] [A 46]	<p><i>Classe VII</i></p> $\frac{C \cdot \Delta K^4}{\sigma_c^2 K_{IC}}$ $\frac{C \Delta K^4}{\sigma_y^2 (K_{IC}^2 - K_{max}^2)}$ $\frac{C \Delta \sigma^{(2n'+1)/n'} a}{k_2^{1/n'} \sigma_y^2}$ $C \left[ \frac{\Delta K}{\mu \sqrt{x}} \right]^{(p+1)^2/(p+2)}$	x = distance moyenne où est appliquée la contrainte	[30] [31] [32] [40]



## JOINTS SOUDES

### → Modèle de MADDIX

$$K = C \sqrt{\pi a} \frac{M_s \cdot M_t \cdot M_K}{\phi_0}$$

MS = correction de surface libre

Mt = correction d'épaisseur

MK = correction de concentration

Æ0 = facteur de forme

lieurade a calculé durée de vie f(q)

### → Modèle de LAWRENCE

a) Calcul par E.F. du champ de contrainte

b) Ajustement courbes 4e degré  $\frac{C}{S_{nom}}$

c) Calcul du facteur d'intensité de contrainte  $K = \sqrt{\pi a} \left\{ 1.1 C - \int_0^{a_i} f\left(\frac{X}{a}\right) \frac{dc}{dX} dX \right\}$

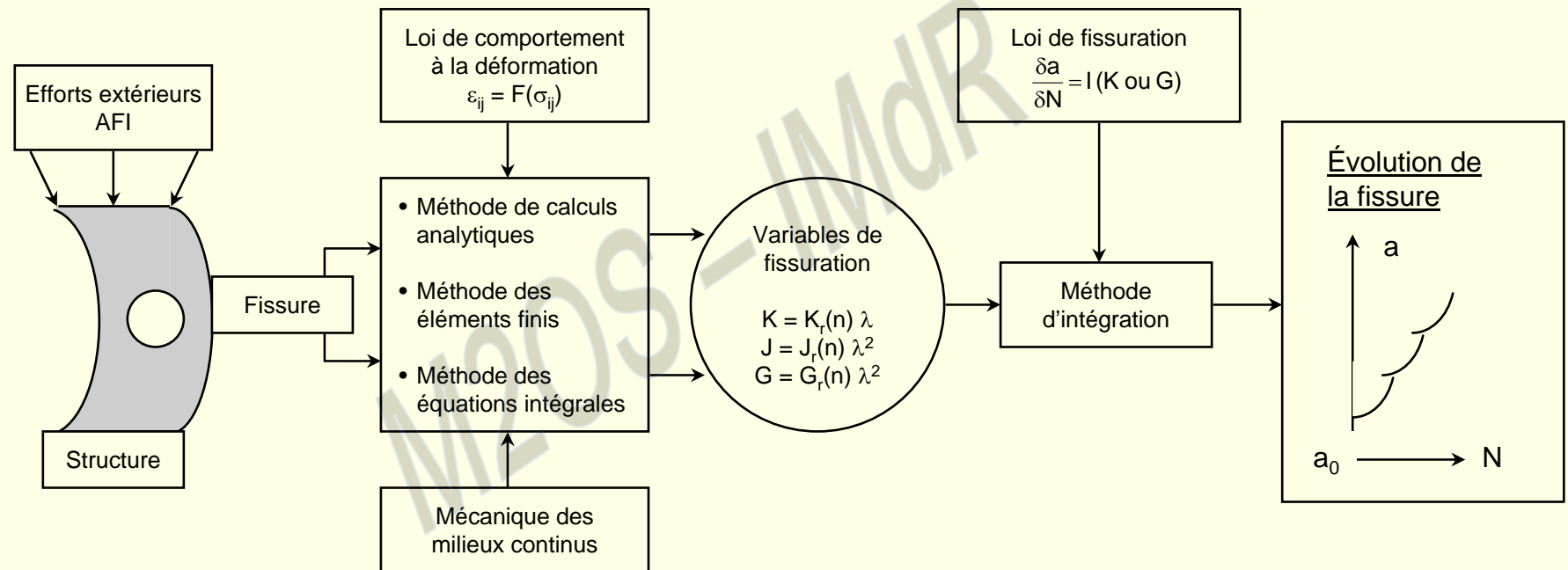
### → Modèle de BOUSSEAU

$$\frac{da}{dN} = C_K \left( 1.1 C_N \sqrt{\pi a} K_t \right)^m$$

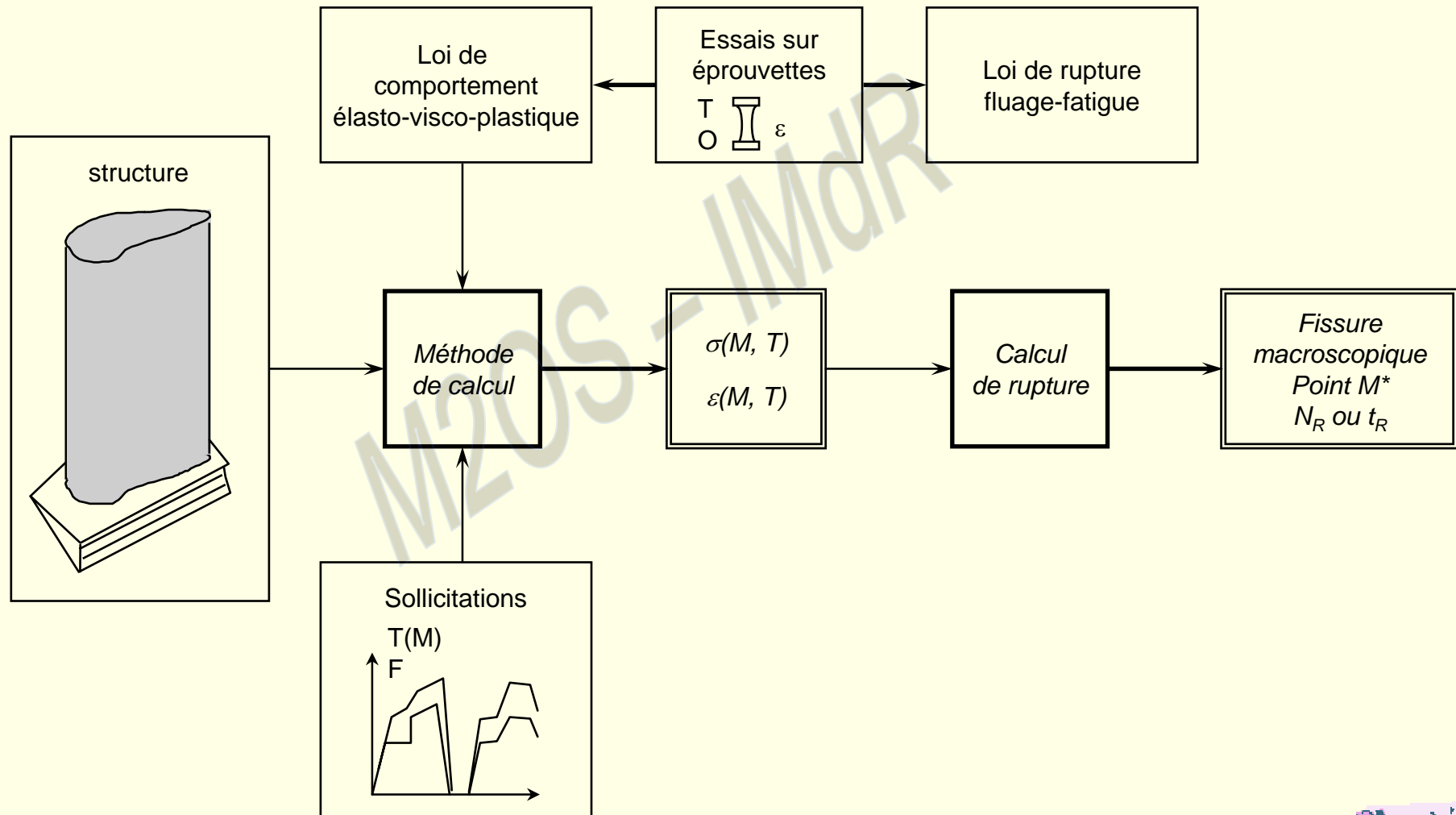
Essai IRSID sur E355



## Organigramme d'un problème de prévision d'évolution de fissure



## Prévision de la fatigue à haute température



# 7. AMORCAGE



## AMORCAGE EN FATIGUE A CHAUD

- Écrouissage et fluage
- Lois de plasticité cyclique
- Lois viscoplasticité cyclique

Méthode de partition de la déformation

Strain range partitionning



# PREVISION DE L'AMORCAGE

## REGLE DE NEUBER

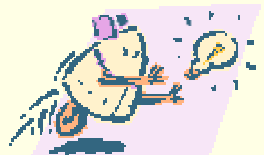
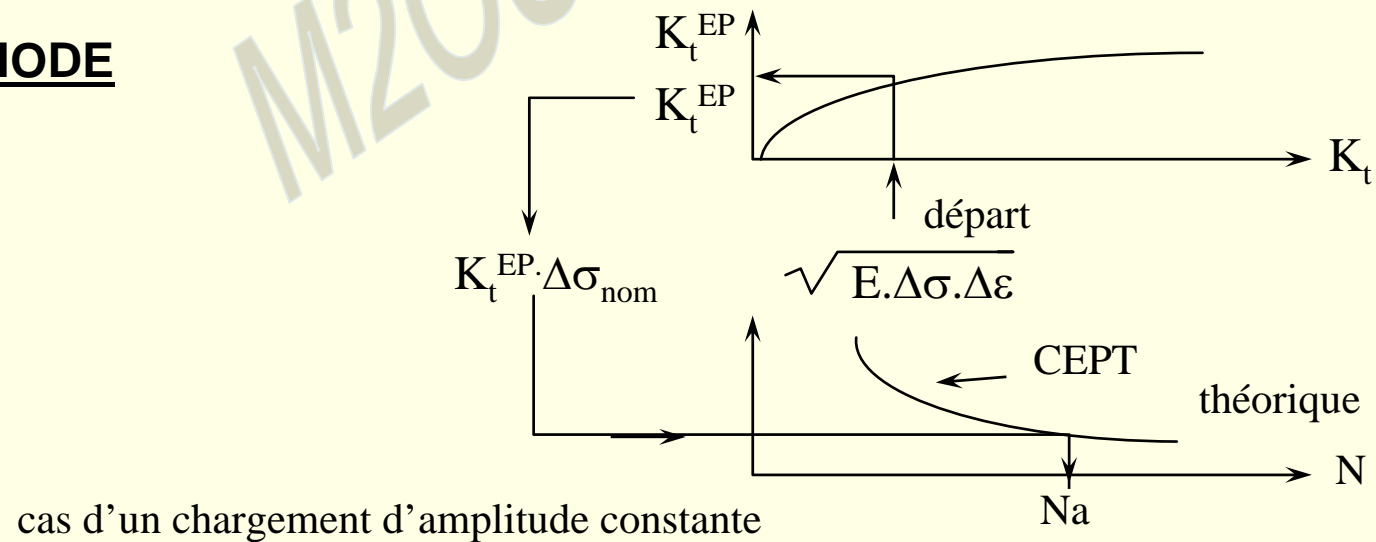
$$K_t^2 = K_\sigma - k\varepsilon$$

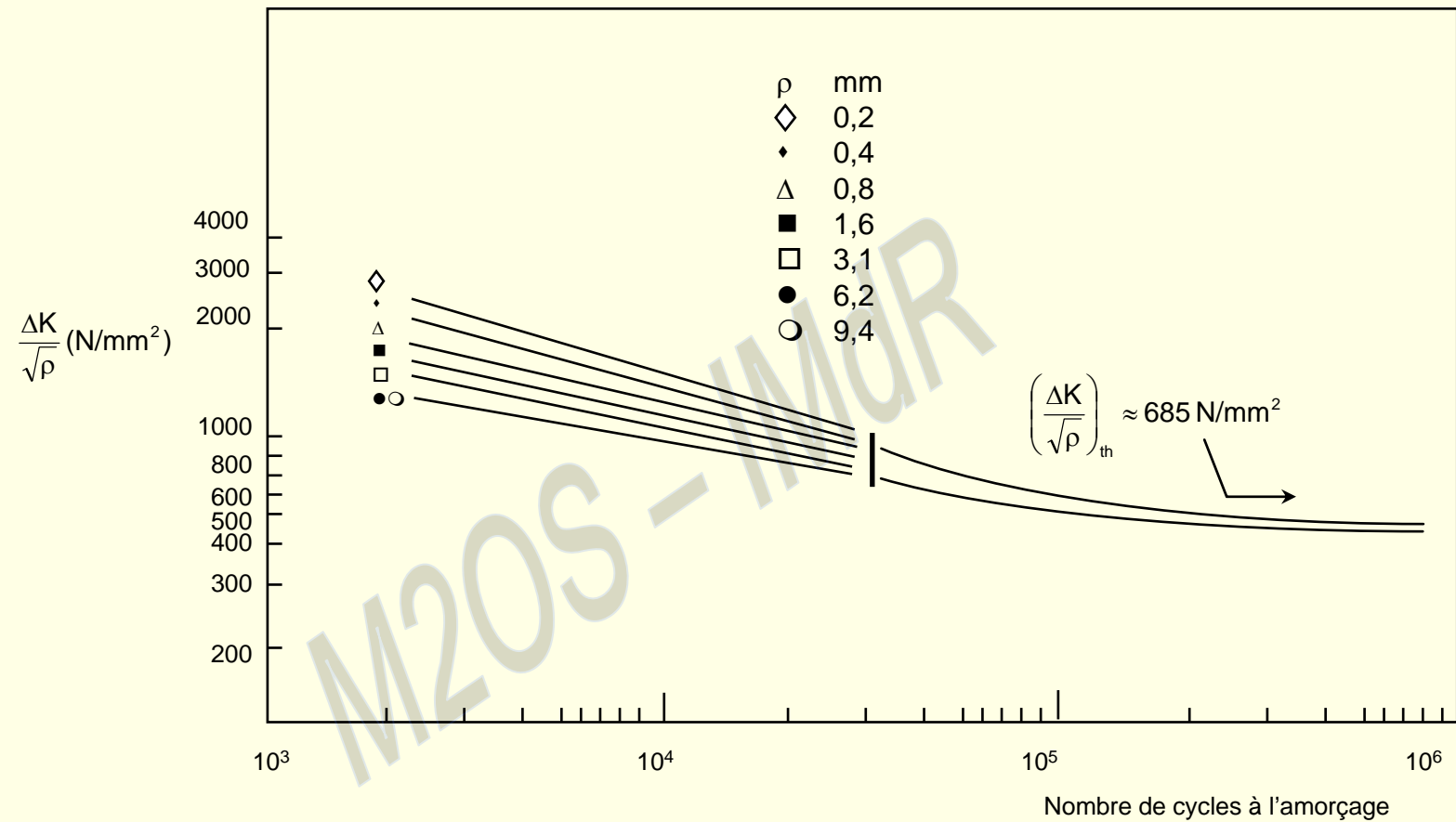
$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_{\text{nom}}} \quad \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta\varepsilon_{\text{nom}}}$$

critère  $\sqrt{E \cdot \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon} = K_t^{\text{EP}} \cdot \Delta\sigma_{\text{nom}} = \text{cste}$

↘ P.E.P.A

## METHODE





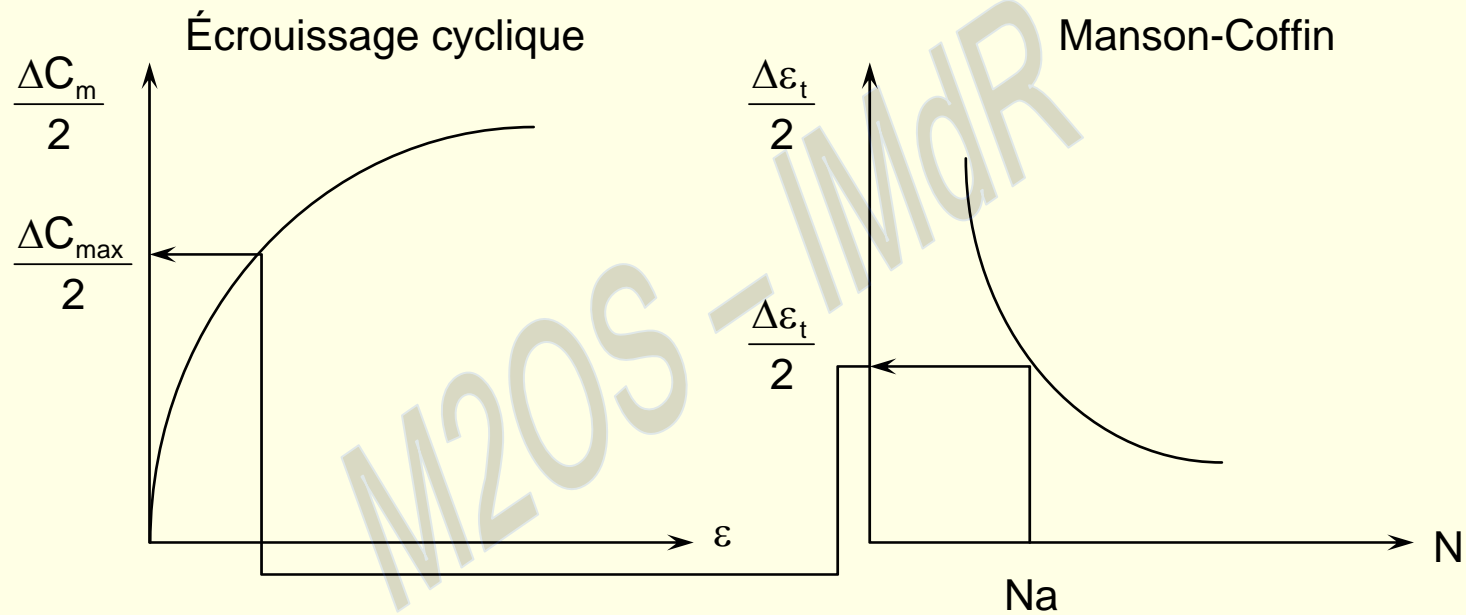
Corrélation entre le nombre de cycles nécessaires à l'amorçage d'une fissure de fatigue et le rapport  $\frac{\Delta K}{\sqrt{\rho}}$

(acier HY130 ; d'après BARSOM et Mc NICOL)





# DETERMINATION CEPT



$$\text{CEPT} = \left\{ N_a; \sqrt{E \cdot \Delta C_{\max} \cdot \Delta \varepsilon_t} \right\}$$



## AMORCAGE

- Méthode fondée sur le coefficient de NEUBER
- Méthode fondée sur l'amplitude locale de déformation
- Méthode fondée sur le facteur d'intensité de contrainte

$$\Delta K_S = 7,03(1 - 0,85R)$$

BARSON

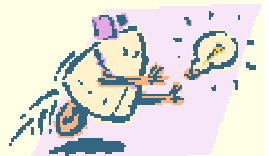
$$\Delta K_{S0} = \text{Valeur de } \Delta K_S \text{ par } R = 0$$

Mc EVILY

$$\Delta K_S = \frac{1,2\Delta K_{S0}}{1 + 0,2 \frac{1+R}{1-R}}$$

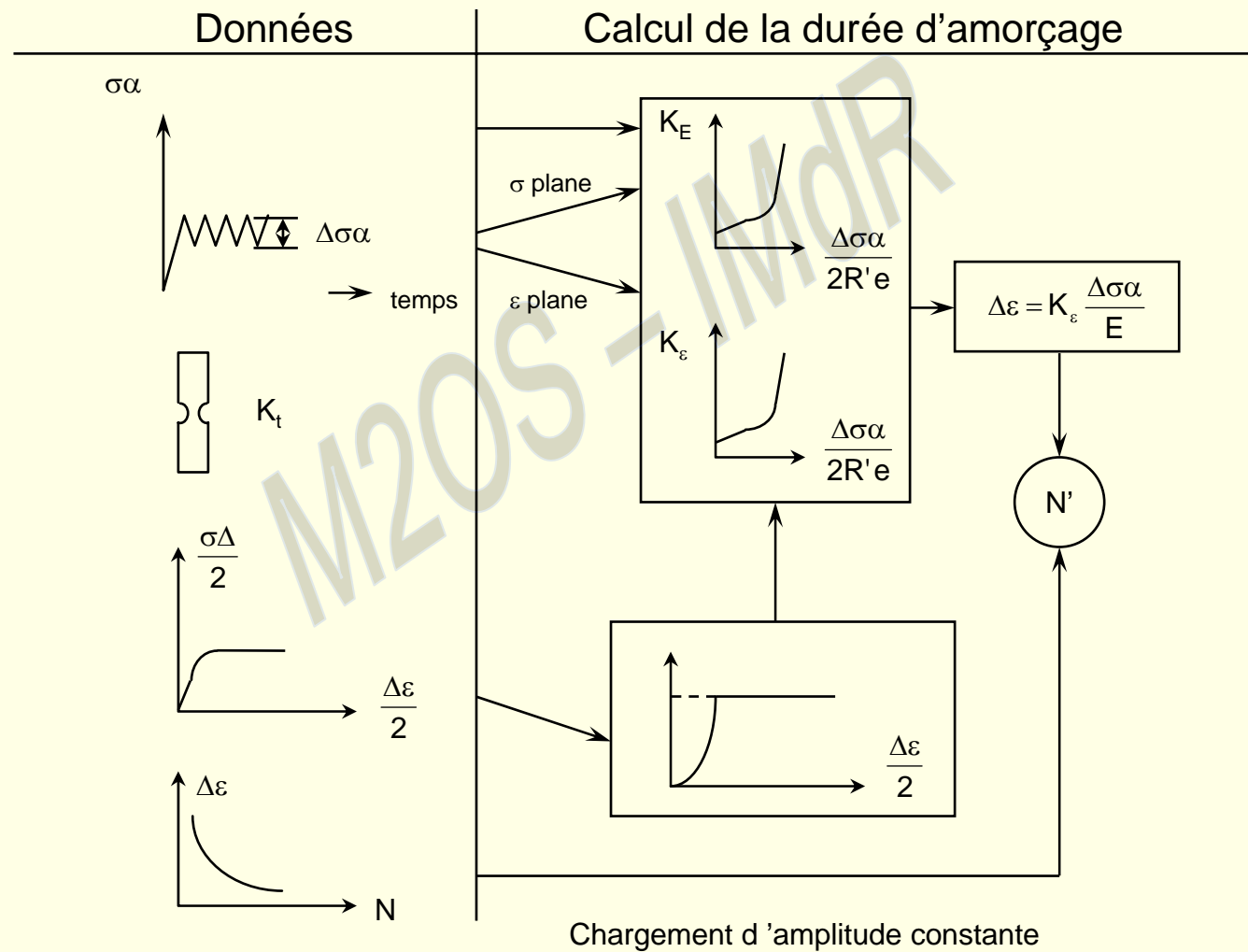
$$\Delta K_S = \Delta K_{S0} (1 - R)^\gamma$$

KLESNIL et LUCAS

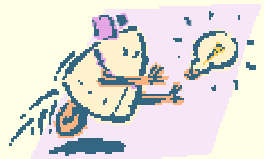


# PREVISION D'AMORCAGE

Méthode SHO, modifié par ZWICKY

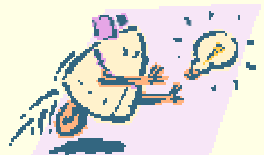


## 8. PIÈCES PARTICULIÈRES



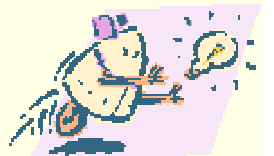
## PIECES PARTICULIERES

- MOTEURS ELECTRIQUES : MIL HDBK 217 E  
RECUEIL DE FIABILITE CNET
  - RESSORTS : METHODE STRESS - STRENGTH
  - RELAIS : MIL HDBK 217 E - CNET
  - VIS SANS FIN : METHODES BSI
  - ROULEMENTS
  - PALIERS
  - ENGRENAGES
  - ARBRES CANNELES
  - NOUVEAUX MODELES (CCPT, ...)
- } MODELES



## LES ROULEMENTS

- Méthodes SKF (loi de WEIBULL)
- Tables de données
  - ⇒ AVCO
  - ⇒ FARADA
  - ⇒ TR 75.22
- Modèles



# LES ROULEMENTS

Capacité dynamique

$P = 3$  Billes

$P = \frac{10}{3}$  Rouleaux

Charge équivalente

Durée de vie utile

$L_{10} = \left[ \frac{C}{P} \right]^{\beta}$

$\beta = \frac{10}{9}$

$R = e \left[ \frac{L - L_0}{(L_{10} - L_0) / (\text{Log } 0.9)^{\frac{1}{\beta}}} \right]^{\beta}$

$L_0 = 0.05 L_{10} / \text{Tallian}$

ou simplifiée  $R = e - 0.105 \left[ \frac{t}{L_{10}} \right]^{\beta}$  ( $\beta \cong 1.5$ )

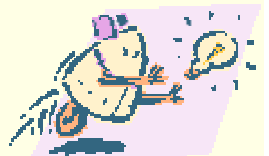


## PIECES PARTICULIERES LES ROULEMENTS

### → CALCUL DE LA DUREE DE VIE

- ➔ Formule «classique»
- ➔ Fiabilité
- ➔ Formule «modernisée»

### → REMARQUES





## ENGRENAGES

### → METHODES SIMPLIFIEES :

- ⇒ WAY STEWART
- ⇒ WELLAUER

### → METHODES ELABOREES :

- ⇒ HENRIOT
- ⇒ AGMA



# LES ROULEMENTS

Projet ISO

Facteur fiabilité

Facteur matière

Conditions de fonctionnement

$$Lna = a_1$$

 $a_2$ 
 $a_3$ 

$$\left[ \frac{C}{P} \right]^P$$

Durée corrigée

SKF

$$Lna = a_1$$

 $a_{23}$ 

$$\left[ \frac{C}{P} \right]^P$$

Facteur combiné f (viscosité, type acier)



## REMARQUES

- Non applicables dans le cas de :
  - ➔ faibles et hautes vitesses
  - ➔ cas de charges complexes
  - ➔ charges vibrantes
  - ➔ roulement "mal" lubrifié et employé
  - ➔ critères de rejet non spécifiés
  - ➔ durée de vie résiduelle
  
- Modèles résultant d'essais de laboratoire



# ENGRENAGES

WAY STEWART

Dureté Brinell

$$L_{10} = \left[ \frac{0.21 H_b}{P_0} \right]^{\frac{20}{3}} \times 10^8$$

↑  
Nombre sollicitations d'une dent

Rapport de pression

Rapport d'engrenage

Module Young

$$P_0 = 0.418 \left[ \frac{\sum \cdot P_i \cdot (1 + U)}{D_p} \times \frac{4E}{\sin 2\phi} \right]^{\frac{1}{2}}$$

↑  
Ø primitif

↑  
Angle de pression

Pression linéaire



# ENGRENAGES

## METHODE WELLAUER

Nombre dents menantes  
↓

$$W_w = F \cdot K \cdot d \left[ \frac{1250 N_g}{N_p + N_g} \right]$$

↑   ↑   ↑   ↑   ↑

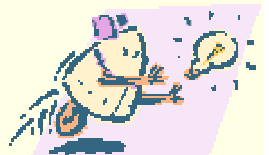
Charge d'usure   Facteur charge contrainte   Diamètre primitif   Nombre dents menées

Facteur matériau  
↓

$$K = \frac{K_1 \sin \varnothing}{4}$$

← Angle de pression

Loi de WEIBULL pour différents rapports  $\frac{C}{W_w}$



## PIECES PARTICULIERES LES ENGRENAGES

### \* Méthodes simplifiées :

- TR6450 (WELLAUER)  $L = \left[ \frac{C}{W} \right]^x$  W = charge d'usure

- WAY - STEWART  $L_{10} = \left[ \frac{0.21Hb}{P_0} \right]^{\frac{20}{3}} \times 10^8$

Méthodes rapides mais :

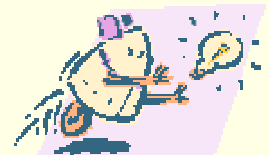
- pas de facteur lubrification
- un seul mode de défaillance (usure)
- pas de calcul de durée de vie

### \* Méthodes élaborées : AGMA, HENRICOT

Deux modes de défaillance considérés :

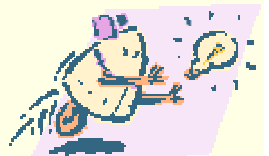
- usure
- rupture de dent

Lourdeur d'emploi, mais prennent en compte les facteurs de charge, de lubrification, de dureté, etc.



## ARBRES CANNELES

- Tables de taux de défaillance
- Approche contrainte - résistance
- Approche Schluster et Meisel



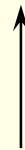
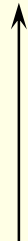
# ARBRES CANNELES

C. SCHLUSTER    D. MEISEL

Moment admissible arbre cannelé



$$\frac{MtK}{Mt} = K_a \cdot K_b \cdot K_c$$



Facteur dimension

Facteur «classe»

Facteur «matériau»

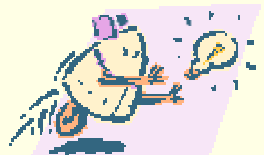
Moment admissible arbre lisse

Probabilité de défaillance

Ø de l'arbre



Comparaison de MtK avec  $Mt = \frac{\pi d^3}{16} \cdot \gamma$  ← Résistance torsion





# FIABILITE MECANIQUE

## Fiabilité des Structures



# SOMMAIRE

1. Probabilités
2. Statistique « >> »
3. Fiabilité Mécanique « >> »
  - Introduction - Les enjeux
  - Démarche probabiliste
  - Méthodes de fiabilité
  - Objectif
  - Cas fondamental
  - Indice de Corneil - Indice d'Hasofer et Lind
  - Évaluation de la probabilité de défaillance
  - Méthode de Monte-Carlo
  - Méthodes FORM/SORM
  - Analyse de sensibilité
  - Fiabilité système
  - Codes probabilistes
  - Règlements et calibration
  - Coefficients partiels de sécurité
  - Conclusion



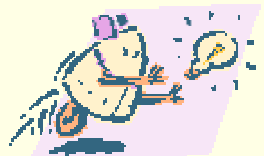
## SOMMAIRE

### 4. Mécanique « >> »

- ▣ Loi de comportement
- ▣ Mécanique de la rupture
- ▣ Règle R6 - Méthode JS
- ▣ Couplage mécano-fiabiliste
- ▣ Étapes d'une démarche probabiliste

### 5. Exemples « >> »

- ▣ Réservoir sous pression (CEA/DAM)
  - Lien entre une démarche déterministe et une démarche probabiliste
- ▣ Tuyauterie ferritique fissurée (EDF)



# 1. PROBABILITES



## Variables aléatoires réelles

### → Expérience aléatoire $\Omega$ :

- résultat imprévisible par avance
- peut donner lieu à des résultats différents si répétée dans des conditions identiques

### → Variables aléatoire $X$ :

- notion de grandeur variant selon le résultat d'une expérience aléatoire :

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega, \varphi, P$ ) espace de probabilité



## Exemple

→ Lancer de deux dés :

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$$

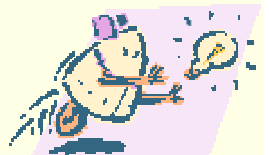
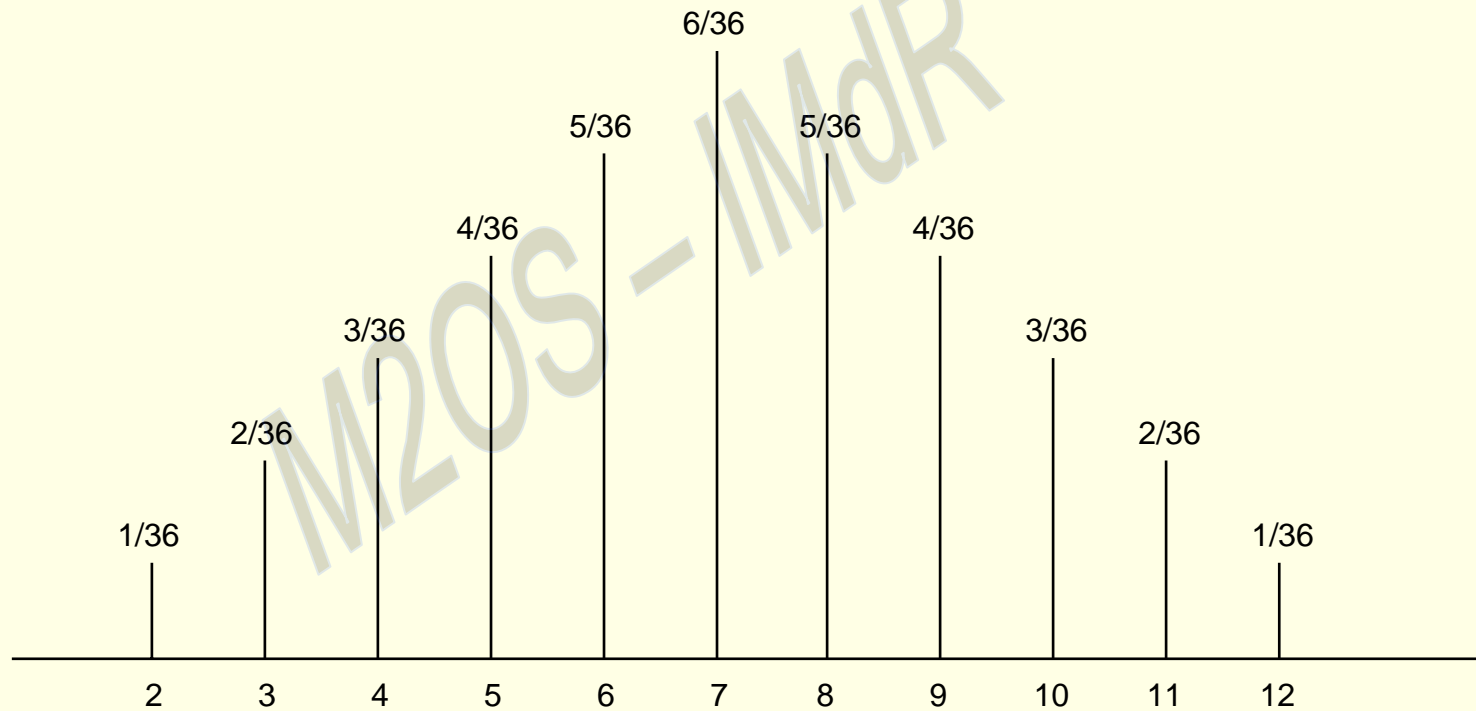
$$\forall \omega \in \Omega P(\omega) = \frac{1}{36}$$

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\omega \rightarrow \omega_1 + \omega_2$

→ Loi de probabilité de  $X$  : mesure image de  $P$  par  $X$  :  $P_X$

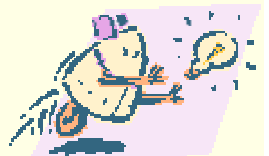
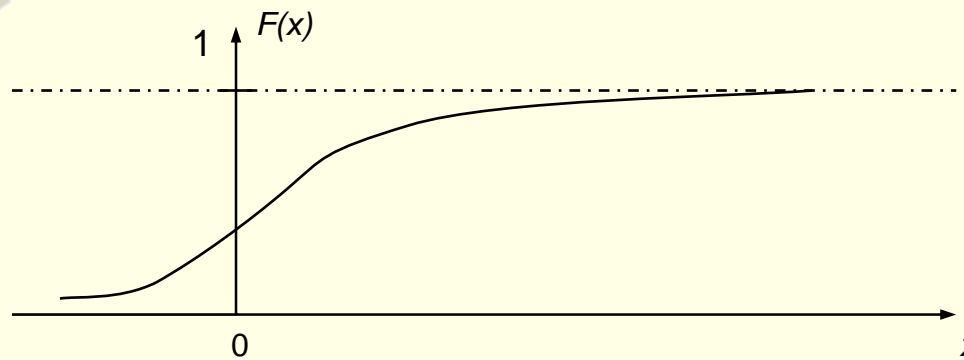
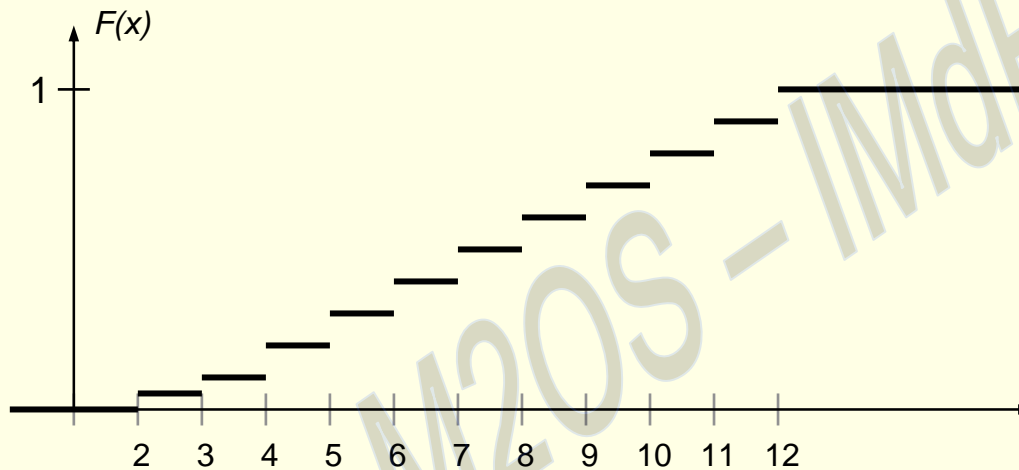


→ Lancer de deux dés :



→ Fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$  :

$$F = \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1] \\ x \longrightarrow F(x) = P(X < x) \end{array}$$





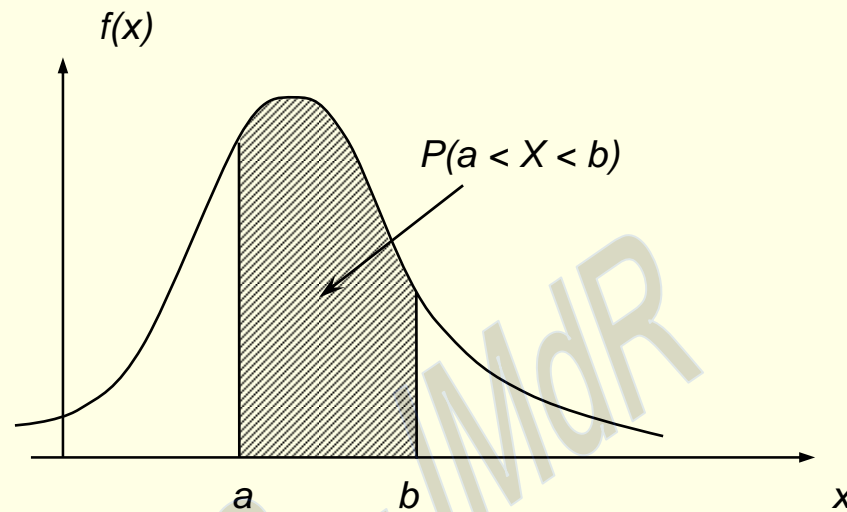
## Variables continues

- Variables admettant une densité de probabilité
- Def : une loi de probabilité  $P_X$  admet une densité  $f$  si :

$$\forall I \subset \mathbb{R} \quad P_X(I) = \int_I f(x) dx$$

$$\Rightarrow P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$





$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$$

$$P(X = x) = 0 \quad \forall x$$

$$P(x < X < x + dx) = f(x) dx$$



→ Espérance mathématique de  $X$  :

$$E(x) = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$$

!!  $E(x)$  n'existe pas toujours  $\left( f(x) = \frac{1}{\Pi(1+x^2)} \right)$

→ Propriétés

$$E(a) = a$$

$$E(ax) = a E(x)$$

$$E(X + a) = E(X) + a$$

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

$X, Y$  indépendantes  $E(XY) = E(X) E(Y)$   
**(réciproque fausse)**



→ Variance de  $X$  :

$$V(x) = \sigma^2 = E\left((X - m)^2\right) = \int_{\mathbb{R}} (x - m)^2 dP_x(x)$$

$$E(X) = m$$

$$V(x) = E(X^2) - [E(X)]^2 : \text{moment centré d'ordre 2}$$



→ Coefficient de variation :

$$\gamma(X) = \frac{\sigma(X)}{E(X)}$$

→ Covariance de X et Y :

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) E(Y) = E[(X - E(X)) (Y - E(y))]$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{cov}(X, Y)$$

$$X, Y \text{ indépendantes } V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$



→ Coefficient de corrélation :

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

→ Moments centrée d'ordre  $k$  :  $\mu_k = E[(X - m)^k]$

$$\Rightarrow \mu_1 = 0, \mu_2 = V(X)$$



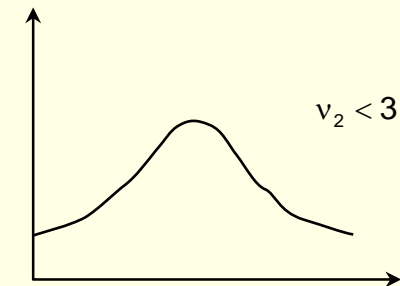
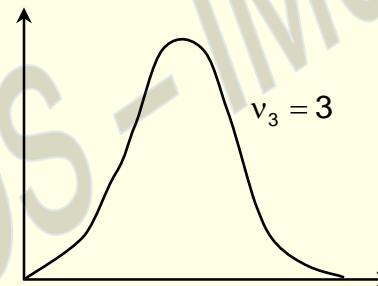
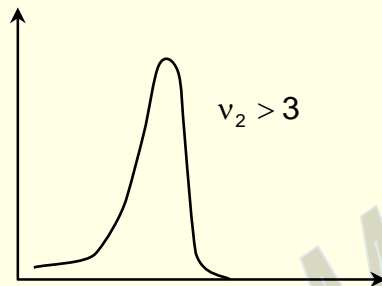
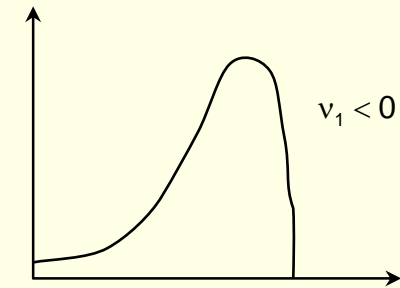
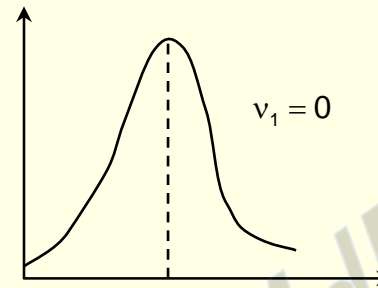
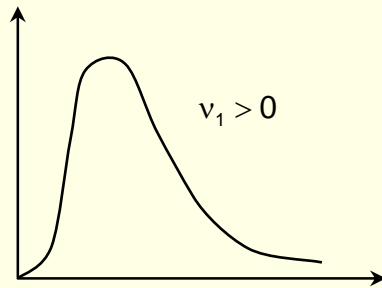
## Coefficients d'asymétrie $\gamma_1$ et aplatissement $\gamma_2$

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

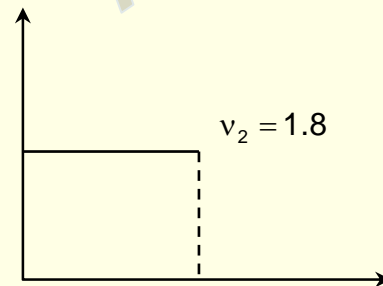
$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

→ Caractérise la forme de la distribution

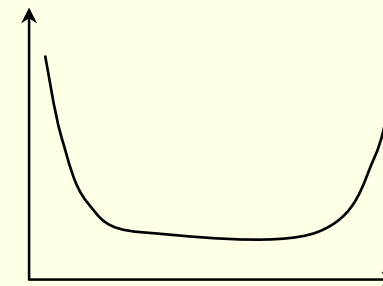




Loi de Gauss



Loi uniforme



Loi en U





## Principales lois de probabilité utilisées en mécanique

Distribution / Paramètres	Densité de probabilité	Espérance	Variance
Normale (1) $-\infty < \mu < +\infty$ $\sigma > 0$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$ $-\infty < x < +\infty$	$\mu$	$\sigma^2$
Gamma (2) $\lambda > 0$ $\beta > 0$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\lambda x} & , \text{ si } x \geq 0 \\ 0 & , \text{ ailleurs} \end{cases}$	$\frac{\beta}{\lambda}$	$\frac{\beta}{\lambda}$
Exponentielle (3) $\lambda > 0$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \text{ si } x \geq 0 \\ 0 & , \text{ ailleurs} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Rayleigh (4) $\sigma > 0$	$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & , \text{ si } x \geq 0 \\ 0 & , \text{ ailleurs} \end{cases}$	$\frac{(\sigma^2 x)^{1/2}}{\sqrt{2}}$	$0.429 \sigma^2$
Weibull (5) $\beta > 0$ $\eta > 0$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta\right] & , \text{ si } x \geq 0 \\ 0 & , \text{ ailleurs} \end{cases}$	$\eta \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$	$\eta^2 \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[ \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]^2 \right\}$
Lognormale (6) $-\infty < \mu < +\infty$ $\sigma > 0$	$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\log x - \mu)^2\right]$ $x \geq 0$	$\exp(\mu + 1/2\sigma^2)$	$\exp(2\mu + \sigma^2) * (\exp \sigma^2 - 1)$

Fonction Gamma :

$\Gamma(\beta) \cdot (\beta - 1) !$



## Convergences des suites de variables aléatoires

→  $(X_n)$  suite de variables aléatoires

⇒ Il existe plusieurs façons de définir la convergence de  $(X_n)$

↻ convergence en probabilité :

$$(X_n) \xrightarrow{p} a \quad \forall \xi, \forall \eta, \exists n_0 \text{ tel que } n > n_0 \Rightarrow (P |X_n - a| > \xi) < \eta$$

↻ convergence presque sûre ou convergence forte :

$X, Y$  sont égales presque sûrement si  $P(\{w/X(w) \neq Y(w)\}) = 0$

$$(X_n) \xrightarrow{P.S} X \quad P \left[ w / \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(w) \neq X(w) \right] = 0$$



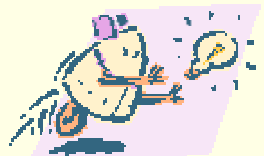
→ Convergence en moyenne :

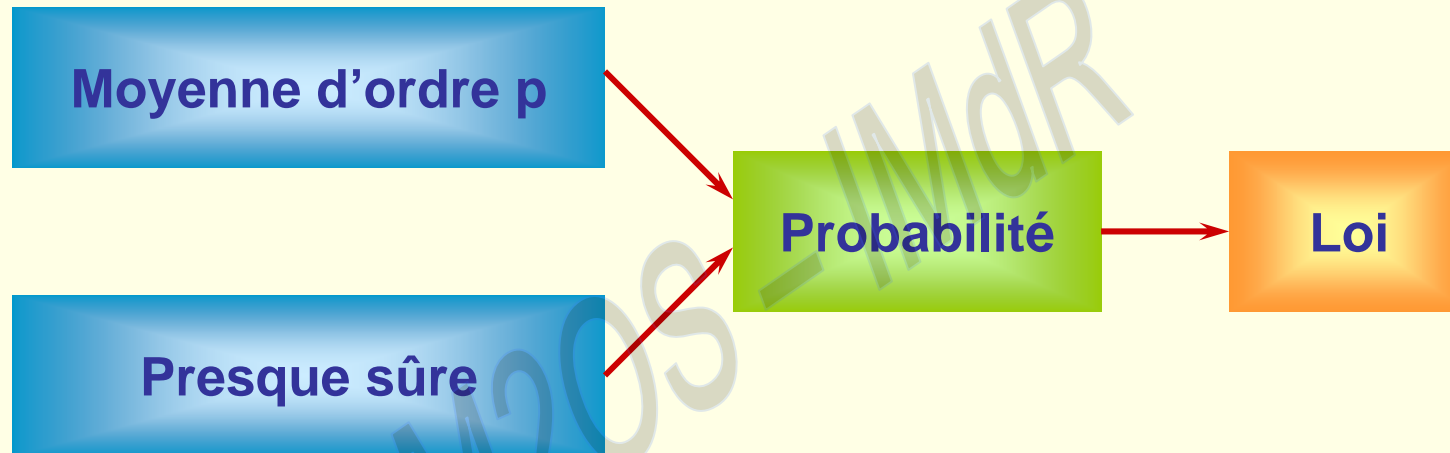
$(X_n) \rightarrow X$  en moyenne d'ordre  $p$  si :

$$E(|X_n - X|^p) \rightarrow 0$$

→ Convergence en loi :

$$(X_n) \xrightarrow{L} X \Rightarrow F_n(x) \rightarrow F(x) \quad \forall x$$





→ Théorème central limite :

$(X_n)$  suite de variables aléatoires de même loi, d'espérance  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$  alors :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{X_1 + X_2 \dots + X_n - n\mu}{\sigma} \right) \xrightarrow{L} N(0, 1)$$



→ Théorème de Lindeberg :

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes, pas nécessairement de même loi d'espérance  $\mu_i$  et de variance  $\sigma_i$ . Soit :

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \text{ et } F_i(x)$$

la fonction de répartition de  $(X_i - \mu_i)$

Si la condition suivante est réalisée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{S_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x| > \epsilon S_n} x^2 dF_i(x) \right) = 0$$



alors :

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)}{S_n} \xrightarrow{L} N(0, 1)$$

- Si une variable est la résultante d'un grand nombre de causes, petites à effet additif, cette variable suit une loi de Gauss.



## Loi normale

$$X \rightarrow N(\mu_x, \sigma_x)$$

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \text{Exp} \left( -\frac{1}{2} \left[ \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \right]^2 \right)$$

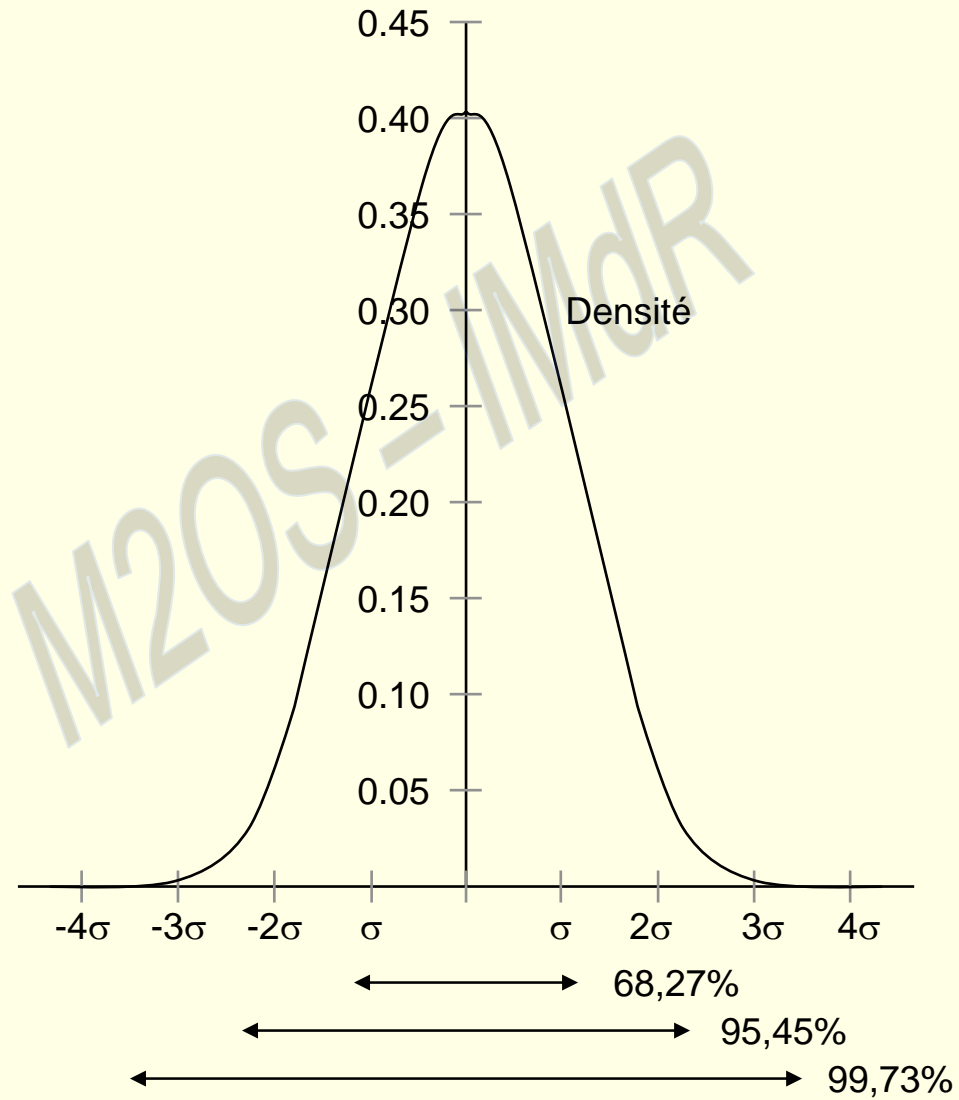
$$\begin{cases} E(X) = \mu_x \\ \sigma(X) = \sigma_x \end{cases}$$

$$Y = \left( \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \right) \rightarrow N(0, 1)$$





## Loi normale



→ X un n\_uple de variables aléatoires :

$$X = (X_1 \dots X_n)$$

$$E(X) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}$$

$$\text{Cov}(X, X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$C_X = \begin{pmatrix} \sigma^2(X_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \text{cov}(X_i, X_j) & \\ & & & \sigma^2(X_n) \end{pmatrix}$$



$$\rho(X_i, X_j) = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sigma(X_i) \sigma(X_j)}$$

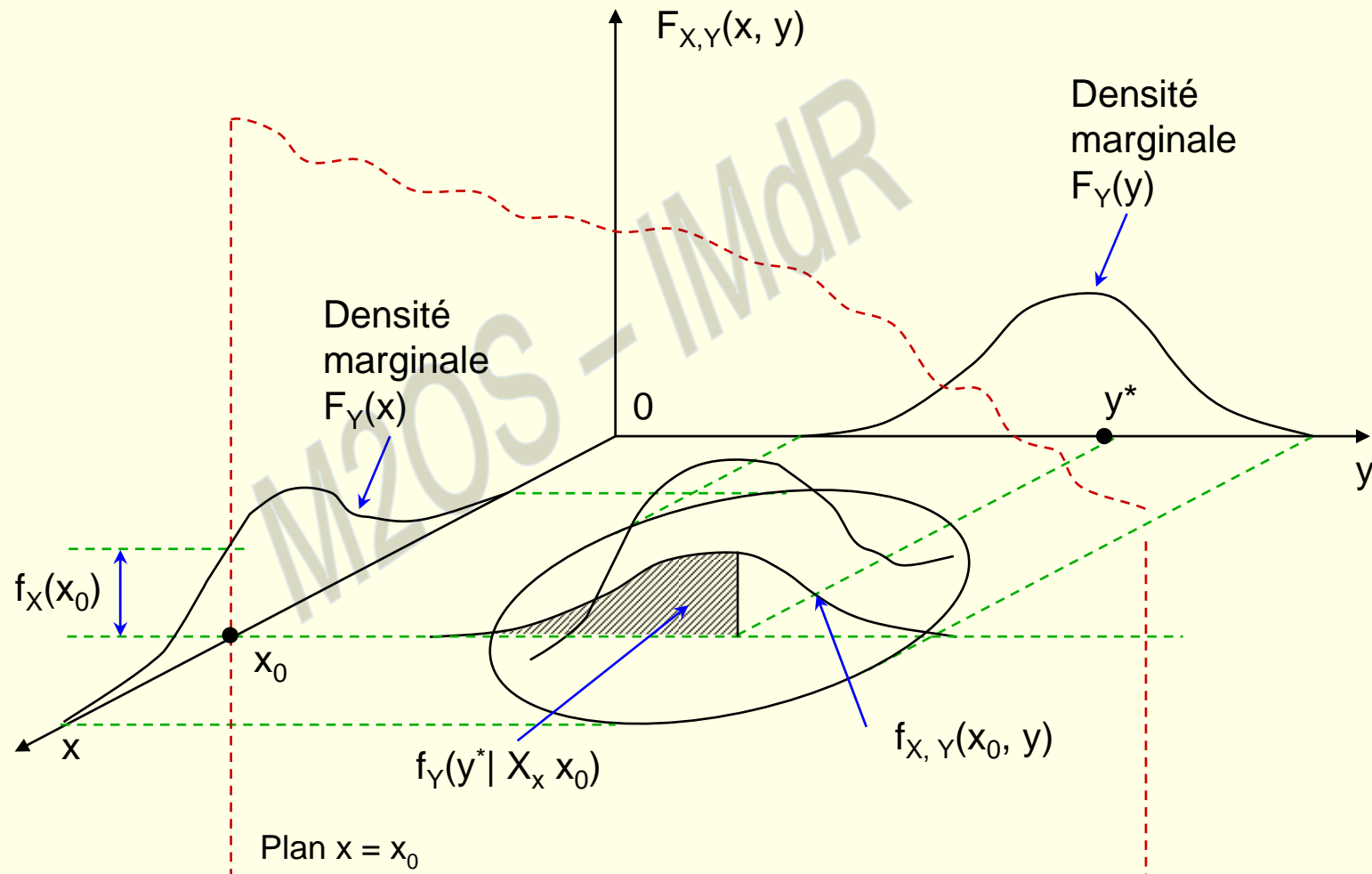
$$[\rho] = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma} \right) [C_x] \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma} \right)$$

$$[C_x] = \text{diag} (\sigma) [\rho] \text{diag} (\sigma)$$

$$[\rho] = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_n \end{pmatrix} \quad [C_x] = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_n \end{pmatrix}$$



## Loi bidimensionnelle $f_{X,Y}(x, y)$



## Valeurs extrêmes de variables aléatoires

→ Phénomène aléatoire qu'on discrétise dans le temps  
(hauteur des vagues)

↻ On s'intéresse aux valeurs extrêmes des  $X_i$  :

$$Y_n = \max_{i=1}^n X_i$$

Loi de  $Y_n$  ?

$n \rightarrow \infty$

$F_{Y_n} = F_X^n$  (fonction de  $n$  : gênant)



→ Théorie des valeurs extrêmes

**Gumbel** :  $F_{Y_n}$  tend vers une loi de Gumbel, Frechet ou Weibull

$X_i$  décroissante exponentielle alors

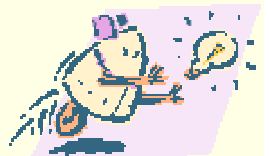
$Y_n \rightarrow$  Gumbel

$X_i$  décroissante géométrique alors

$Y_n \rightarrow$  Frechet

$X_i$  bornée supérieurement alors

$Y_n \rightarrow$  Weibull



## Tenseur des déformations

- On met en évidence une matrice 3x3 qui caractérise complètement la déformation du milieu : sa connaissance suffit à déterminer les variations de longueurs et les variations d'angles.

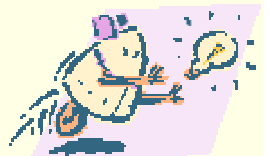
$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$



## Tenseur des contraintes

- Pour connaître l'état des contraintes en un point P, il suffit de connaître en ce point une matrice 3x3, représentation dans les axes Oxyz du tenseur des contraintes  $[\sigma]$ .

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$





## 2. STATISTIQUE



## Traitement statistique des données de fiabilité

«Le problème de l'estimation»

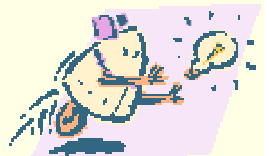
### → But :

Estimer par des essais les paramètres  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$   
d'une loi de probabilité par un estimateur  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n)$

On utilise en général des données expérimentales

⇒  $\hat{\theta}$  variable aléatoire (fonction des valeurs  
observées lors de l'essai)

**Trouver le meilleur estimateur**



→ Convergence d'un estimateur

1ère qualité : être convergent : si  $n \rightarrow \infty$ ,  $\hat{\theta} \rightarrow \theta$

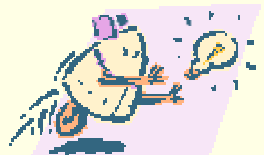
→ Un estimateur est dit sans biais si  $E(\hat{\theta}) = \theta$

⇒  $\hat{\theta} - E(\hat{\theta})$  représente les fluctuations aléatoires de  $\hat{\theta}$  autour de sa valeur moyenne

⇒  $E(\hat{\theta}) - \theta$  est assimilable à une erreur systématique due au fait que  $\hat{\theta}$  varie autour de sa valeur centrale  $E(\hat{\theta})$  et non autour de  $\theta$

Précision d'un estimateur  $\hat{\theta}$  : erreur quadratique moyenne  $E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$

⇒ De deux estimateurs sans biais, le plus précis est celui de variance minimale



- Un estimateur est efficace s'il est convergent, sans biais et de variance minimale
- Méthodes permettant d'obtenir de bons estimateurs :
  - la méthode du maximum de vraisemblance (i),
  - la méthode des moments (si calcul de (i) trop compliqué)



## Estimation par intervalles

- Plus réaliste de fournir un renseignement de type  $a < \theta < b$  que d'écrire  $\hat{\theta} = c$   
 $[a, b]$  : estimation par intervalle de  $\theta$
- Soit  $\theta_0$  une valeur de  $\theta$
- On détermine un intervalle de probabilité de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\theta$ , c'est à dire deux bornes  $t_1$  et  $t_2$  telles que :

$$P(t_1 < \theta < t_2) / (\theta = \theta_0) = 1 - \alpha$$

Si  $t \in [t_1, t_2]$ , on conserve  $\theta_0$  comme valeur possible de  $\theta$

Si  $t \notin [t_1, t_2]$ , on élimine  $\theta_0$

- $[t_1, t_2]$  : intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  (coefficient de confiance)

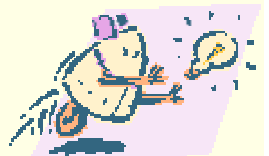


## Les tests d'ajustement

→ **But** : Vérifier qu'un échantillon provient ou non d'une variable aléatoire de distribution  $F_0(x)$

### Les méthodes empiriques :

- ⇒ la forme de l'histogramme
- ⇒ vérification de certaines propriétés mathématiques
- ⇒ ajustements graphiques :  
exemple : droite de Henry pour une loi de Gauss



## Les tests statistiques

- Un test est un mécanisme qui permet de trancher entre deux hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  au vu des résultats d'un échantillon. Il s'agit de vérifier si une hypothèse  $H_0$  peut être acceptée avec un risque maximum fixé. Dans le cas contraire, on adopte l'hypothèse  $H_1$ .

décision \ vérité	$H_0$	$H_1$
$H_0$	$1 - \alpha$	$\beta$
$H_1$	$\alpha$	$1 - \beta$

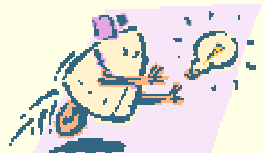
$\alpha, \beta$  : probabilité d'erreur de première et deuxième espèce

$\alpha$  : probabilité de choisir  $H_1$  alors que  $H_0$  est vraie

$\beta$  : probabilité de conserver  $H_0$  alors que  $H_1$  est vraie

$1 - \beta$  : probabilité d'accepter  $H_1$  en ayant raison

$1 - \alpha$  : puissance du test



→ **Test du khi-deux :**

- Méthode des moindres carrés pondérés pour ajuster une distribution d'un type connu sur un histogramme expérimental

→ **Test de Kolmogorov-Smirnov :**

- Comparaison de la distribution simulée avec une distribution théorique
- Utilisable pour ajuster toute loi continue

→ **Méthode des moindres carrés :**

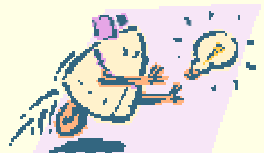
- On minimise un écart-type moyen entre la prévision d'un modèle théorique et le résultat issu des données

→ **Méthode des moments :**

- Elle consiste à évaluer des moments théoriques de distribution à leurs moments expérimentaux

→ **Maximum de vraisemblance :**

- Elle permet de choisir une distribution ou ses paramètres qui rendent maximum la probabilité d'apparition de l'échantillon réellement observé





## Estimation statistique d'une loi de probabilité d'une population

1. Recueillir un échantillon de la population
2. Sélectionner une loi de probabilité théorique supposée représenter le comportement de ladite population mais dont les paramètres sont à estimer
3. Mettre en œuvre un calcul approché de la loi à l'aide de l'échantillon de la population
4. Sélectionner des méthodes de test de des intervalles de confiance pour accepter ou non l'hypothèse émise en 2
5. Calculer les paramètres de la loi de probabilité et ses incertitudes pour utilisation ultérieure



## Méthodes bayésiennes d'estimation

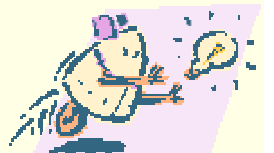
- Les données de fiabilité n'existent pas forcément sur les matériels de conception nouvelle.



On se fie aux jugements individuels ou collectifs d'experts.

Après la mise en place d'un système de retour d'expériences, les données réelles peuvent être exploitées pour corriger éventuellement le jugement d'expert grâce au théorème de Bayes.


Sur des cas pratiques, on n'apporte pas de changements fondamentaux sur les valeurs moyennes et sur l'allure générale des courbes de fiabilité.



## 3. FIABILITE MECANIQUE



## Introduction

- Pendant des siècles la conclusion d'ouvrage s'est appuyée sur l'expérience et la transmission du savoir de spécialistes, ingénieurs ou architectes
  - On construisait pour l'éternité
  - Milieu du 19<sup>ème</sup> siècle :
    - ➔ introduction de la notion de marge de sécurité
    - ➔ bases de calcul des structures :
      - 1819 - Navier
      - 1864 - Maxwell
      - 1878 - Castigliano
- 
- ➔ naissance de la démarche déterministe et utilisation des facteurs de sécurité



→ Il s'agit de se protéger :

- ➔ contre la méconnaissance des propriétés réelles des matériaux ;
- ➔ des simplifications adoptées dans les modèles de dégradation mécanique ;
- ➔ des limitations des méthodes de calcul numériques

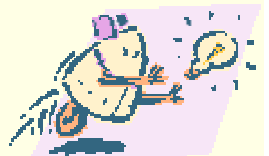


→ Dimensionnement des structures industrielles fondé sur une démarche réglementaire et codifiée



Démarche couronnée de succès ?

Comment se placer à l'optimum de sûreté et d'économie ?

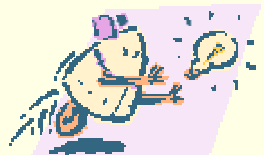


## Limites d'une démarche déterministe

- Ne plus considérer les paramètres comme des valeurs fixes mais comme des variables aléatoires caractérisées par leur densité de probabilité

**La sécurité des constructions est un problème de probabilité**

- Pas de prise en compte du caractère aléatoire des actions et des résistances
- Coefficient de sécurité basé sur l'expérience et l'intuition : décision arbitraire et forfaitaire



→ Comment concevoir des structures incluant la notion de risque calculé ?



→ Risque évalué sous la forme d'une probabilité et non plus sous la forme d'un jugement de type binaire, le dimensionnement est acceptable ou pas





## Démarche probabiliste

### → But :

- ➡ Maîtriser les incertitudes et quantifier leur influence sur la probabilité de défaillance  $P_f$
  - ➡ Calculer les coefficients partiels de sécurité
- Sécurité probabiliste des structures : 3<sup>ème</sup> congrès de l'AJPC, Liège, 1948  
Marcel PROT, Robert LEVI, Jean DULHEL



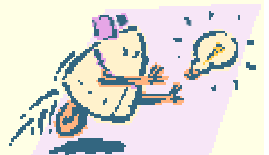
## Intérêt de la démarche probabiliste

- Traitement clair des incertitudes
- Évaluer une probabilité quantifiée de la défaillance de la structure
- Liaison implicite entre le coefficient de sécurité et le niveau de fiabilité
- Étude de sensibilité : coefficients partiels de sécurité
  - ↓
  - Recherche du meilleur compromis coût-calcul
- Outil de comparaison
  - ↓
  - Prolongement rationnel de l'approche déterministe



## Intérêts de la démarche probabiliste

- **Aide au diagnostic** : évaluation de la durée de vie résiduelle des matériels
  - On compare une probabilité de défaillance calculée à une valeur limite qui traduit le niveau de dégradation acceptable
- **Étude de sensibilité et aide à la décision** : optimisation du matériel et des scénarios de maintenance
- **Amélioration des outils déterministes de conception** : dossiers de conception plus réalistes
  - Comparaison des codes déterministes de conception et des calculs réglementaires



## Méthodes de fiabilité

### → Rappels historiques :

- ➔ **1926** : Mayer propose de considérer chaque paramètre incertain entrant dans le calcul des structures comme une variable aléatoire caractérisée par ses 2 premiers moments, la valeur moyenne et la variance de sa distribution
- ➔ **1939** : Weibull développe une théorie statistique sur la résistance mécanique des structures mécaniques

### → Évolution après la seconde guerre mondiale :

- ➔ **1969** : Cornell définit un indice de fiabilité  $\beta_C$ , fonction des 2 premiers moments des variables aléatoires concernées.  $\beta_C$  dépend du choix de la fonction de défaillance
- ➔ **1972** : Rosenblueth et Esteva : indice de fiabilité de type logarithmique plus représentatif de la réalité
- ➔ **1974** : Hasofer et Lind : généralisation de l'approche



→ Introduction de l'incertitude dans :

- ➔ les inspections,
- ➔ la maintenance,
- ➔ les réparations,
- ➔ les remplacements.

M2OS - IMdR



## Évaluation de fiabilité des structures

### → Les études de niveau 0 :

- ⇒ Valeur des paramètres fixes : démarche déterministe

### → Les études de niveau 1 :

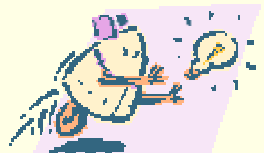
- ⇒ Variabilité des paramètres caractérisée par les 2 premiers moments (lois normales)

### → Les études de niveau 2 :

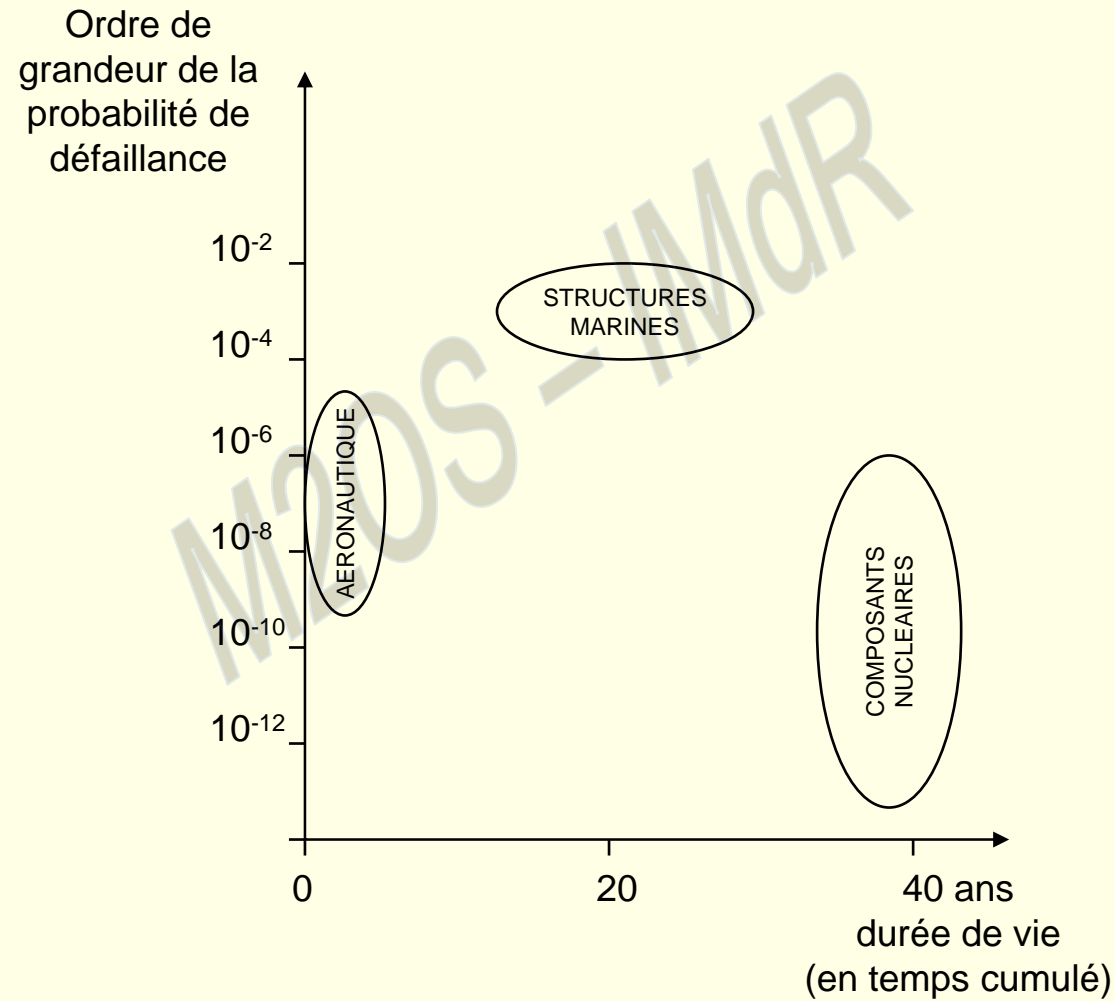
- ⇒ Variabilité des paramètres quelconques : calcul d'un indice de fiabilité (méthodes FORM/SORM)

### → Les études de niveau 3 :

- ⇒ Optimisation du dimensionnement, de l'inspection, de la maintenance et le déclassement des structures en fonction de critères économiques ou subjectifs



## Niveau de défaillance



## Fiabilité mécanique

- $Z_1, \dots, Z_n$  :  $n$  variables aléatoires de base caractérisant un élément de structure
- Pour chaque réalisation : élément défaillant ou pas



La région de sécurité, notée  $D_s$   
La région de ruine, notée  $D_f$





→  $G(Z) = G(Z_1, \dots, Z_n)$  : fonction de défaillance ou fonction d'état limite

$$G(Z) > 0 \quad \text{pour } Z \in D_s$$

$$G(Z) < 0 \quad \text{pour } Z \in D_f$$

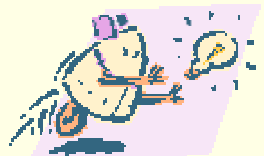
$$G(Z) = 0 \quad \text{pour } Z \in L_Z$$



$$P_f = \text{Prob} (G(Z) < 0)$$

$$P_f = \int_{D_f} f_{z_1, \dots, z_n} (z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n$$

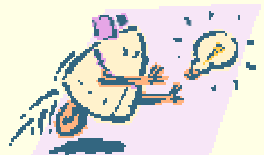
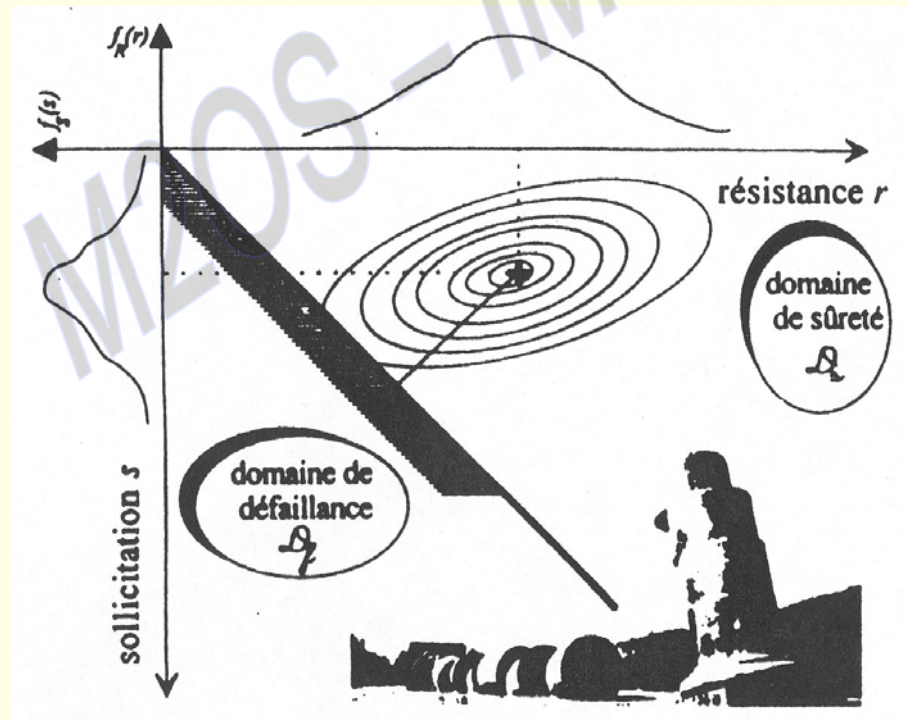
- On calcule la probabilité pour qu'une réalisation de l'ensemble  $Z_1, \dots, Z_n$  des variables de base «tombe» à l'intérieur de la région de ruine  $D_f$

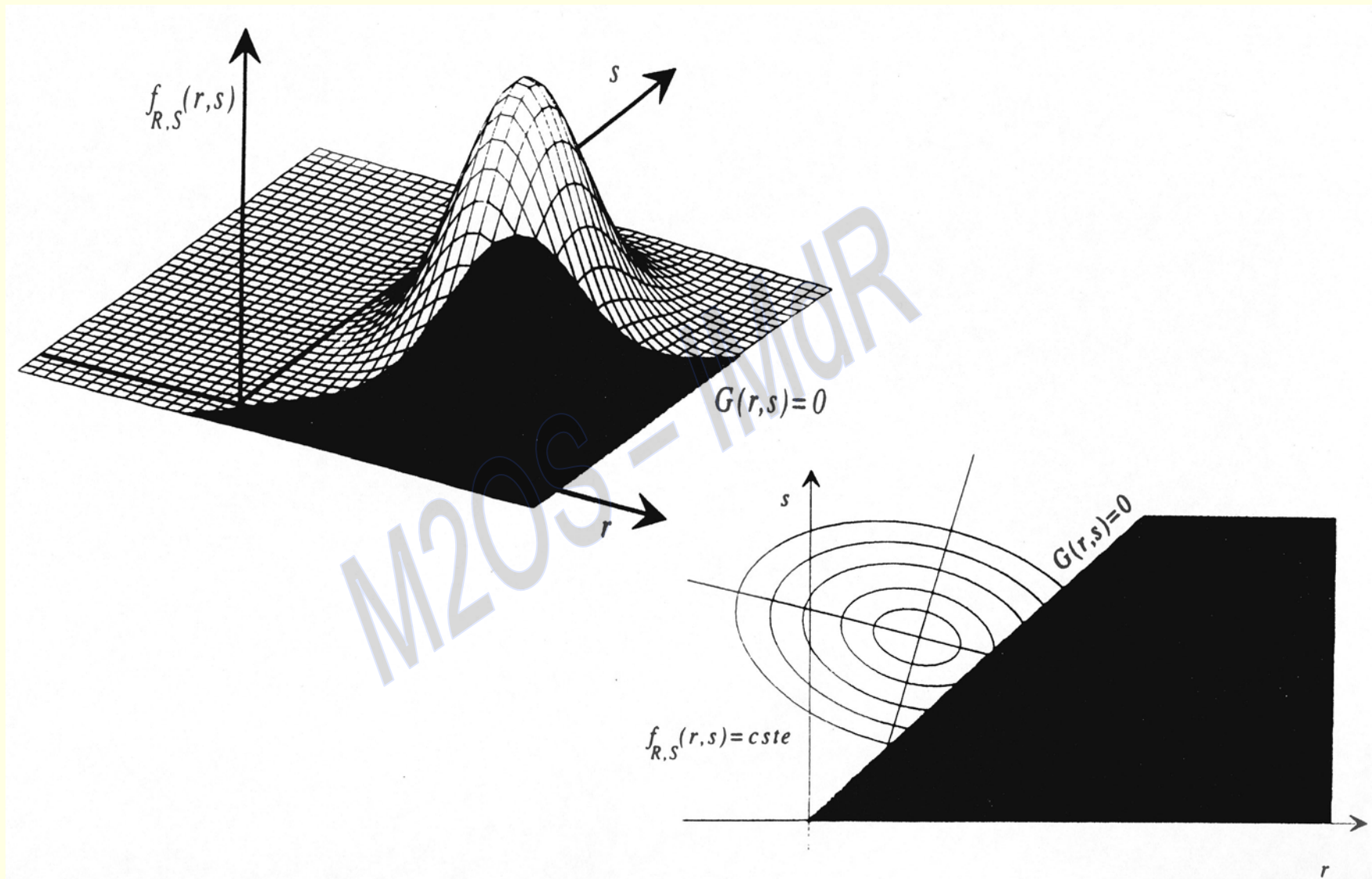


→ Objectif :


Évaluation de la probabilité d'atteindre ou de dépasser un état limite donné

$$\text{PROB}(G(Z) < 0) = ?$$





## Deux démarches successives

- 1) Analyse de type mécanique   $G(Z)$
- 2) Description probabiliste des variables de base :  
 $Z_1, \dots, Z_n$ 
  - ⇒ Une étude de sensibilité sur  $P_f$  peut conduire à considérer des variables certaines et non pas aléatoires



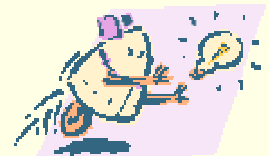
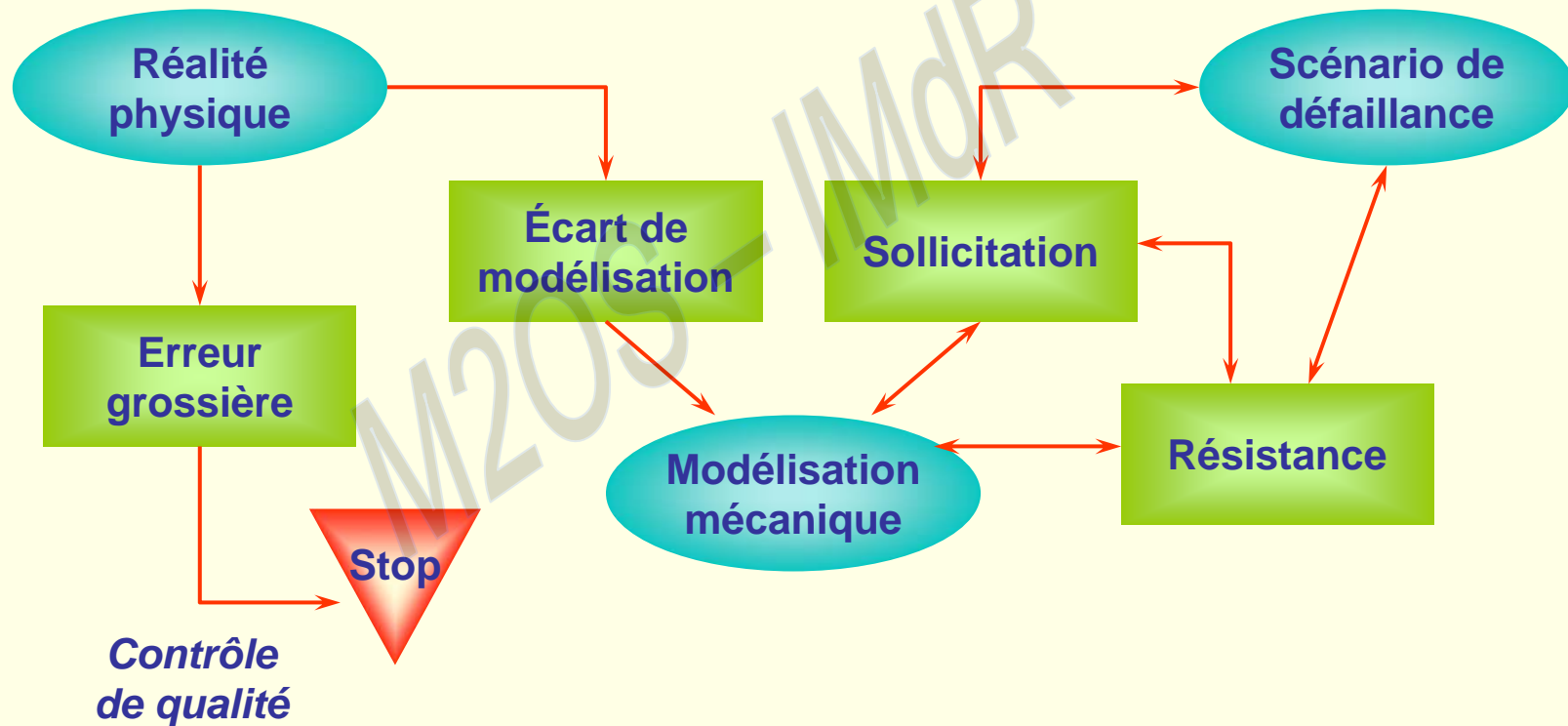
## Calcul de $P_f$

$$P_f = \int_{D_f} f_z(z) dz$$

- **Calcul de manière exacte** : manque d'informations
- **Techniques d'intégration numérique** : idem
- **Techniques de simulation** : Monte-Carlo (coûteux)  
(sert à l'obtention de cas de référence)
- **Méthodes d'approximation** : FORM/SORM

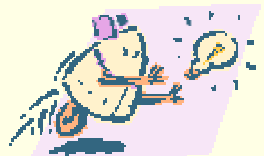


## Modélisation mécanique et approche fiabiliste



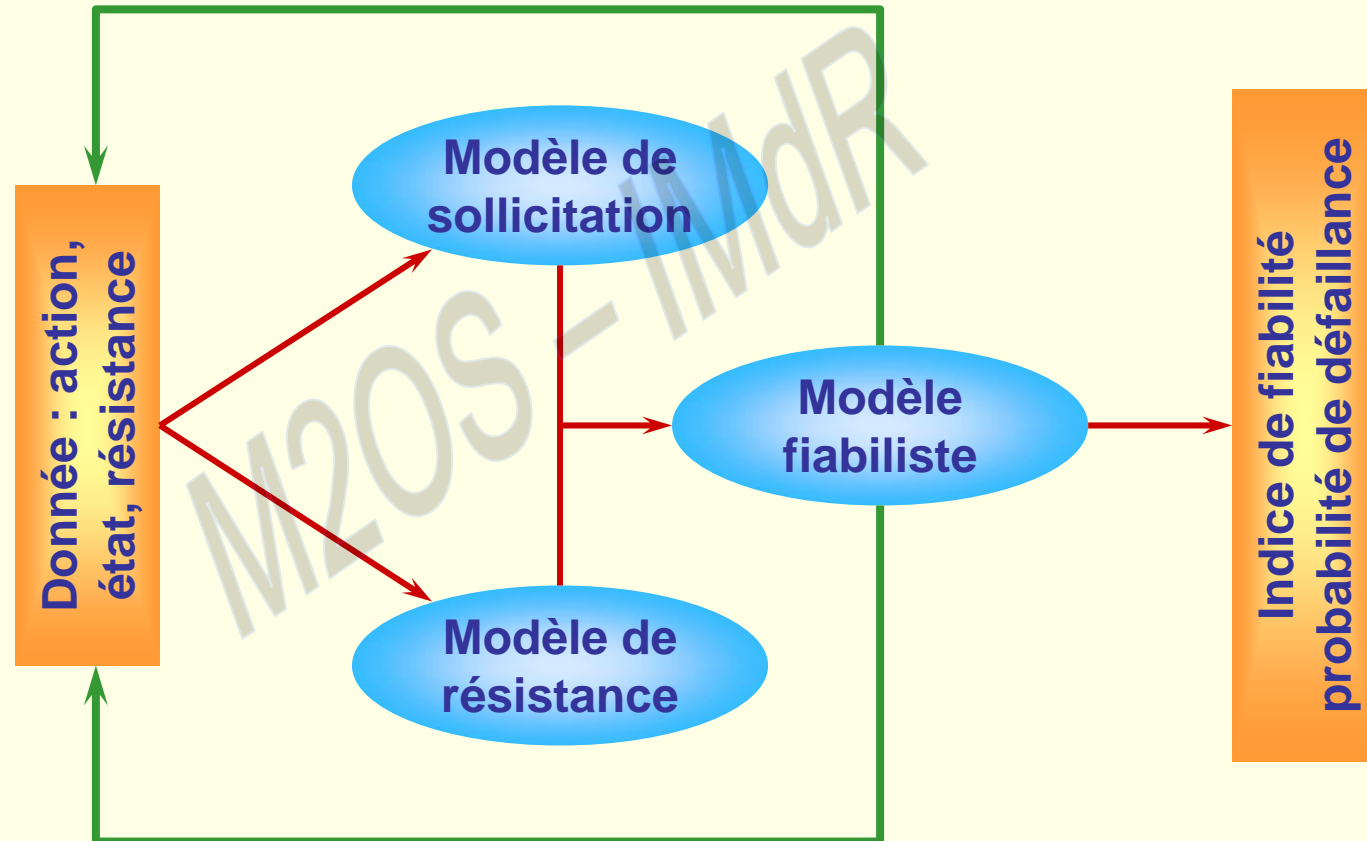
## Modélisation mécanique et approche fiabiliste

- Il existera toujours une différence entre un modèle de comportement d'une structure et la réalité physique
- L'analyse de fiabilité théorique s'appuie sur un scénario de défaillance combinant l'évaluation des sollicitations et des résistances





## Analyse de fiabilité



## Le cas fondamental

- R, S deux variables aléatoires indépendantes de densité  $f_{R,S}(r, s)$
- R : variable de résistance
- S : variable de sollicitation
- $G(S) = R - S$  avec  $Z = \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}$

Hypothèses :  $R \rightarrow N(\mu_R, \sigma_R)$   
 $S \rightarrow N(\mu_S, \sigma_S)$

$$P_f = \text{Prob}(G(Z) < 0) = \text{Prob}(R < S)$$



$$P_f = \text{Prob}(R - S < 0)$$

$$\text{Posons } M = R - S \Rightarrow M \rightarrow N(\mu_M, \sigma_M)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \mu_M = \mu_R - \mu_S \\ \sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \end{cases}$$

$$\text{Soit } T = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M} \Rightarrow T \rightarrow N(0, 1)$$

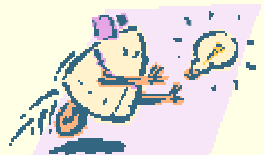
$$P_f = \text{Prob}(M < 0) = \text{Prob}(M - \mu_M < -\mu_M) = \text{Prob}\left(\frac{M - \mu_M}{\sigma_M} < -\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right)$$

$$P_f = \text{Prob}(T < -\beta)$$

$$P_f = \Phi(-\beta)$$

$\beta$  : indice de fiabilité

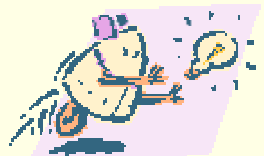
$$\text{et } \boxed{\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M}}$$



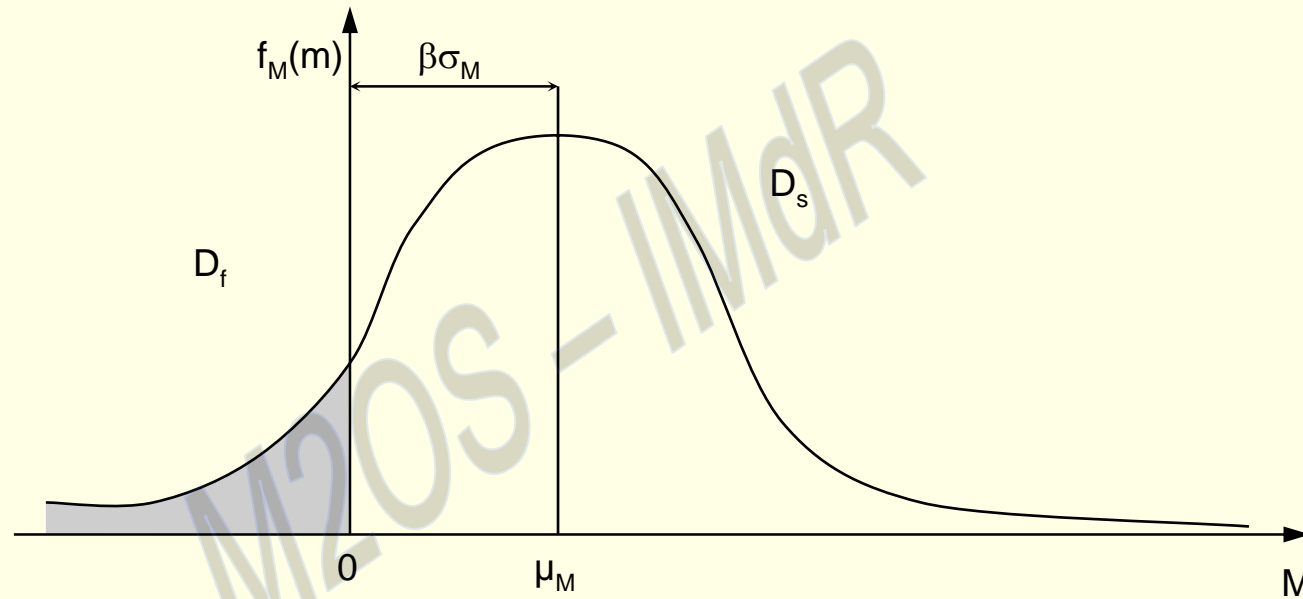
## Relation entre $\beta$ et $P_f$

$\beta = 0.0$	$P_f = 0.50000$
0.5	0.30854
1.0	0.15866
1.5	0.06681
2.0	0.02275

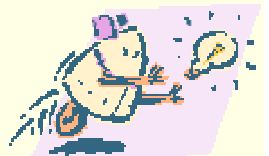
$\beta = 2.5$	$P_f = 0.00621$
3.0	0.00135
3.5	0.00023
4.0	0.00003
4.5	$3.4 \times 10^{-6}$



## Interprétation graphique



$\beta$  : nombre d'écart types qui sépare la moyenne  $\mu_M$  de la valeur  $0$ , qui sépare la région de sécurité  $D_s$  de la région de ruine  $D_f$

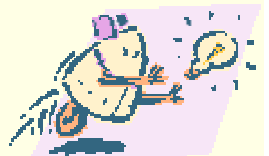


→ Changement de variables

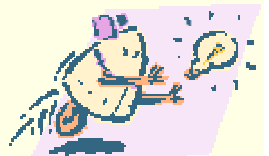
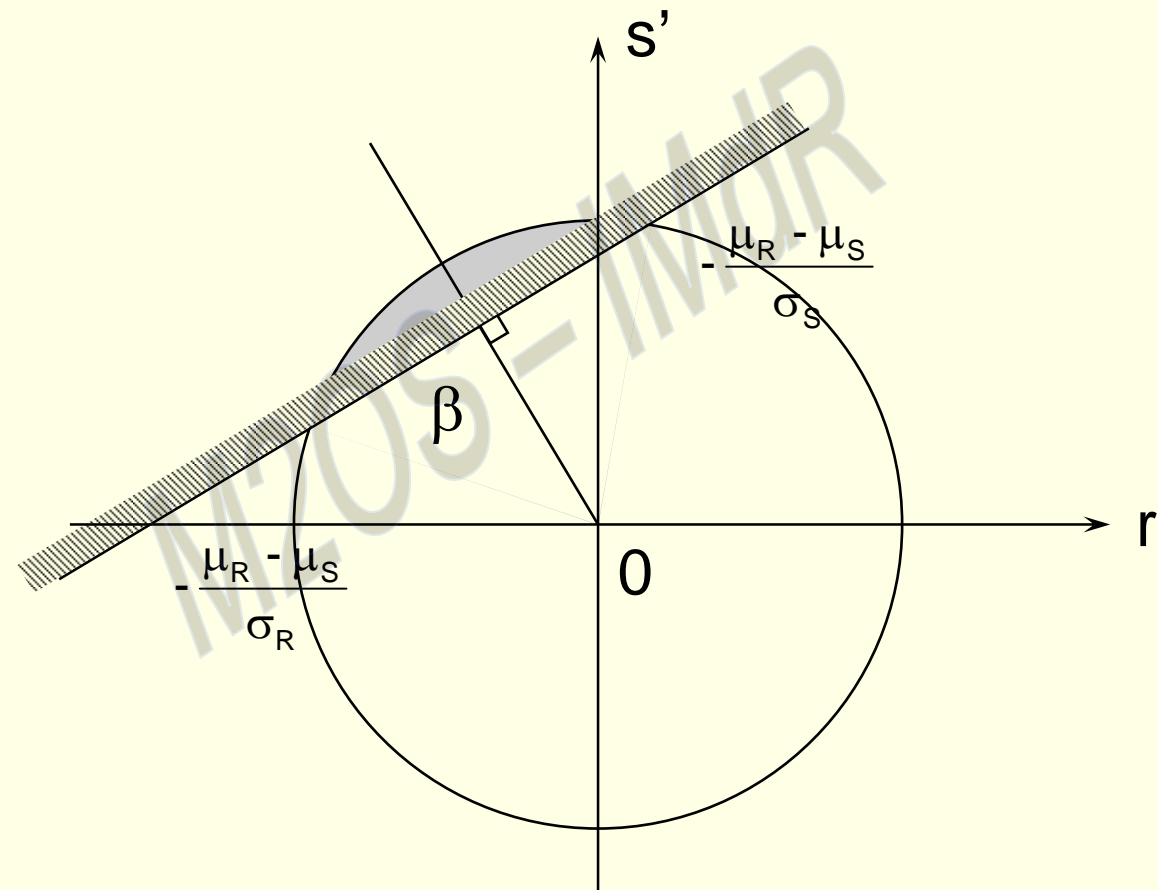
$$\left| \begin{array}{l} R' = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \rightarrow N(0, 1) \\ S' = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \rightarrow N(0, 1) \end{array} \right.$$

$$G(R, S) = R - S \Leftrightarrow H(R', S') = \sigma_R R' - \sigma_S S' + \mu_R - \mu_S$$

$$H(R', S') = \frac{\sigma_R R'}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} - \frac{\sigma_S S'}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} + \beta$$



→  $\beta$  : distance euclidienne de l'origine à la surface de ruine dans l'espace réduit



## Calcul de $P_f$ possible

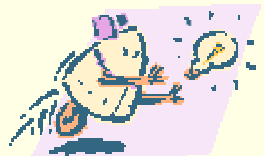


Interprétation graphique  $\beta$  :

Distance euclidienne de l'origine à la surface de défaillance dans l'espace réduit

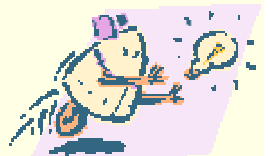
→ Hypothèse : Variables aléatoires :

- normales
- centrées
- réduites
- indépendantes

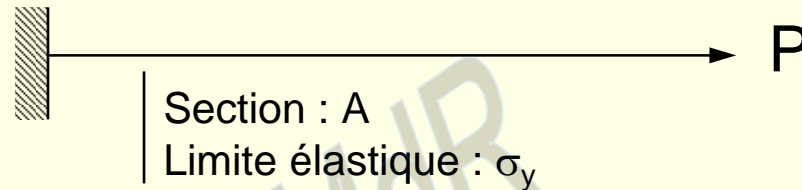




- Méthodes de fiabilité plus ou moins compliquées selon :
- ➔  $G(Z)$  linéaire ou non,
  - ➔ variables normales ou non,
  - ➔ variables indépendantes ou pas.



## Tige en traction



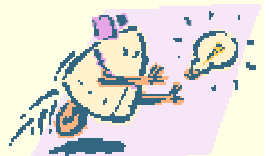
→ Étudier la fiabilité du dimensionnement d'une tige soumise à un effort normal par application d'une action de traction ou compression P

Données d'action : charge P

Données d'état : section A

Sollicitation :  $\sigma = P/A$

Résistance :  $\sigma_y$



Règle de dimensionnement :  $\frac{P}{A} < \sigma_y$

Vecteur aléatoire  $Z = \begin{pmatrix} P \\ A \\ \sigma_y \end{pmatrix}$

$G(Z) = \sigma_y A - P$  On note :  $R = \sigma_y A$  ,  $S = P$

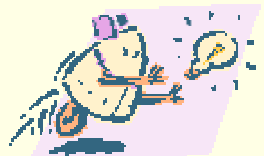
$G(Z) < 0 \Rightarrow$  défaillance  $\left( \sigma_y < \frac{P}{A} \right)$



Hypothèses :  $P$ ,  $\sigma_y$  aléatoires

$$\left| \begin{array}{l} \mu_P = 70 \text{ MN} \\ \sigma_P = 15 \text{ MN} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \mu_{\sigma_y} = 272,72 \text{ MPa} \\ \sigma_{\sigma_y} = 16,36 \text{ MPa} \end{array} \right|$$

$P$ ,  $\sigma_y$  : normales non corrélées

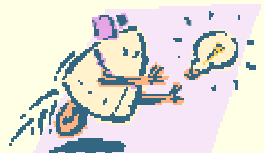


$$P_f = \int_{\sigma_y A - P < 0} f_{\sigma_y, A, P}(\sigma_y, A, P) A d\sigma_y dP$$

$$\text{avec } f_{\sigma_y, A, P}(\sigma_y, A, P) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\sigma_y} A\sigma_P} \text{Exp} \left( -\frac{1}{2} \left[ \frac{(\sigma_y A - \mu_{\sigma_y} A)^2}{(\sigma_{\sigma_y} A)^2} + \frac{(P - \mu_P)^2}{\sigma_P^2} \right] \right)$$

$$P_f = 0,00347$$

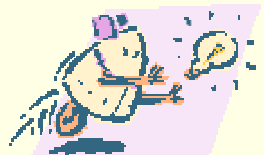
**Remarque** : les iso-densités de probabilité sont des ellipses dont les axes principaux sont parallèles aux axes de coordonnées ; ils ne sont plus parallèles lorsque les variables sont corrélées.



## Simulation

nb. simul	30	100	1000	10000	100000	500000	1000000
* $\tilde{P}_f$ (estimée)	0	0	0,00400	0,00380	0,00333	0,00338	0,00337
confiance à 5%	$\infty$	$\infty$	99,8%	32,38%	10,94%	4,86%	3,44%
$(\tilde{P}_f - P_f)/P_f$			15%	10%	-4%	-2,6%	-2,9%

→ Probabilité de 95% que la valeur exacte de  $P_f$  appartienne à  $\tilde{P}_f(1 \pm^*)$  (Shooman)



## Calcul de l'indice

$$R = A\sigma_y, S = P$$

Posons  $R' = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R}$ ,  $S' = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S}$

$$G(R, S) = A\sigma_y - P = 0$$

Soit :  $H'(R', S') = \sigma_R R' - \sigma_S S' + \mu_R - \mu_S = 0$

$\Rightarrow 6,87 R' - 15 S' + 44,54 = 0$

$$\beta_C = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} + 2,7$$

$$\Phi(-\beta_C) = 0,00347$$



## Corrélation entre les variables

R, S corrélées

$$\rho = \rho(R, S) = \frac{\text{cov}(R, S)}{\sigma_R \sigma_S} = \frac{\mu_{RS} - \mu_R - \mu_S}{\sigma_R \sigma_S}$$

$$\Rightarrow P_f = \text{Prob}(R, S) = \Phi(-\beta)$$

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho \sigma_R \sigma_S}}$$





## Interprétation graphique

$$G(R, S) = R - S$$

$$H'(R', S') = \sigma_R R' - \sigma_S S' + \mu_R - \mu_S$$

$$H'(R', S') = \frac{\sigma_R R'}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} - \frac{\sigma_S S'}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} + \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}$$

Pas d'interprétation graphique dans l'espace réduit



Décorrélacion des variables



## Idée :

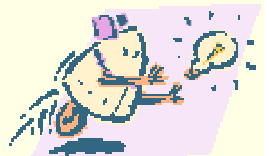
→ R, S indépendantes, alors  $\begin{pmatrix} R' \\ S' \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} R - \mu_R \\ S - \mu_S \end{pmatrix}$

$$\text{avec } A = \begin{bmatrix} 1/\sigma_R & 0 \\ 0 & 1/\sigma_S \end{bmatrix}$$

→ R, S non indépendantes, alors  $Z' = A(Z - \mu_Z)$

→ Trouver A telle que :  $Z' = A(Z - \mu_Z)$  et  $C_{Z'} \equiv I$  ( $E(Z) = 0$ )

$$\begin{cases} C_{Z'} = AC_Z, A^t = I \\ A^t A = C_Z^{-1} \end{cases}$$



## Deux techniques pour trouver A :

- Diagonalisation de la matrice de corrélation
- Factorisation de Cholesky de la matrice de variance-covariance



$$Z' = \begin{pmatrix} R' \\ S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} / \sigma_R & 0 \\ -\rho / \sigma_R & 1 / \sigma_S \end{bmatrix} \begin{pmatrix} R - \mu_R \\ S - \mu_S \end{pmatrix}$$

$$G(R, S) = R - S$$

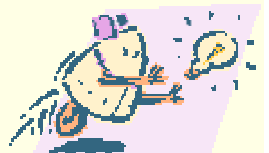
alors :

$$H'(R', S') = (\sigma_R - \rho\sigma_S)R' - \sigma_S \sqrt{1-\rho^2} S' + \mu_R - \mu_S$$

$$H'(R', S') = \frac{\sigma_R - \rho\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_R}} - \frac{\sigma_S \sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_R}} + \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_R}}$$

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_R}}$$

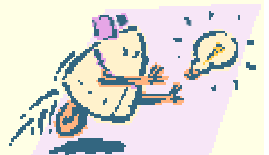
$\beta$  : distance euclidienne de l'origine à la surface de ruine dans l'espace  $Z'$  des variables réduites



## Exemple

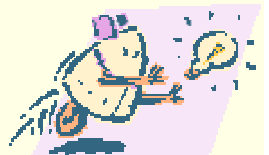
$\rho = -1$	$\beta = 1.34615$	$P_f = 8.913 \times 10^{-2}$
$\rho = 0$	$\beta = 1.6762$	$P_f = 4.685 \times 10^{-2}$
$\rho = 0.2$	$\beta = 1.77686$	$P_f = 3.780 \times 10^{-2}$
$\rho = 0.4$	$\beta = 1.89814$	$P_f = 2.884 \times 10^{-2}$
$\rho = 0.6$	$\beta = 2.04822$	$P_f = 2.027 \times 10^{-2}$
$\rho = 0.8$	$\beta = 2.24065$	$P_f = 1.252 \times 10^{-2}$
$\rho = 1.0$	$\beta = 2.50000$	$P_f = 0.621 \times 10^{-2}$

Le passage de l'hypothèse  $\beta = 0$  à  $\beta = 1$  divise la probabilité par 7,5



## Généralisation au cas de n variables

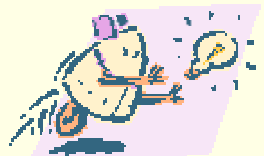
- Soit  $Z_1, \dots, Z_n$  : n variables aléatoires de base
- $Z_i \rightarrow N(\mu_i, \sigma_i)$
- Matrice de covariance  $C_Z$
- Surface de ruine linéaire :  $G(Z) = a_0 + a_1 Z_1 + \dots + a_n Z_n$
- $M = a_0 + aZ$  avec  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
- $M$  : variable de sécurité
- $P_f = \text{Prob}(G(Z) < 0) = \Phi(-\beta_C)$



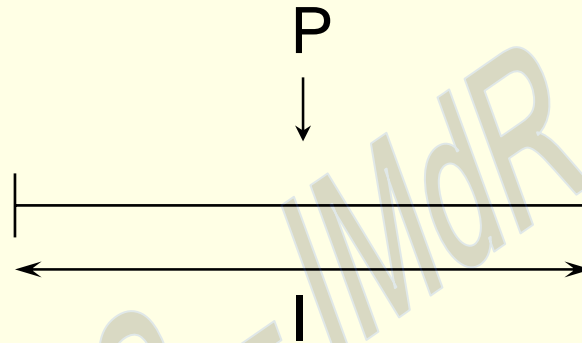
$$\beta_C = \frac{\mu_M}{\sigma_M} : \text{indice de Cornell}$$

Défini pour :

- une surface de ruine linéaire
- des variables de base normales, corrélées ou non



## Exemple : poutre



Poutre de longueur  $l$  appuyée et soumise à une charge concentrée  $P$  en milieu de travée

Résistance à la flexion :  $M = W\sigma_y$

$W$  : module plastique





$$\text{Vecteur aléatoire : } Z = \begin{pmatrix} P \\ I \\ W \\ \sigma_y \end{pmatrix} \quad E(Z) = \begin{pmatrix} 10 \text{ KN} \\ 8 \text{ m} \\ 100 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \\ 600 \cdot 10^3 \text{ KN/m}^2 \end{pmatrix}$$

$$C_Z = \begin{pmatrix} 4(\text{KN}^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-2}(\text{m}^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \cdot 10^{-12}(\text{m}^6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{10}(\text{KN/m}^2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Fonction d'état limite : } G(Z) = W\sigma_y - \frac{PL}{4}$$

$$P_f = \Phi(-\beta) = 0,0066$$



## Critique de l'indice $\beta_c$

$\beta_c$  non invariant par rapport à l'état limite

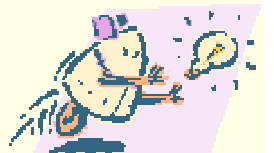
→ Exemple :  $G(R, S) = R - S$  (i) et  $G(R, S) = R/S - 1$  (ii)

(i) : calcul analytique possible

(ii) : calcul analytique impossible ( $R/S$  non gaussienne)



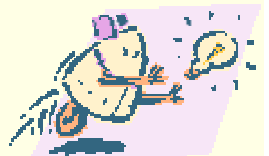
Approximation : linéarisation de l'état limite autour des valeurs moyennes



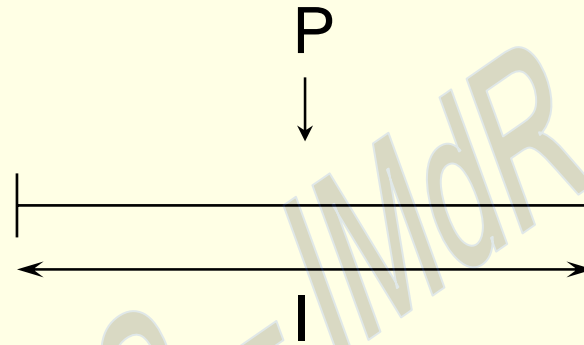
$$G(R, S) = G(\mu_R, \mu_S) + \frac{\partial G}{\partial R} \Big|_{\mu_R, \mu_S} (R - \mu_R) + \frac{\partial G}{\partial S} \Big|_{\mu_R, \mu_S} (S - \mu_S) = \frac{\mu_R}{\mu_S} - 1 + \frac{R}{\mu_S} - \frac{\mu_R}{\mu_S^2} S$$

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \left(\frac{\mu_R}{\mu_S}\right)^2 \sigma_S^2}}$$

Deux formulations mécaniquement équivalentes peuvent fournir des indices différents



## Exemple : poutre



$$G(Z) = W \sigma_y - \frac{PL}{4}$$

ou

$$G(Z) = \sigma_y - \frac{PL}{4W}$$

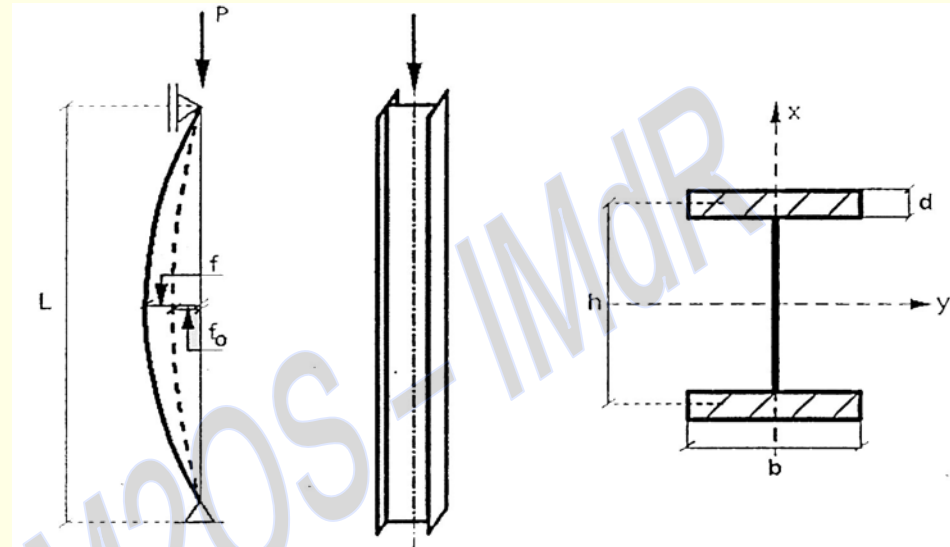


Fonction d'état limite	Indice de fiabilité $\beta_c$	$P_f$
$G(Z) = W\sigma_y - PL/4$	2,48	$6,57 \cdot 10^{-3}$
$G(Z) = \sigma_y - PL/4W$	3,48	$0,25 \cdot 10^{-3}$



## COMREL : Exemple

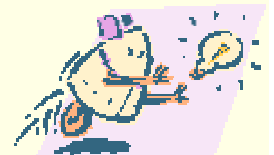
### Flambement d'un poteau bi-articulé soumis à un effort de compression simple



- $L$  : hauteur du poteau  
 $f_0$  : flèche initiale dans la section à mi-hauteur  
 $P$  : effort de compression simple  
 $f$  : flèche dans la section à mi-hauteur sous l'effet de  $P$  (incluant la flèche initiale  $f_0$ )

$$f = \frac{P_c}{P_c - P} f_0$$

- où :  $P_c$  est la force critique d'Euler :  
 $E$  est le module d'Young  
 $I$  est l'inertie de la section :  $I = I_y = I_y(b, d, h)$



## COMREL : Exemple (suite)

### Flambement d'un poteau bi-articulé soumis à un effort de compression simple

#### 1) Fonction d'État limite

La ruine est définie comme l'atteinte de la limite élastique en un point quelconque de la section à mi-portée.

$$g(x) = \sigma_y - \sigma = \sigma_y - \left( \frac{P}{A} + \frac{P_f}{W} \right)$$

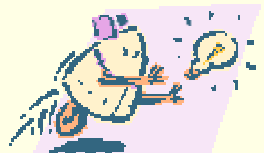
Avec :  $A$  = aire de la section =  $A(b, d, h)$   
 $W$  = module plastique =  $W(b, d, h)$   
 $\sigma_y$  = limite d'élasticité

Soit :  $g(x) = g(\sigma_y, P, b, d, h, f_0, E) = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$

#### 2) Modélisation stochastique des variables aléatoires

		Type de loi	Moyenne	Ecart-type
$X_1 = \sigma_y$	limite d'élasticité	lognormale	500 N/mm <sup>2</sup>	25 N/mm <sup>2</sup>
$X_2 = P$	effort de compression	gamma	2000 kN	600 kN
$X_3 = b$	largeur de semelle	lognormale	300 mm	3 mm
$X_4 = d$	épaisseur de semelle	lognormale	20 mm	1 mm
$X_5 = h$	distance entre semelles	normale	300 mm	5 mm
$X_6 = f_0$	flèche initiale	normale	5 mm	3 mm
$X_7 = E$	module d'Young	Weibull	210 kN/mm <sup>2</sup>	4.2 kN/mm <sup>2</sup>

3) Résultats : Indice de fiabilité  $\beta = 3.32$     Probabilité de défaillance  $P_f = 0.45 \times 10^{-3}$



→ Démarche suivie :

→ 1) Partir de  $G(Z)$

→ 2) Linéariser

→ 3) Calculer  $\beta_c$

→ Résultat non invariant par rapport à  $G(Z)$

→ Démarche retenue :

→ 1) Changement de variables : espace des variables gaussiennes, centrées, réduites et indépendantes

→ 2) Calcul de  $\beta_{HL}$  (Hasofer et Lind)





## Passage de l'espace physique à l'espace réduit

### Espace physique

### Espace réduit

A)  $Z_i \rightarrow N(\mu_i, \sigma_i)$   
 $Z_i$  indépendantes

$$\longrightarrow X_i = (Z_i - \mu_i) / \sigma_i$$

B)  $Z_i \rightarrow N(\mu_i, \sigma_i)$   
 $Z_i$  non indépendantes

$$\longrightarrow X = A(Z - E(Z))$$

avec  $AC_x A_t = I$

C)  $Z_i$  quelconques  
 $Z_i$  indépendantes

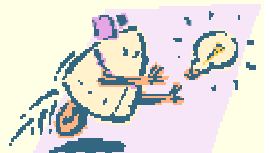
$$\longrightarrow T : Z_i \rightarrow X_i = \Phi^{-1}(F_{z_i}(Z_i))$$

D)  $Z_i$  quelconques  
 $Z_i$  non indépendantes

$$\longrightarrow T : Z_i \rightarrow X_i = \Phi^{-1}(F_{z_i}(Z_i))$$

+ décorrélation

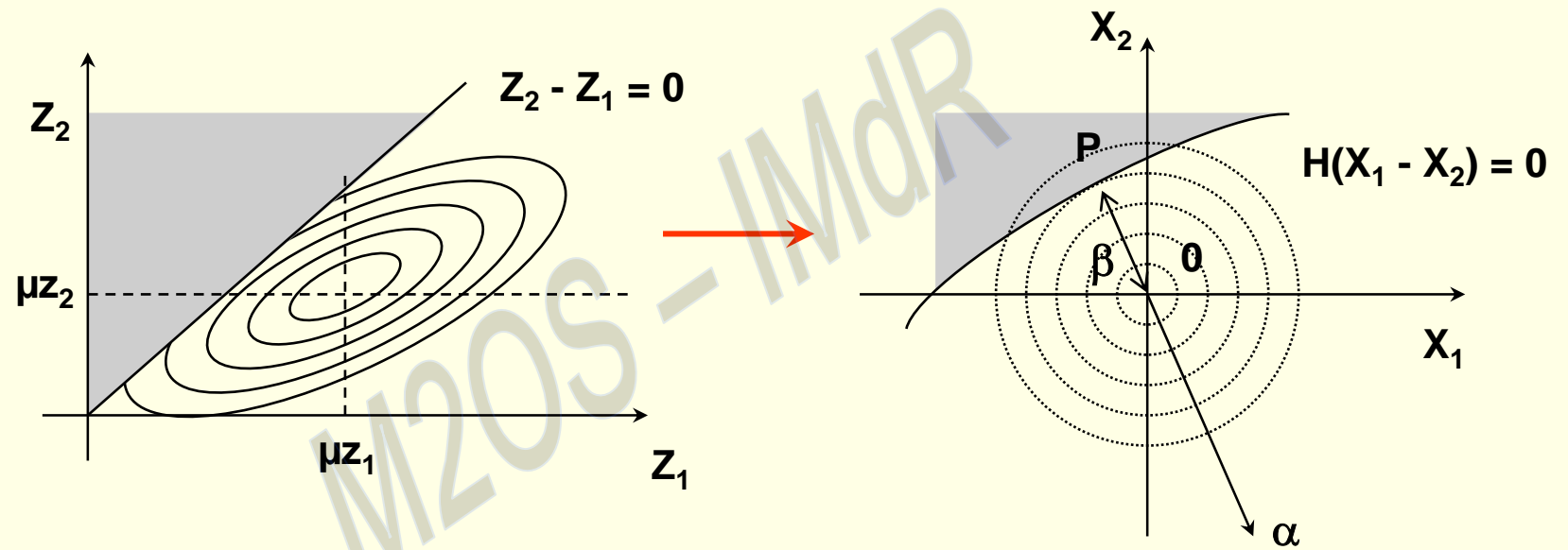
C) D) Transformation de Rosenblatt (1952) ou Nataf (1980)



## Indice de fiabilité de Hasofer et Lind

- **But** : généraliser la définition de l'indice de fiabilité au cas d'une surface non linéaire
- **Définition** : l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind est la plus petite distance (au sens euclidien) de l'origine à la surface de ruine dans un espace de variables normales, centrées, réduites et non corrélées





*Espace physique*

*Espace normé centré*



## Passage de l'espace Z à l'espace X

$$X = A(Z - \mu)$$

A,  $\mu$  : déterminés par la transformation de Rosenblatt

$$Z \rightarrow X$$

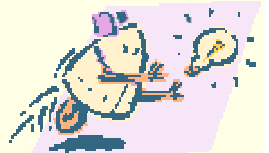
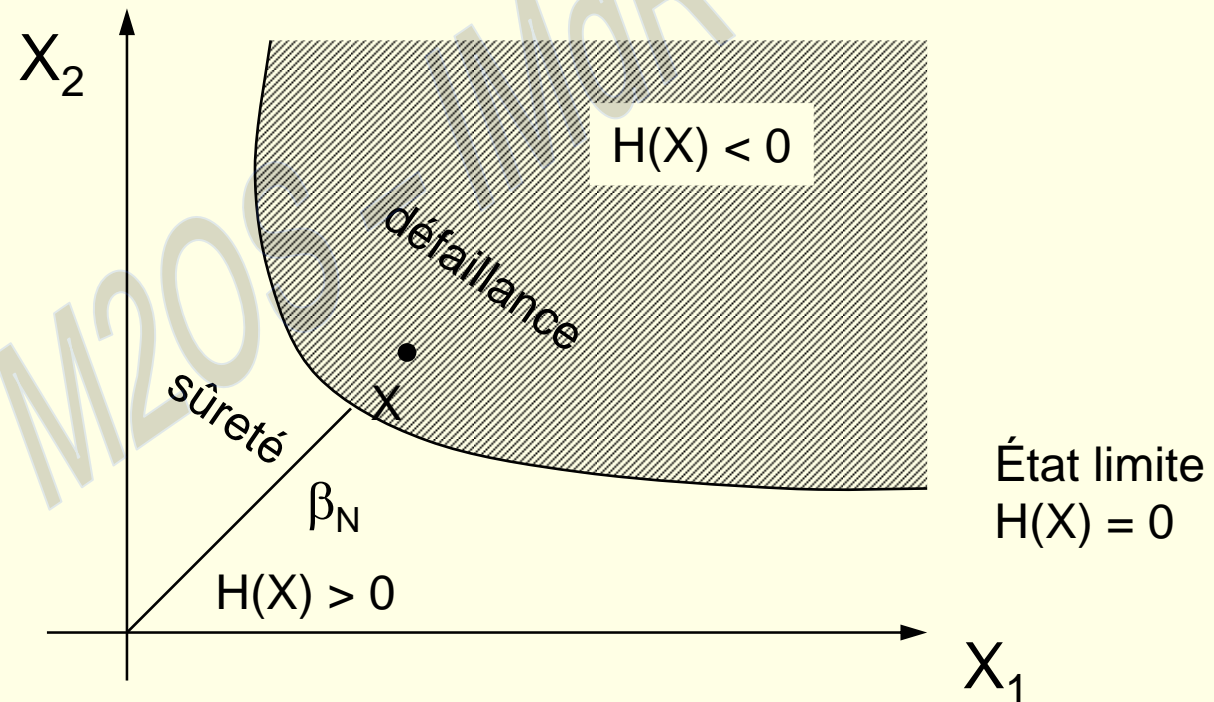
$$G(Z) \rightarrow H(X)$$

$$L_Z \rightarrow L_X$$

$X^*$  : point de défaillance le plus probable ou point de fonctionnement



$$\beta_{HL} = (x^{*t} x^*)^{1/2} = \min (x^t x)^{1/2} \text{ pour } x \in L_X$$



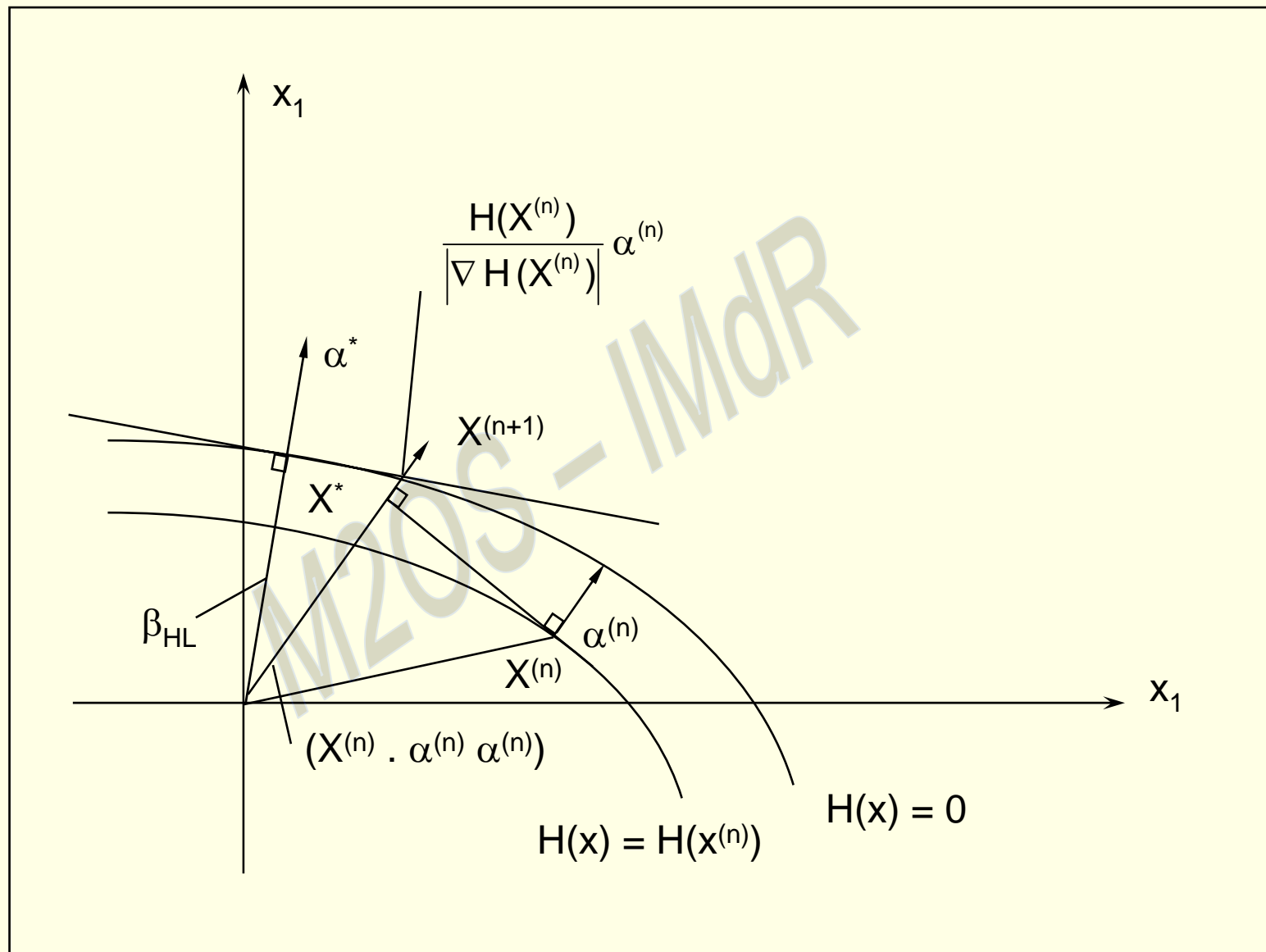
## Algorithme de recherche du point de fonctionnement

Principe (Rackwitz-Fiessler 1978)

$\{X_0\}$

- 1) Linéarisation de la fonction d'état limite  $H(X)$  en  $X_0$
- 2) Intersection de l'hyperplan tangent avec le plan des variables de base
- 3) Recherche du point  $\{X_1\}$  le plus près de l'origine et projection de  $X_1$  sur  $L_X$
- 4) Retour en 1) ou FIN





Modèle mécanique



Équation d'état limite



Lois des variables aléatoires



Passage de l'espace physique (Z) à l'espace des variables normales, centrées, réduites et indépendantes (X)



Calcul de l'indice de fiabilité  $\beta_{HL}$



Calcul de  $P_f$





## Évaluation de la probabilité de défaillance

- Deux grands types de méthodes actuellement utilisés pour calculer  $P_f$  :
- les méthodes déduites de la simulation statistique de Monte-Carlo
  - les méthodes fondées sur une approximation autour du point de conception, principalement linéaire, FORM (First Order Reliability Method) et les approximations de degré 2, SORM (Seond Order Reliability Method)



## Méthode de Monte-Carlo

Calculer  $P_f = \text{Prob}(G(Z) < 0)$       $Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$



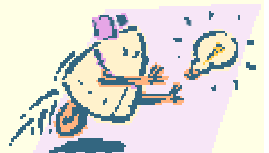
- 1) Affecter une valeur aléatoire à chacun des paramètres  $Z_1, \dots, Z_n$
- 2) Déterminer le signe de la fonction d'état limite  $G$

avec      $P_f = \frac{N_1}{N}$

$N$  = nombre total de simulation  
 $N_1$  = nombre de simulation où  $G$  est négative

### Convergence lente de la méthode

Le tirage au hasard selon une loi de probabilité est basé sur la génération de nombres aléatoires distribués uniformément entre 0 et 1.



Formule de Shooman : %erreur =  $200 \sqrt{\frac{1 - \tilde{P}_f}{n \tilde{P}_f}}$

|  $\tilde{P}_f$  : fréquence estimée  
| n : nombre de simulations

→ Erreur correspondant à une probabilité de 95% que la valeur exacte de  $P_f$  appartienne à  $\tilde{P}_f (1 \pm \% \text{ erreur})$

(intervalle de confiance de 95%)



Exemple :  $P_f = 10^{-5}$ , erreur : 10%

$$n = \frac{200^2 (1 - \tilde{P}_f)}{\tilde{P}_f (\% \text{erreur})^2} = 4 \cdot 10^7$$

Si  $P_f = 10^{-n} \Rightarrow n = 10^{n+2}$  à  $10^{n+3}$  simulations

Temps de calcul prohibitif



## Méthodes FORM/SORM

### 2 étapes :

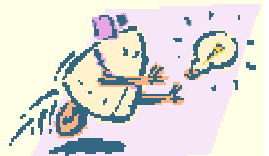
- 1) Calcul de  $\beta_{HL}$
- 2) Évaluation de  $P_f$

Approximation linéaire  
FORM

Approximation de degré 2  
SORM

### → But :

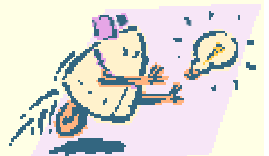
- diminuer les temps de calcul
- analyser la sensibilité des paramètres



## Approximation FORM

### → Constat :

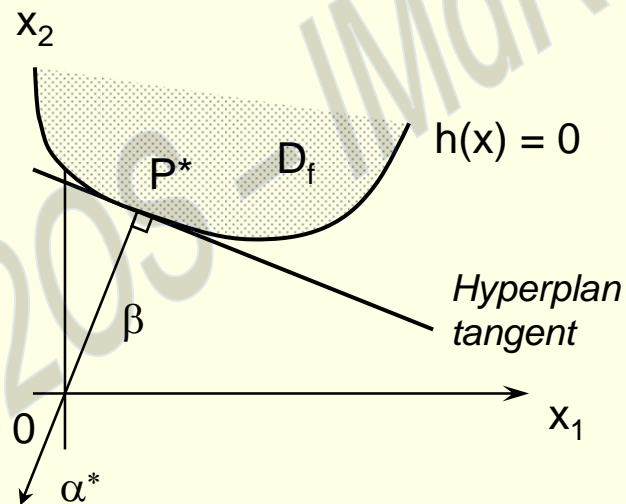
Au point du domaine  $D_f$  le plus proche de l'origine,  $P^*$ , la densité de probabilité est maximale dans  $D_f$  ; cette densité décroît rapidement lorsque la distance à l'origine augmente



## Approximation FORM

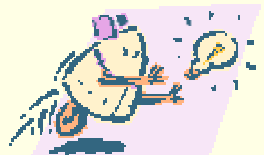
$$P_f = \Phi(-\beta)$$

→ On linéarise la fonction d'état limite en  $P^*$



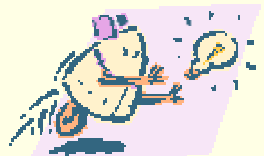
$$P_f = \text{Prob}(G(Z) \leq 0) \cong \text{Prob}(H(X) \leq 0) = \text{Prob}\left(\sum \alpha_i X_i + \beta_{HL} \leq 0\right)$$

$$P_f = \Phi(-\beta)$$



→ Densité de probabilité de la loi normale centrée :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \text{Exp}\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$





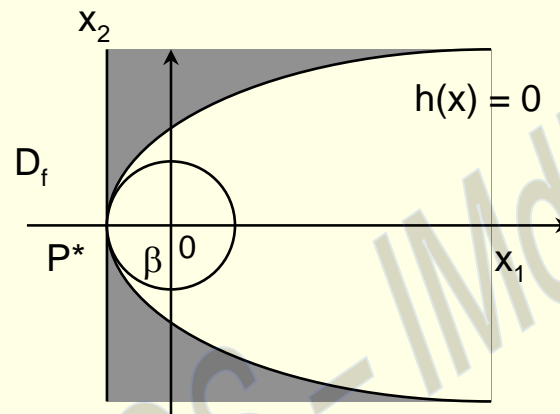
- **Avantage** : Coût en temps calcul nul
- **Défaut** : Niveau d'approximation inconnu  
État limite linéaire dans espace X



Solution exacte



## Contre-exemple

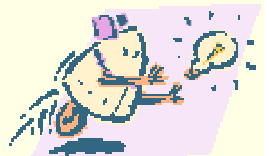


$$H(x) = 3 + x_1 - \frac{1}{6} x_2^2$$

$$\beta_{HL} = 3 \Rightarrow \text{FORM: } P_f = 1,35 \cdot 10^{-3}$$

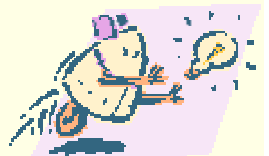
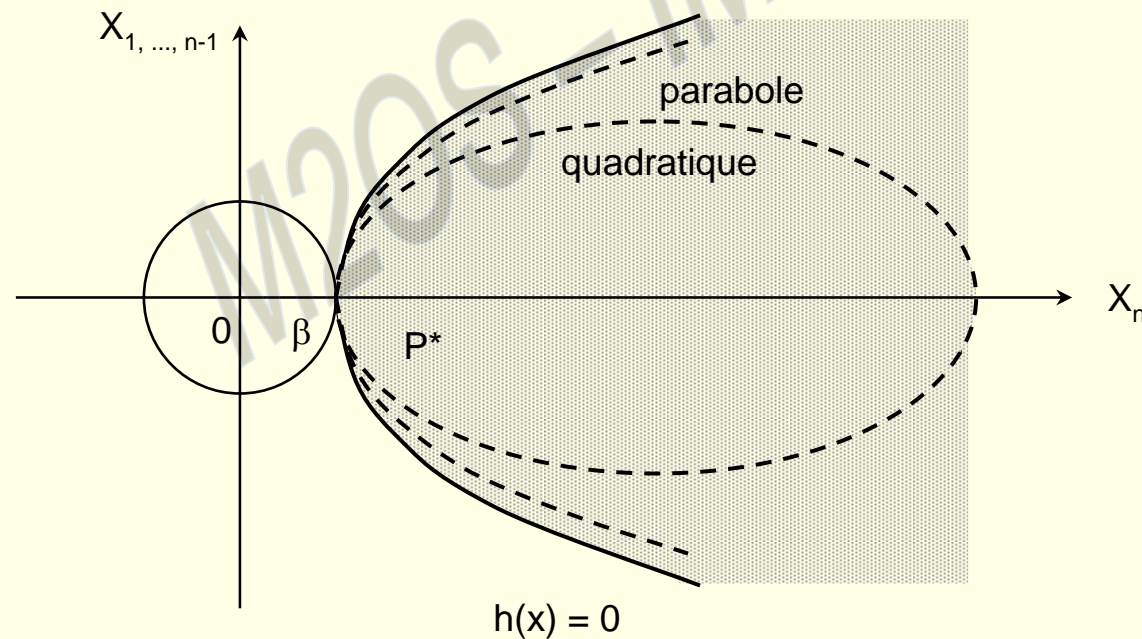
$$\text{Calcul direct : } P_f = 0,111$$

**VALIDER LE CALCUL**



## Approximation SORM

- **But** : obtenir une meilleure connaissance de la géométrie de la fonction d'état limite au voisinage de  $P^*$



## SORM

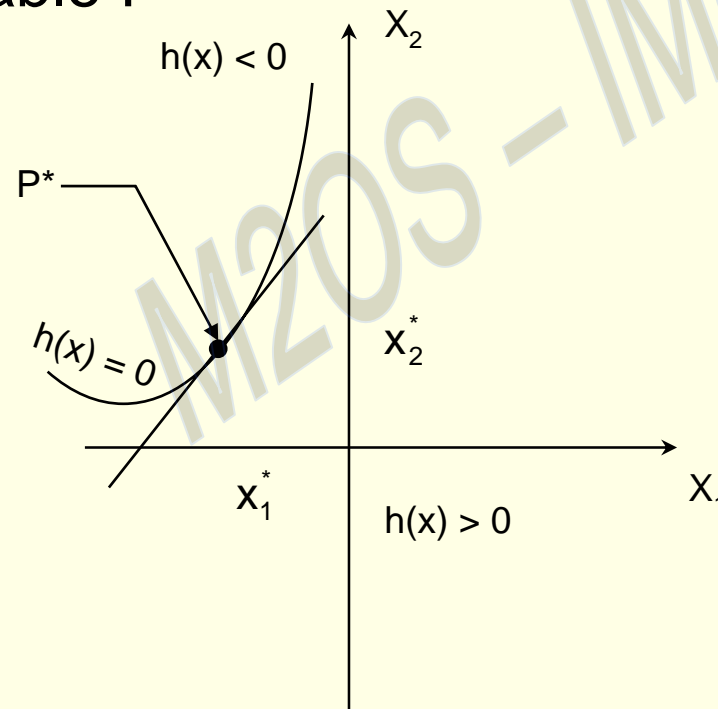
- Connaissance de la fonction d'état limite autour de  $P^*$
- Qualité de l'approximation parabolique, quadratique

!! SORM peut-être moins précis que FORM

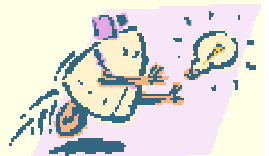


## Simulation conditionnelle

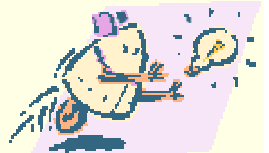
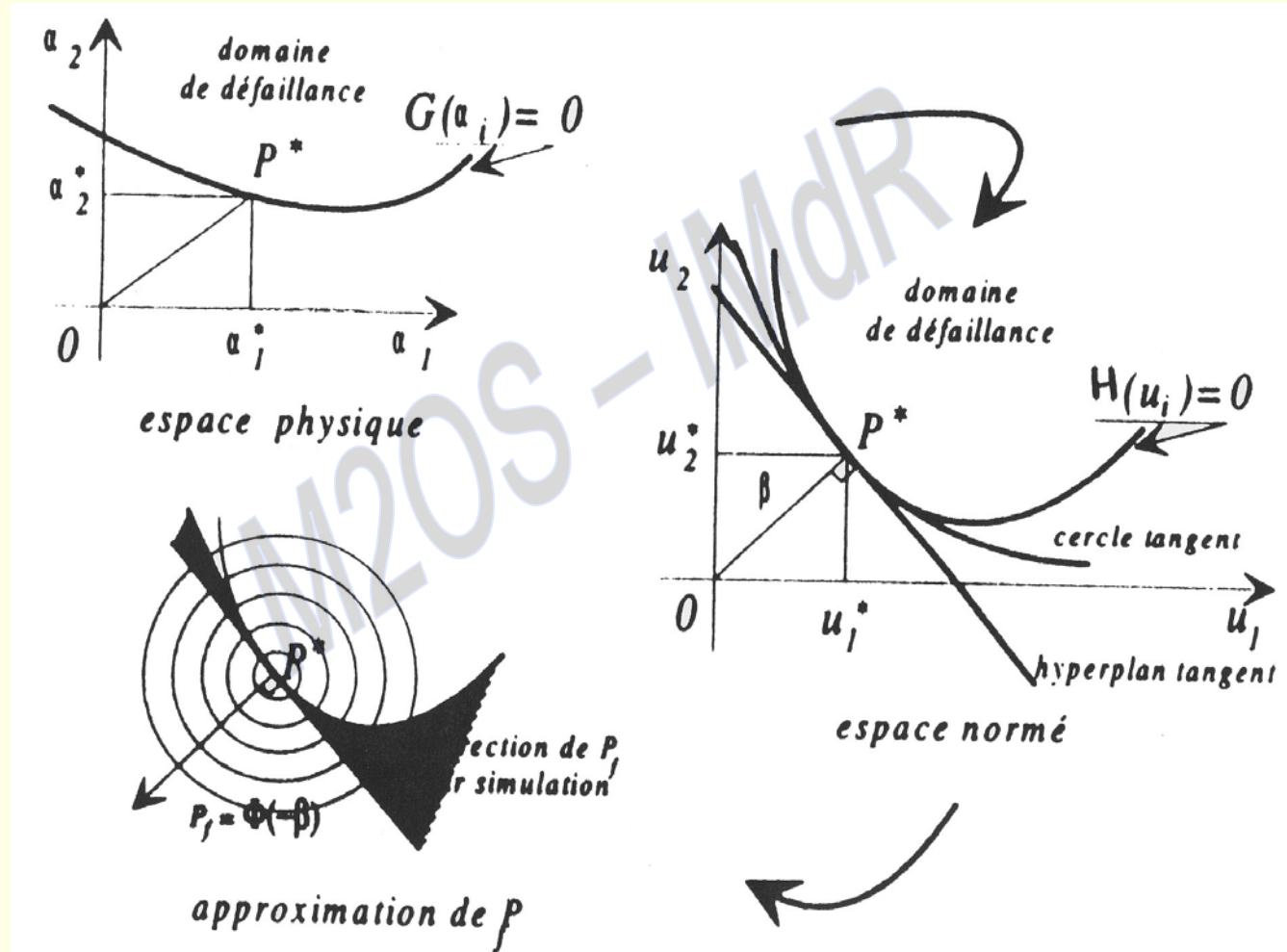
- But : Confirmer un résultat FORM ou SORM
- Simulation autour du point de défaillance le plus probable  $P^*$



Simulation  
conditionnelle

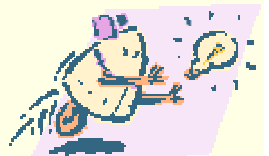


## Principe des méthodes d'approximation



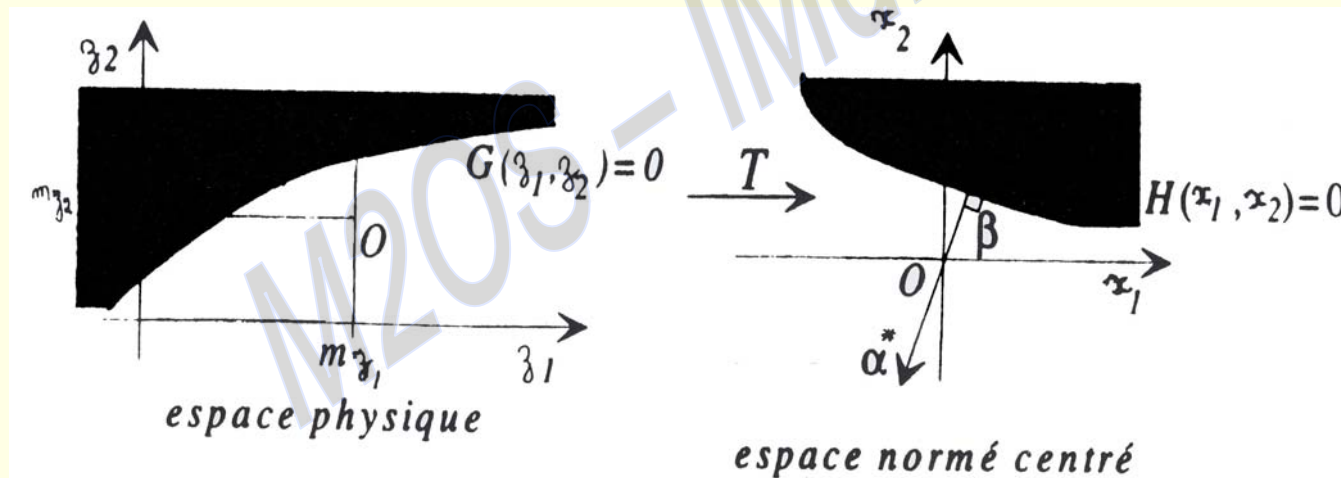
## Analyse de sensibilité

- Méthodes probabilistes utilisées en fiabilité des structures :
  - ➔ évaluer les probabilités de défaillance,
  - ➔ analyse de sensibilité des paramètres
  
- But
  - ➔ discriminer les variables influentes sur le calcul de l'indice de fiabilité
  - ➔ limiter le nombre de variables aléatoires dans les calculs et se concentrer sur les incertitudes les plus importantes



→ On mesure l'importance globale d'une variable sur la probabilité calculée

Calcul de  $\beta_{HL} \Rightarrow P^*(x^*)$  avec  $x^* = \beta_{HL} \alpha^*$



$\alpha^*$  : cosinus directeur de la normale à l'état limite





$$\frac{\partial \beta}{\partial X} = \alpha$$

→ Mesure de l'importance relative des variables  $X_i$  sur  $P_f$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \rho} \quad \rho = (\mu_i, \sigma_i)$$

→ Mesure de l'importance des paramètres d'une variable aléatoire  $P_f$

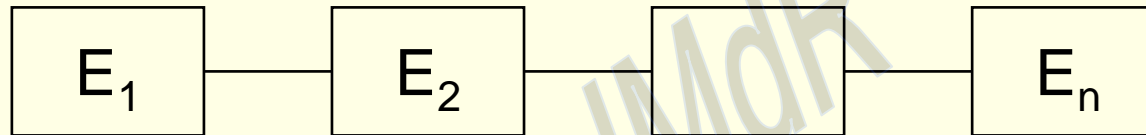


## Fiabilité système

- 1) Fiabilité composant : à un scénario de défaillance, on associe une fonction d'état limite
- 2) La défaillance d'un système mécanique ne dépend pas en général d'un seul événement



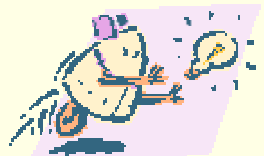
## Combinaison série



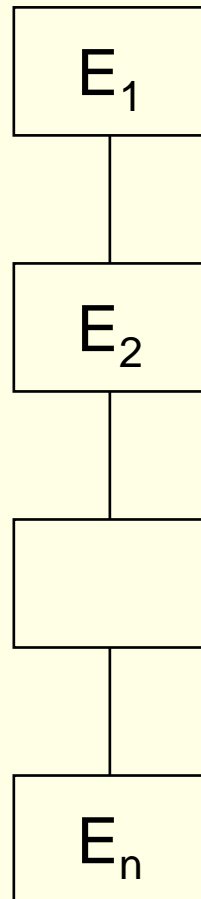
$E_i$  : événements de défaillance

Défaillance d'un élément  Défaillance système

$$P_{\text{fsyst}} = \text{Prob} (U E_i)$$



## Combinaison parallèle

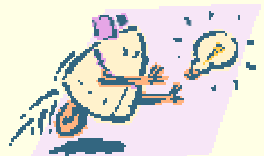


Défaillance de tous les éléments

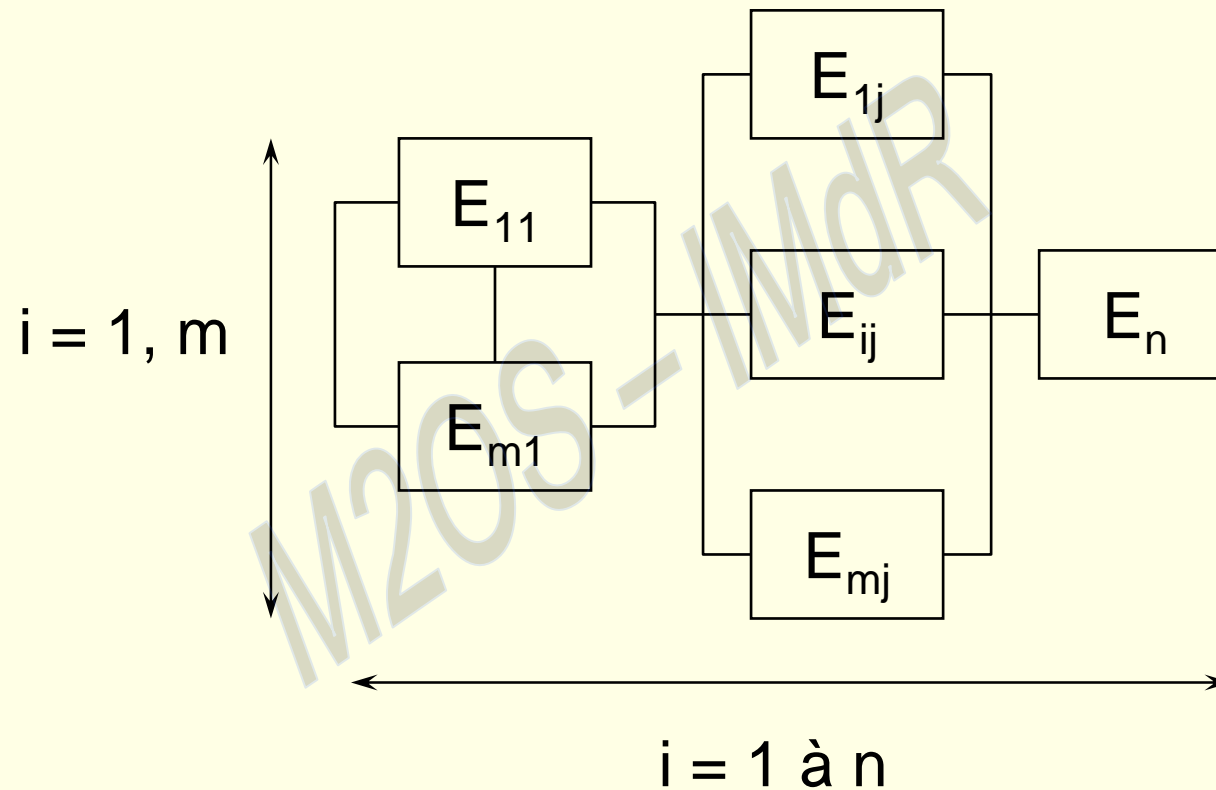


Défaillance système

$$P_{\text{fsyst}} = \text{Prob} (\cap E_i)$$



## Combinaison série de systèmes parallèles



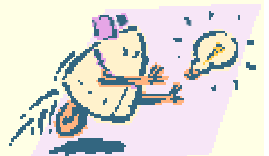
$$P_{\text{fsyst}} = \text{Prob} \left( \bigcup_j \left( \bigcap_i E_i \right)_j \right)$$



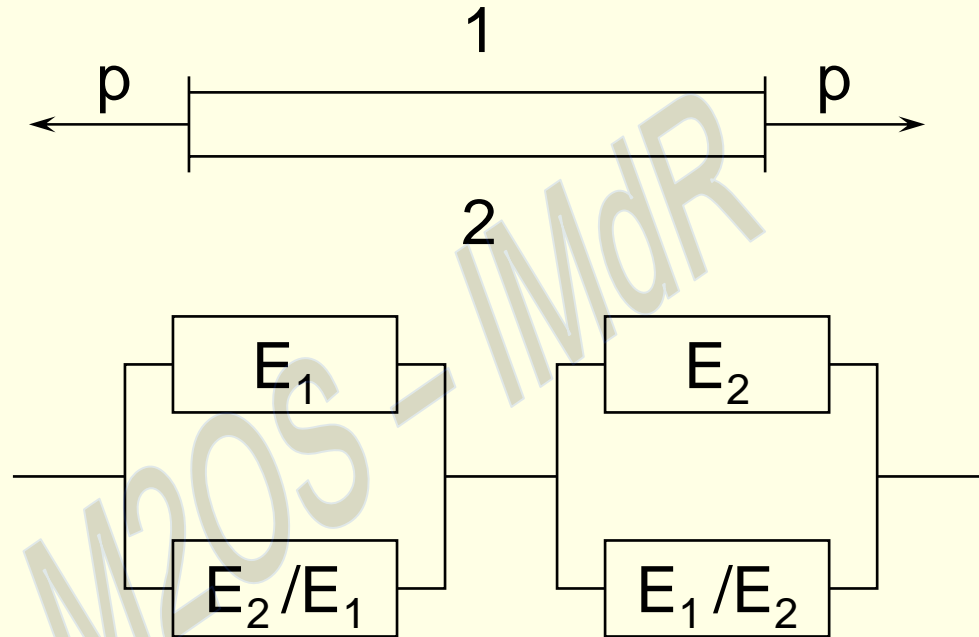
## Combinaison parallèle de systèmes séries

$$P_{\text{fsyst}} = \text{Prob} \left( \bigcap_j \left( \bigcup_i E_{ij} \right) \right)$$

M2OS - IMdR



## Combinaison parallèle conditionnelle



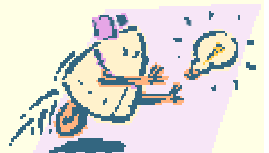
➔ Calcul de  $P(E_i)$ , puis  $P(E_j/E_i)$

$$P_{\text{fsyst}} = (P(E_1) \cap P(E_2/E_1)) \cup (P(E_2) \cap P(E_1/E_2))$$



## Codes probabilistes

- **PROBAN** : Det Norske Veritas (Hollande)
- **COMREL/SYSREL** : Université de Munich (Rackwitz)
- **RASOS** : Elf Aquitaine - CTIM (Reliability Analysis System for Offshore Structure)
- **COMPROMIS** : EDF (COde de Mécanique PRObabiliste pour la Maintenance et les Inspections en Service)
- **SISIF** : Bureau Veritas (Modèle probabiliste de propagation de fissures dans les structures soumises à la fatigue)





## Règlements et calibration

- Les règlements proposent des méthodes de vérification des constructeurs qui sont, en général, fondées sur l'expérience des constructeurs, des concepteurs et éventuellement des utilisateurs
- Un règlement est en constante évolution
- Les prescriptions autorisent l'utilisation de méthodes de calcul quelconques à condition de montrer que la fiabilité qu'elles procurent soit compatible avec l'ouvrage concerné
- Les règlements proposent aux concepteurs les limites dans lesquelles ils sont autorisés à prendre leurs hypothèses de dimensionnement afin d'assurer une sécurité suffisante aux réalisations projetées



## Exemple : Cas des règlements de construction métallique


**1956** : Actions extérieures ajoutées les unes aux autres de manière la plus défavorable. On minore la limite élastique caractéristique de l'acier par un coefficient  $2/3$ . Les calculs sont menés en élasticité.

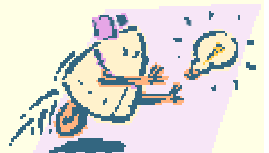
**1966** : Prise en compte de la probabilité d'occurrence des actions extérieures de manière forfaitaire à travers des coefficients majorateurs d'actions dépendants du nombre de charges ou surcharges prises en compte simultanément (vent, neige).

Ces coefficients sont les suivants :

- 3/2 pour un type de surcharge,
- 17/12 pour l'action combinée de deux surcharges,
- 4/3 pour l'action combinée de trois surcharges.

On compare les contraintes qui en résultent à la limite élastique caractéristique :

 la fiabilité obtenue est plus petite ou égale.



## Exemple : Cas des règlements de construction métallique

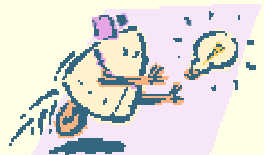
**1980** : Même démarche que celle de 1966 mais les calculs sont menés en plasticité.

 La probabilité de défaillance devient ainsi plus importante que celle qui peut être estimée avec le CM66.

Actuellement, les Eurocodes visent à prendre en compte la meilleure connaissance que le concepteur peut avoir des matériaux, des éléments structuraux ou des actions qui agissent sur la structure. Les coefficients partiels de sécurité permettent d'intégrer le nombre d'essais effectués sur les matériaux, les tolérances de fabrication ou de mise en œuvre ou la probabilité d'atteindre les valeurs caractéristiques des combinaisons d'actions.

Ainsi le calcul se rapproche plus de la réalité.

La probabilité de défaillance est mieux cernée, elle devient homogène.



→ Eurocodes : Codes de conception et de calcul des ouvrages de génie civil au niveau européen.

Se substitueront dans un proche avenir aux textes nationaux à caractère normatif dans les différents pays de l'Union Européenne.

Appelés à devenir des normes de référence dans le cadre d'appels d'offres internationaux.



Règlement	Type d'analyse	Coefficients de sécurité
CM 56	Calcul élastique	Coefficient de sécurité global : $\sum_k \sigma_k \leq \frac{2}{3} f_y$
CM 56	Calcul élastique	Coefficients partiels de sécurité forfaitaires prenant en compte des probabilités d'occurrence d'actions : $\sum_k \gamma_k \times \sigma_k \leq f_y$
CM 80 (ou additif 80)	Calcul élastique	Coefficients partiels de sécurité identiques à ceux du CM 66
EUROCODE 1  et  EUROCODE 3	Calcul élastique  &  Assemblages semi-rigides	Coefficients partiels de sécurité pouvant être déterminés en liaison avec un indice de fiabilité $\beta$ choisi au préalable (ou une probabilité de défaillance) : $\sum_k \gamma S_k(\beta) \times \sigma_k \leq \frac{f_y}{\gamma_M(\beta)}$ ou même $\sum_k \gamma S_k(\beta) \times \sigma_k \leq \frac{f_u}{\gamma_M(\beta)}$

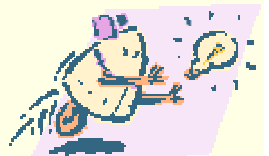


- Globalement, la fiabilité des structures dimensionnées avec les règles modernes tend à diminuer. En s'appuyant sur l'expérience et en constatant que les défaillances effectives de structures dimensionnées avec les règlements précédents sont extrêmement faibles, le concepteur ose (ou prend le risque calculé) de mieux profiter des capacités de résistance des éléments ou de sa connaissance des sollicitations auxquelles sont confrontées les structures.



- L'utilisation des méthodes semi-probabilistes trouve bien sûr son intérêt dans le dimensionnement des structures neuves dont les éléments structuraux tendent à être choisis avec une probabilité de défaillance plus homogène rendant ainsi l'utilisation des matériaux plus performants. Il est également possible de les utiliser pendant la vie de la structure en tant qu'élément de décision pour la maintenance et les réparations éventuelles.

Si la probabilité de défaillance évolue dans le temps (elle augmente en général), on peut fixer un seuil pour lequel il est nécessaire, soit de réparer, soit de remplacer la construction. Ceci nécessite bien sûr de pouvoir quantifier l'état de la structure en fonction du temps à travers des inspections systématiques.

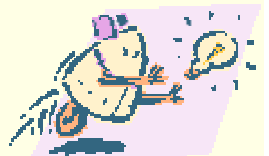


## Modèles probabilistes utilisés dans les règlements

- L'introduction de la probabilité de défaillance dans les règlements reste délicate (car on sous-tend que la structure est calculée avec un risque de défaillance non nul, alors que l'indice de fiabilité  $\beta$  ne présente pas cet inconvénient psychologique :

$$P_f = 10^{-3} - \beta \approx 3$$

$$P_f = 10^{-9} - \beta \approx 4$$





## Classification des différents niveaux d'appréciation de la fiabilité dans les règlements

- Niveau 0** : Analyse purement déterministe - Coefficient de sécurité global
- Niveau 1** : Règles semi-probabilistes, les actions et les résistances sont des valeurs caractéristiques. Des coefficients partiels de sécurité forfaitaires sont introduits pour tenir compte d'autres incertitudes.  
On prend en compte la probabilité d'occurrence d'événements.
- Niveau 2** : Analyse probabiliste - Calcul d'indice de fiabilité et des coefficients partiels de sécurité



- **Longtemps** : Niveau 0
- **Actuellement** : Niveau 1
- **Tendance (Eurocode)** : Niveau intermédiaire entre niveaux 1 et 2. Évaluation des coefficients partiels de sécurité à l'aide d'une méthode de niveau 2 puis à leur utilisation dans une méthode de niveau 1.



## Valeurs caractéristiques - Valeurs de conception

→ Valeurs de conception :  $\left| \begin{array}{l} R_d = \theta_R R_C \text{ (résistance)} \\ S_d = \theta_S S_C \text{ (solicitation)} \end{array} \right.$

→ Valeurs caractéristiques :  $R_C, S_C$

→ Facteurs de sécurité partiels :  $\theta_R, \theta_S$

→ Coefficient de sécurité global :  $\left| \begin{array}{l} R_C = \mu_R - k_R \sigma_R \\ S_C = \mu_S - k_S \sigma_S \end{array} \right.$

→ Coefficient de sécurité caractéristique :  $\gamma = \frac{\mu_R}{\mu_S}$


→ Coefficient de sécurité caractéristique :  $\gamma_C = \gamma \left( \frac{1 - k_R C_R}{1 + k_S C_S} \right)$

avec  $\left| \begin{array}{l} \text{Prob}(R < R_C) = \alpha \\ \text{Prob}(S > S_C) = \alpha \end{array} \right.$



## Coefficients partiels de sécurité

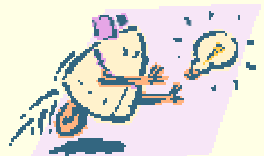
Analyse probabiliste


$$\beta_{HL} = P^*(x^*)$$

$$X^* \xrightarrow{T^{-1}} Z^*$$

$$P^* \xrightarrow{T^{-1}} U^*$$

$$\gamma_i = \frac{z_i^*}{z_i}$$



→ Définit une règle de dimensionnement :

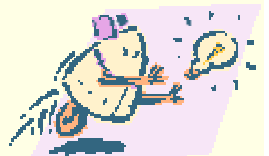
$$\gamma_S S < \frac{R}{\gamma_R}$$

Remarque : un jeu de coefficients partiels de sécurité définit un indice et une probabilité de défaillance ; une probabilité de défaillance fournit plusieurs jeux de coefficients.



## Calibration des codes

- Consiste à évaluer les coefficients partiels de sécurité pour une valeur de  $\beta$  fixée a priori ou au contraire, à évaluer  $\beta$  en fonction d'un état de la structure lié aux coefficients partiels de sécurité retenus.



## Conclusion

$\beta$  :

- Outil comparatif de la fiabilité relative de différentes conceptions de structures mécaniques
- Permet de vérifier le respect des critères de sûreté ou de disponibilité imposés à la conception

Étude de sensibilité : coefficients partiels de sécurité

*«La prise en compte de l'aléa dans le processus de dimensionnement introduit une précision supplémentaire».*

HASOFER

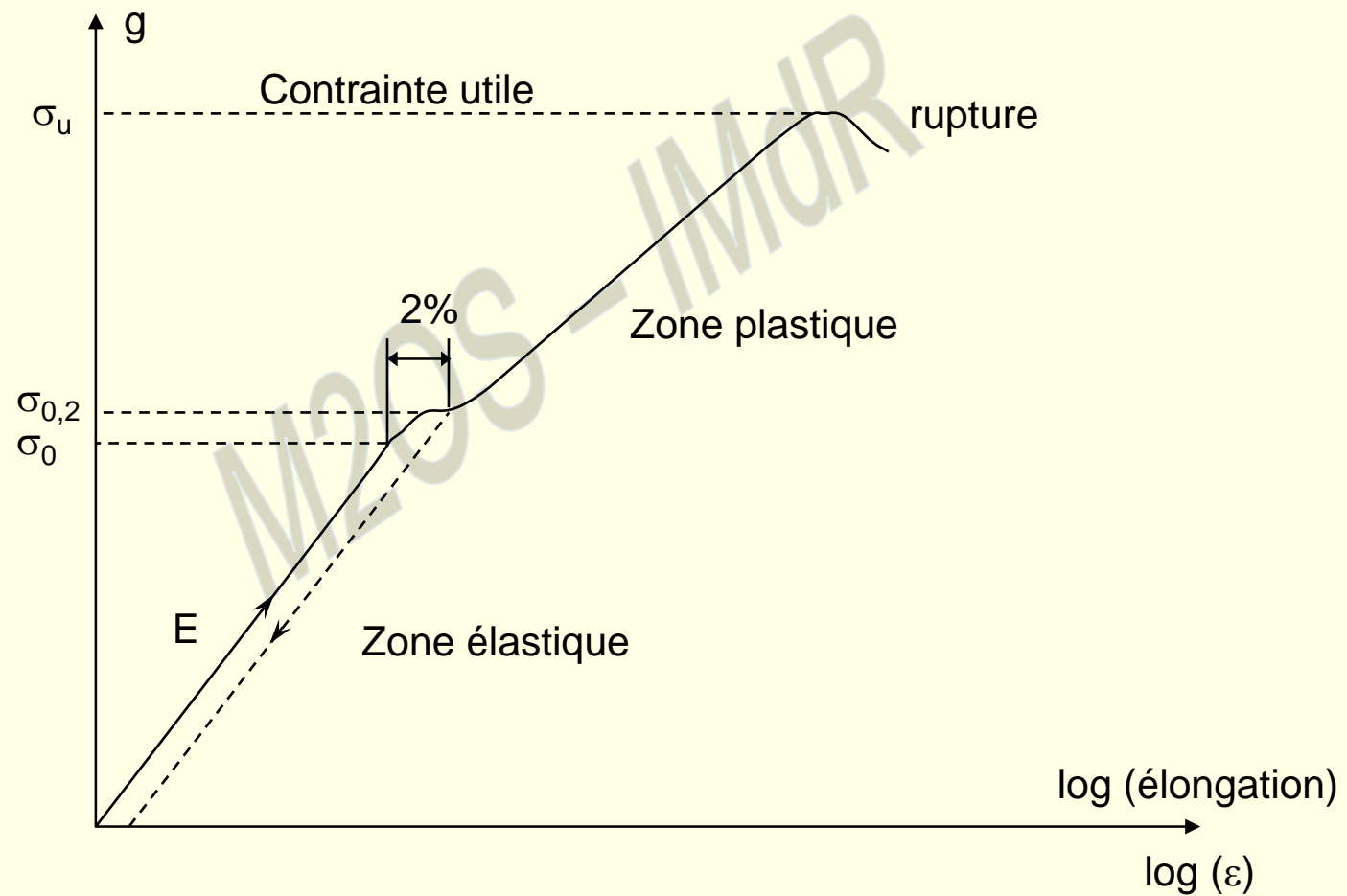


## 4. MECANIQUE





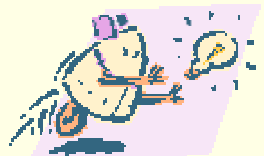
## Caractéristiques mécaniques des matériaux



## Module d'Young : E

- Loi de Hooke (relie contraintes et déformations dans le domaine élastique)

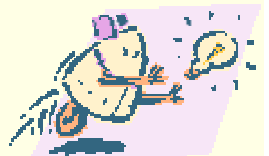
$$\sigma = E\varepsilon$$



→ **Limite d'élasticité  $\sigma_e$**  : contrainte qui correspond à une déformation irréversible.

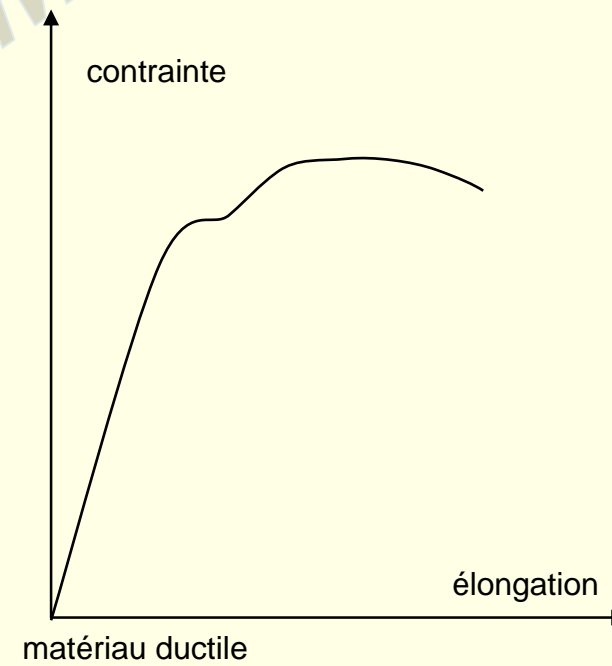
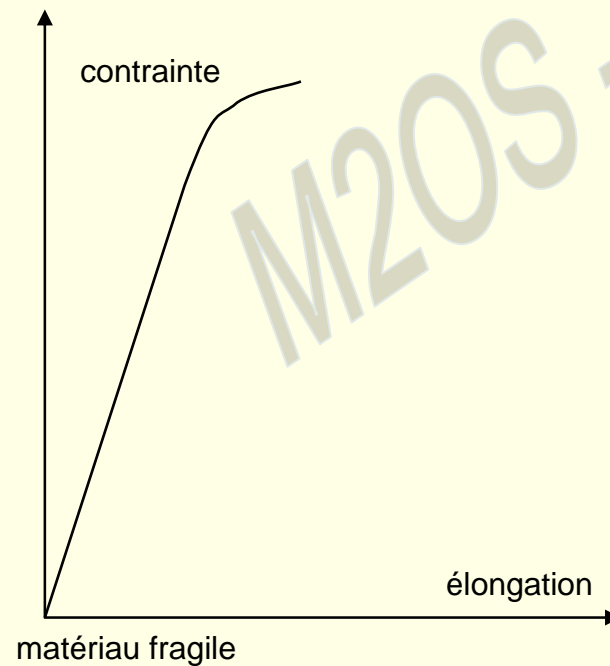
Conventionnellement pour les matériaux, on utilise une valeur de déformation permanente de 0,2 %.

→ **Coefficient de Poisson** : rapport entre la déformation longitudinale de la structure et sa déformation axiale.



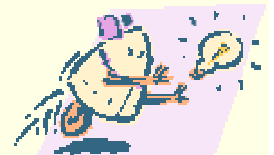
## Ductilité et fragilité

- La rupture d'un matériau peut être fragile sans déformation plastique ou au contraire avec déformation plastique importante (rupture ductile)

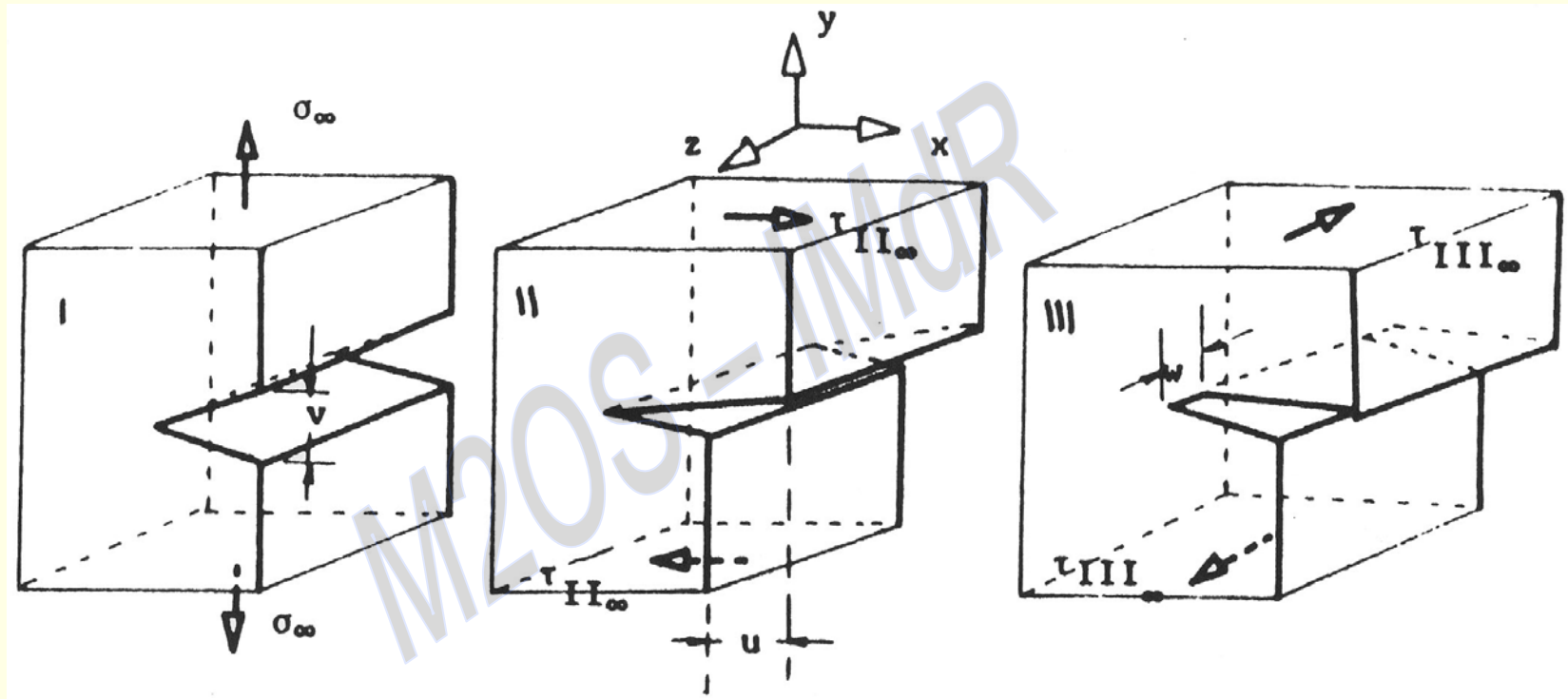


## Différents types de fissuration

Loi de comportement	Brutale	Progressive	Autres types d'évolution de fissure
Elastique	Rupture fragile (I)	Rupture par fatigue à grand nombre de cycle (III)	-
Elasto-plastique	Rupture ductile (II)	Rupture par fatigue oligo-cyclique (IV)	-
Autres lois de comportement	-	-	-



## Modes de fissuration



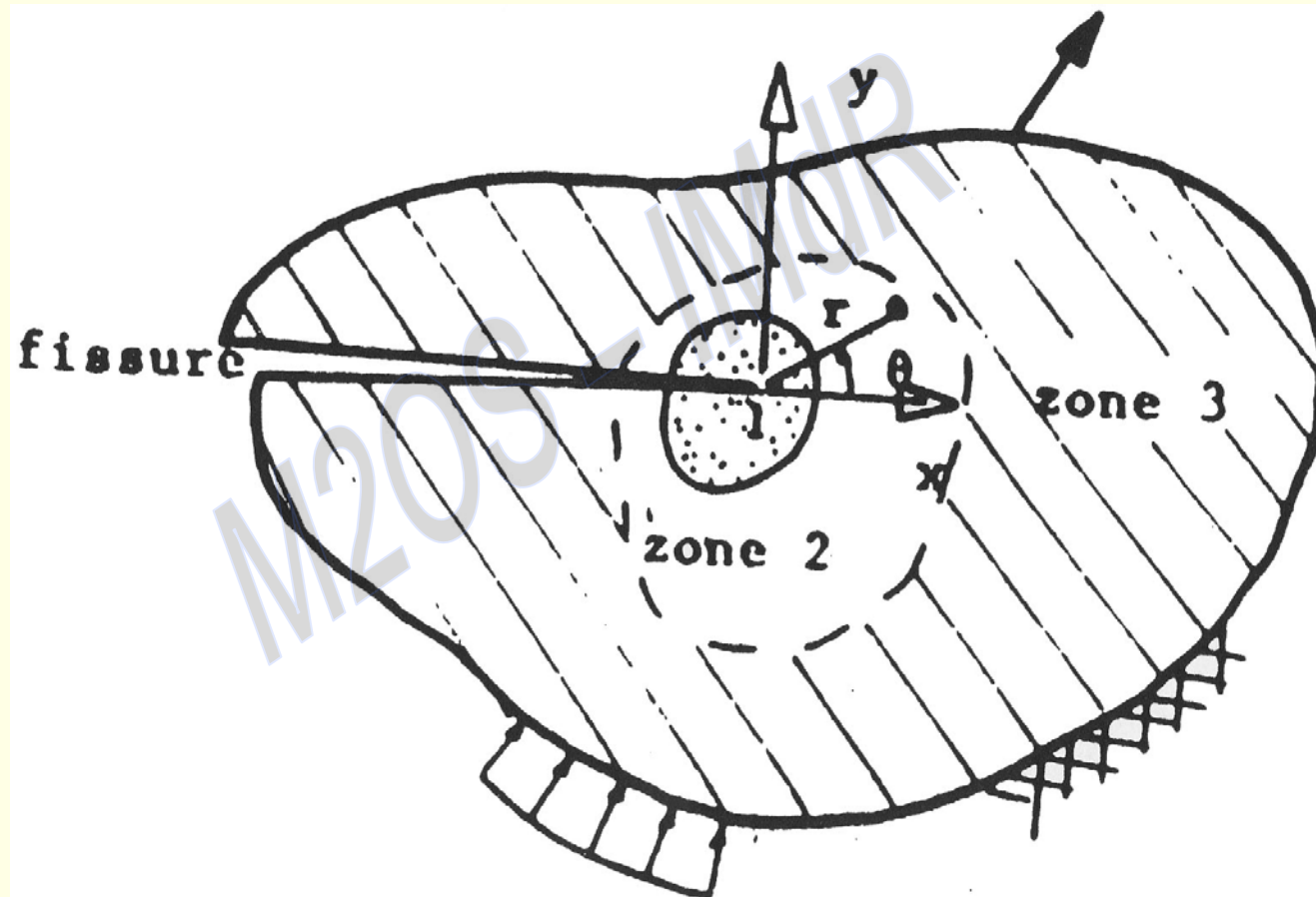
Mode I : mode d'ouverture de la fissure

Mode II : mode de cisaillement plan

Mode III : mode de cisaillement hors plan



## Mécanique de la rupture



## Mécanique de la rupture linéaire et non linéaire

On distingue 3 catégories d'analyse suivant la taille de la zone plastique en tête de fissure :

→ **1) Pas de plasticité :**

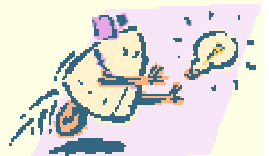
Rupture fragile  $\Rightarrow$  mécanique de la rupture linéaire - calcul de  $K_I$

→ **2) Plasticité confinée :**

- Détermination de l'étendue de la zone plastique
- Correction de la longueur de la fissure et application de la mécanique linéaire de la rupture

→ **3) Plasticité étendue :**

Mécanique de la rupture non linéaire (ou élastoplastique)  $\Rightarrow$  calcul de l'intégrale  $J$





## La règle R6

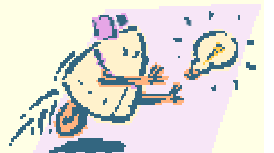
- Mise en place de méthodes pour évaluer l'intégrité de structures contenant des défauts pour tous types de chargements :

La règle des deux critères ou règle R6  
(anglaise)



## Quelques dates

- 1974 : Premiers travaux de Dowling et Townley - CEGB  
(Central Electricity Generating Board)
- 1976 : 1<sup>ère</sup> version de la règle R6 par Milne, Harrison et  
Lossemore - CEGB
- 1987 : Règle R6, version 3, par Milne, Ainsworth, Dowling  
et Stewart - CEGB



## Constat

*Cette pièce était sans défauts et elle a cassé !*

La seule considération des défauts ne suffit pas à prévoir la ruine. Il faut au moins considérer :

### **deux modes de ruine**

- l'un dépendant des fissures et plutôt fragile ;
- l'autre indépendant des fissures et plutôt ductile.



→ **IDEE** : la capacité de chargement d'une structure fissurée est limitée par deux modes de ruine opposés :

a) la ruine fragile par instabilité de la fissure

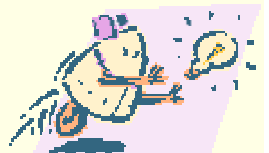


mécanique linéaire de la rupture

b) la ruine ductile par instabilité plastique



l'analyse limite



→ On pose :

$$K_r = \frac{K_I(P, a)}{K_{IC}} \quad , \quad L_r = \frac{P}{P_L(a, \sigma_y)}$$

P : chargement appliqué

a : longueur de la fissure

$\sigma_y$  : limite élastique à 0,2%

$P_L$  : chargement provoquant le début de plasticité dans la pièce fissurée

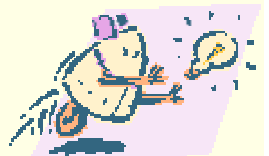


→ On obtient deux critères :

$$\left| \begin{array}{l} K_r \leq 1 \\ L_r \leq L_r^{\max} \end{array} \right.$$

avec  $L_r^{\max} = \frac{\sigma_{ec}}{\sigma_y}$  ,  $\sigma_{ec} = \frac{1}{2} (\sigma_u + \sigma_y)$

$\sigma_u$  : limite à rupture

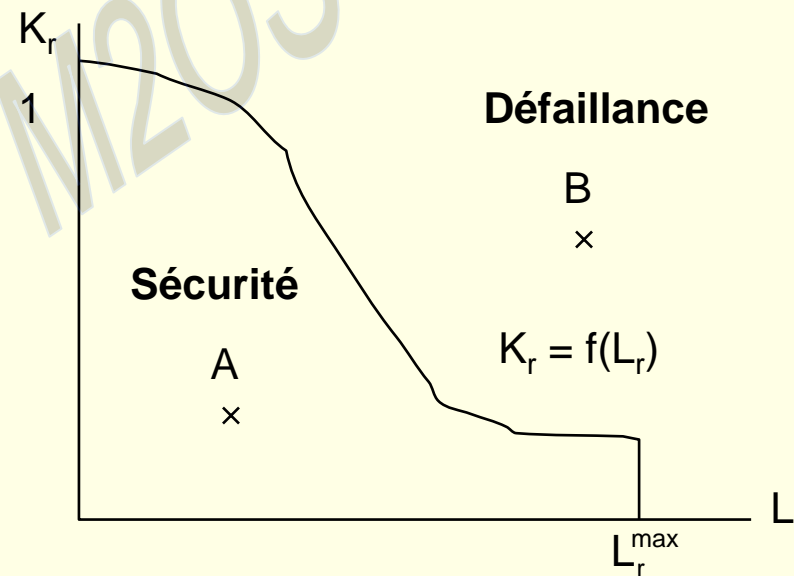


→ ATTENTION :

Il existe des interactions entre ces deux modes de ruine

→ La règle R6 traite de ces interactions en écrivant :

$$K_r \leq f(L_r)$$

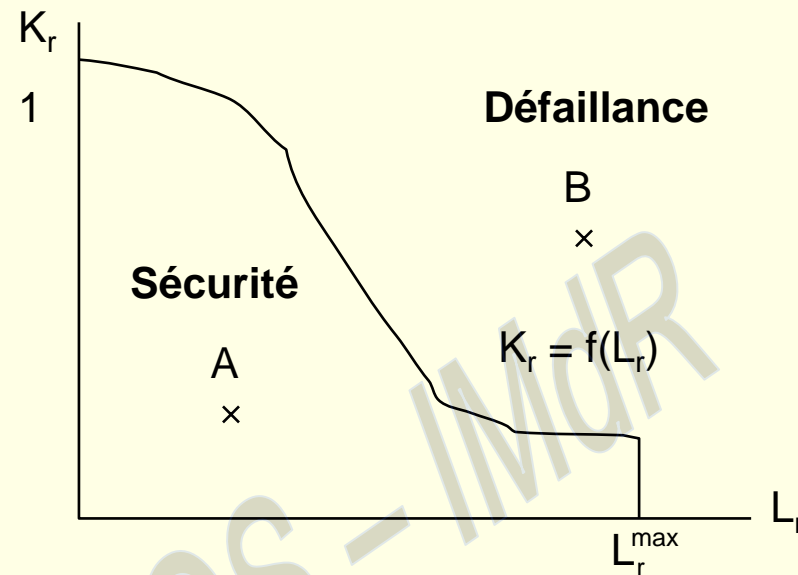


- La règle R6 fournit une méthode d'interpolation entre l'effondrement plastique et la rupture gouvernée par la mécanique linéaire de la rupture

M2OS - IMdR







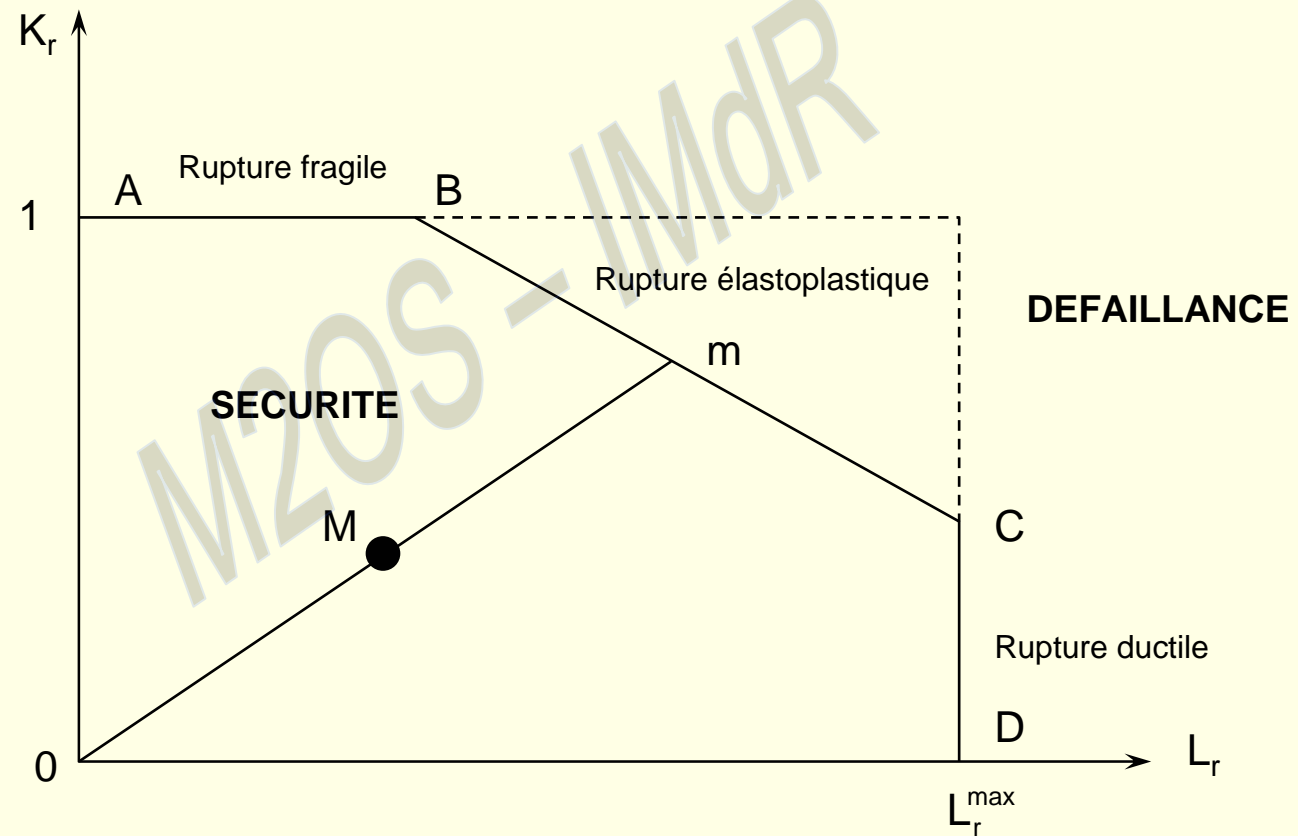
- La combinaison d'une contrainte et d'une taille de défaut donne un point  $(L_r, K_r)$  dans le diagramme :
- ➡ le point A est situé dans la zone de sécurité : la fiabilité de la structure est garantie
  - ➡ le point B est situé dans la zone de défaillance : ruine certaine de la structure



- Première courbe d'interpolation obtenue par Dugdale dans le cas d'une fissure évoluant en contraintes planes dans une plaque infinie d'un matériau élastique parfaitement plastique soumise à une contrainte de traction



## Nocivité de la fissure



- Entre la ruine fragile et la ruine ductile liée aux dépassements des contraintes apparaît la mécanique de la rupture élastoplastique basée sur le calcul de l'intégrale J



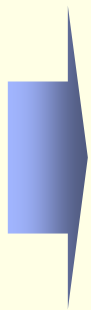
- L'évolution de la règle R6 est liée aux derniers développements de la mécanique de la rupture élastoplastique
- La règle R6, révision 3, propose trois types de courbes d'interpolation  $K_f = f(L_r)$ , entre les deux modes de ruine fragile et ductile



## Option 3

$$\left| \begin{array}{l} K_r = \left( \frac{J_e}{J} \right)^{1/2} \\ K_r = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{pour } L_r \leq L_r^{\max} \\ \text{pour } L_r > L_r^{\max} \end{array}$$

$$J_e = \left( \frac{K_I^2}{\alpha E} \right) \left| \begin{array}{l} \alpha = 1 \text{ en contraintes planes} \\ \alpha = \frac{1}{(1 - \nu^2)} \text{ en déformations planes} \end{array} \right.$$



Construction de la courbe point par point à partir d'une analyse explicite de J par un calcul éléments finis ou par l'obtention de données expérimentales



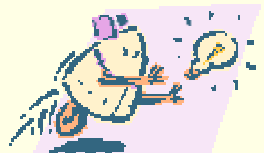
## Option 2

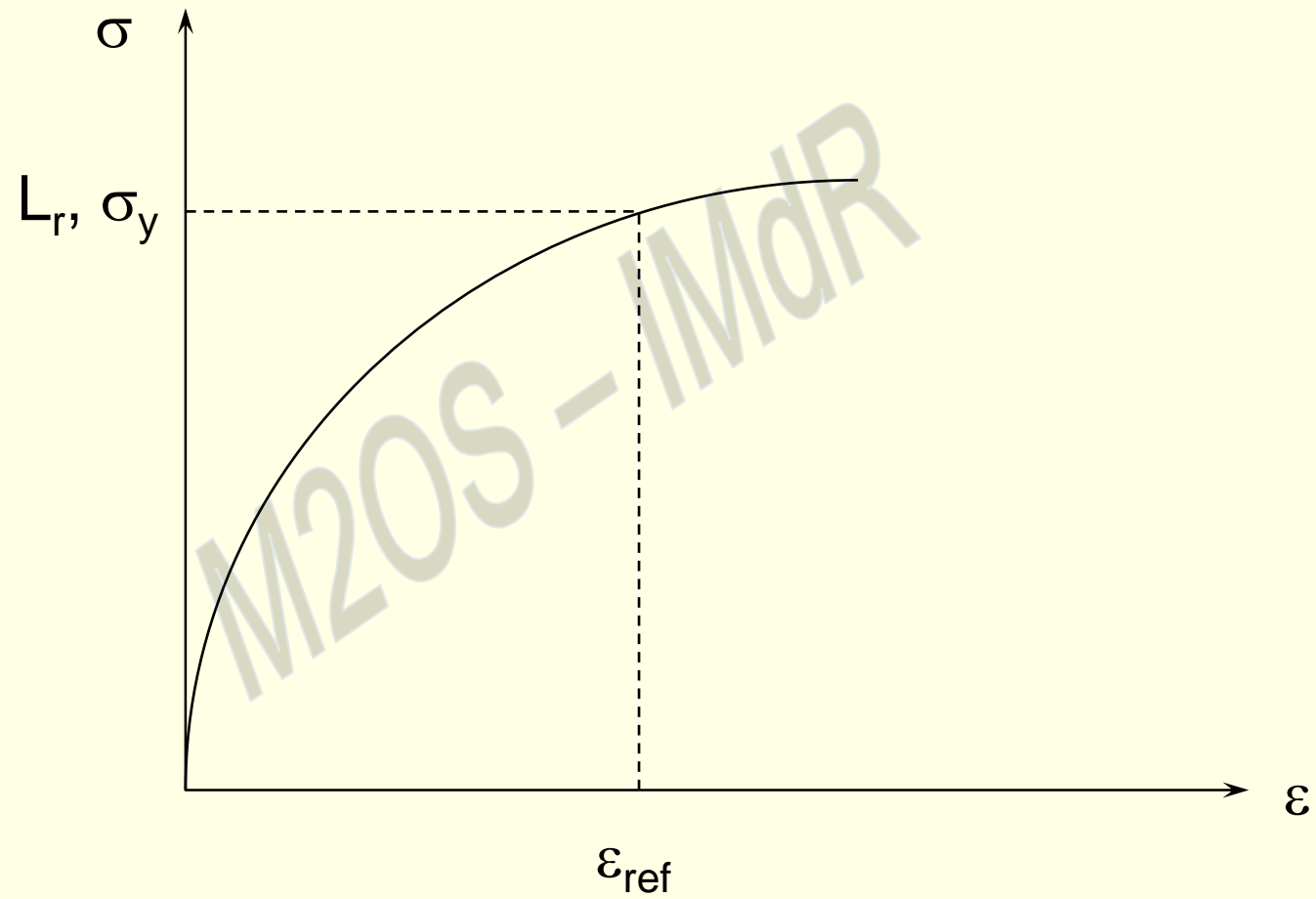
$$\left| \begin{array}{l} K_r = \left( \frac{E \varepsilon_{\text{ref}}}{L_r \sigma_y} + \frac{L_r^3 \sigma_y}{2E \varepsilon_{\text{ref}}} \right)^{1/2} \\ K_r = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{pour } L_r \leq L_r^{\text{max}} \\ \text{pour } L_r > L_r^{\text{max}} \end{array}$$

$\varepsilon_{\text{ref}}$  : déformation pour une contrainte de référence valant  $L_r \sigma_y$

Option basée sur un ensemble de solutions données par l'option 3 pour une gamme de géométrie

Résultats indépendants de la géométrie et du défaut : courbe d'interaction ne dépendant que de la courbe de traction du matériau







## Option 1

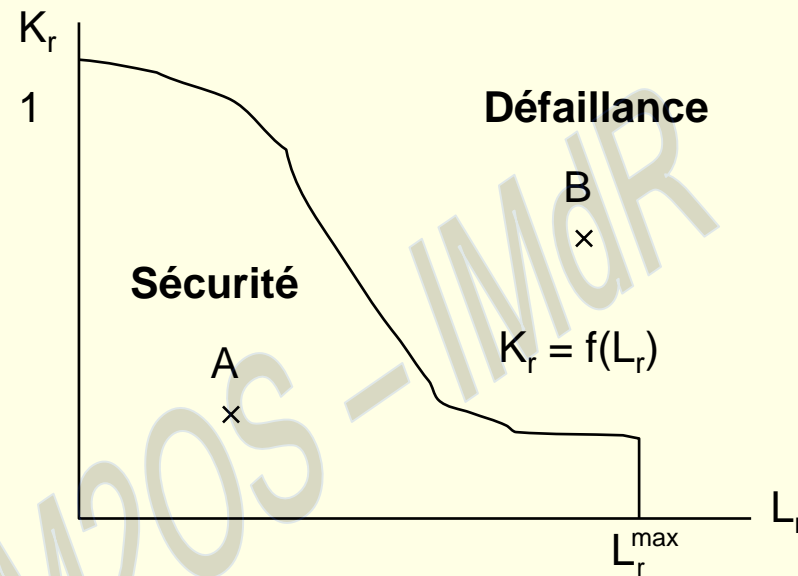
$$\left| \begin{array}{l} K_r = (1 - 0,14 L_r^2)(0,3 + 0,7 \exp(-0,65 L_r^6)) \quad \text{pour } L_r \leq L_r^{\max} \\ K_r = 0 \quad \text{pour } L_r > L_r^{\max} \end{array} \right.$$



Courbe «universelle», déterminée de façon empirique à partir de l'option 2 pour une gamme de matériau : limite inférieure retenue



## Utilisation de la règle R6



→ 2 étapes :

- ➔ 1) créer le diagramme (choisir la courbe d'interaction) : 3 options
- ➔ 2) utiliser le diagramme : placer un point A



## Calcul d'un point sur le diagramme

→ Pour une géométrie et un chargement donnés, on a :

$$L_r = \frac{P}{P_L} = \frac{\sigma_{\text{ref}}}{\sigma_y}$$

$$K_r = \sqrt{\frac{J_e}{J_{\text{mat}}}}$$

avec :

- $\sigma_{\text{ref}}$  : contrainte de référence déterminée par une analyse limite
- $J_e$  : valeur de l'intégrale J en élasticité linéaire
- $J_{\text{mat}}$  : valeur de la ténacité du matériau suivant la catégorie d'analyse retenue



## 3 catégories d'analyse

CATEGORIE	$J_{mat}$
1	Analyse fragile : $K_{IC}$
2	Analyse élastoplastique : $J_{IC}$
3	Analyse élastoplastique avec propagation de la fissure (courbe $J - \Delta a$ )



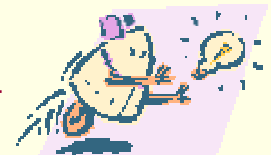
## Résumé

$$L_r = \frac{P}{P_L} = \frac{\sigma_{\text{ref}}}{\sigma_y} \quad - \quad K_r = \sqrt{\frac{J_e}{J_{\text{mat}}}}$$

→ 2 étapes :

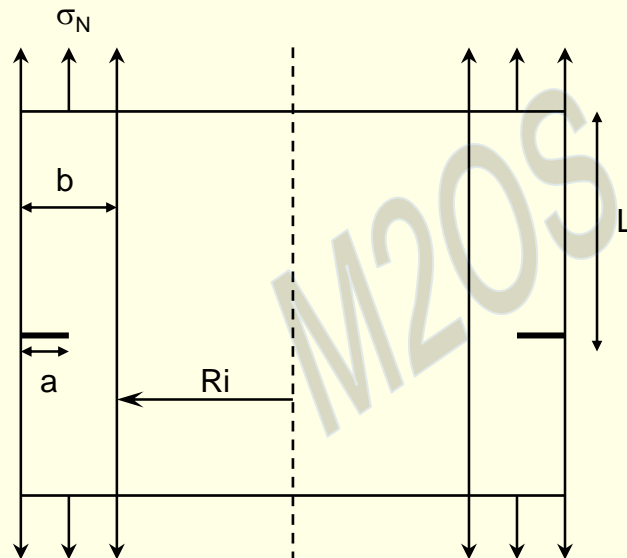
- ➔ 1) créer le diagramme
- ➔ 2) utiliser ce diagramme

	OPTION (diagramme)	CATEGORIE ( $J_{\text{mat}}$ )
1	$K_r = (1 - 0.14 L_r^2)(0.3 + 0.7 \exp(-0.65 L_r^6))$	Analyse fragile : $K_{IC}$
2	$K_r = \left( \frac{E \varepsilon_{\text{ref}}}{L_r \sigma_y} + \frac{L_r^3 \sigma_y}{2E \varepsilon_{\text{ref}}} \right)^{-0.5}$	Analyse élastoplastique : $J_{IC}$
3	$K_r = (J_e/J)^{0.5}$	Analyse élastoplastique avec propagation de la fissure (courbe $J - \Delta a$ )



## Exemple d'application

- Cas d'une tuyauterie avec une fissure circumférentielle externe soumise à une force axiale

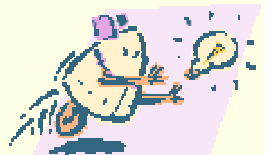


Rayon intérieur :  $R_i = 369$  mm

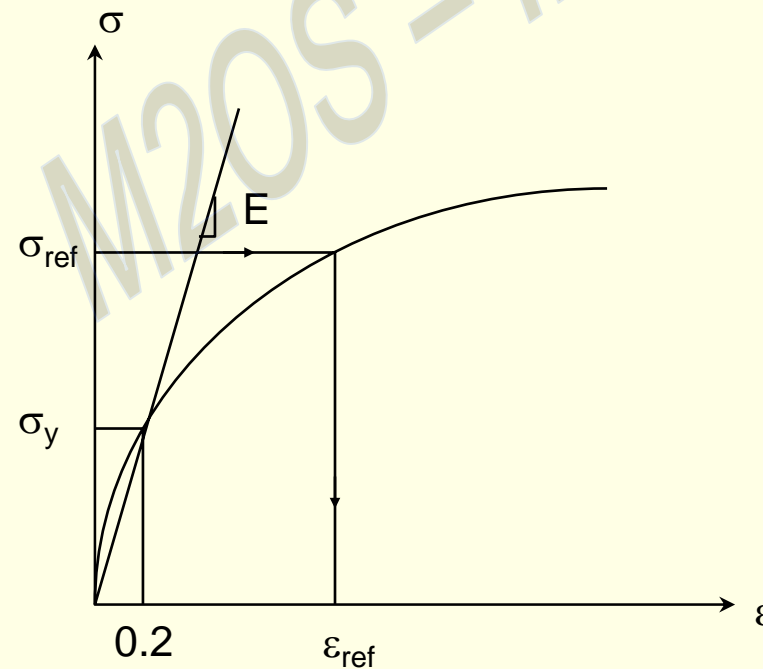
Épaisseur :  $b = 37$  mm

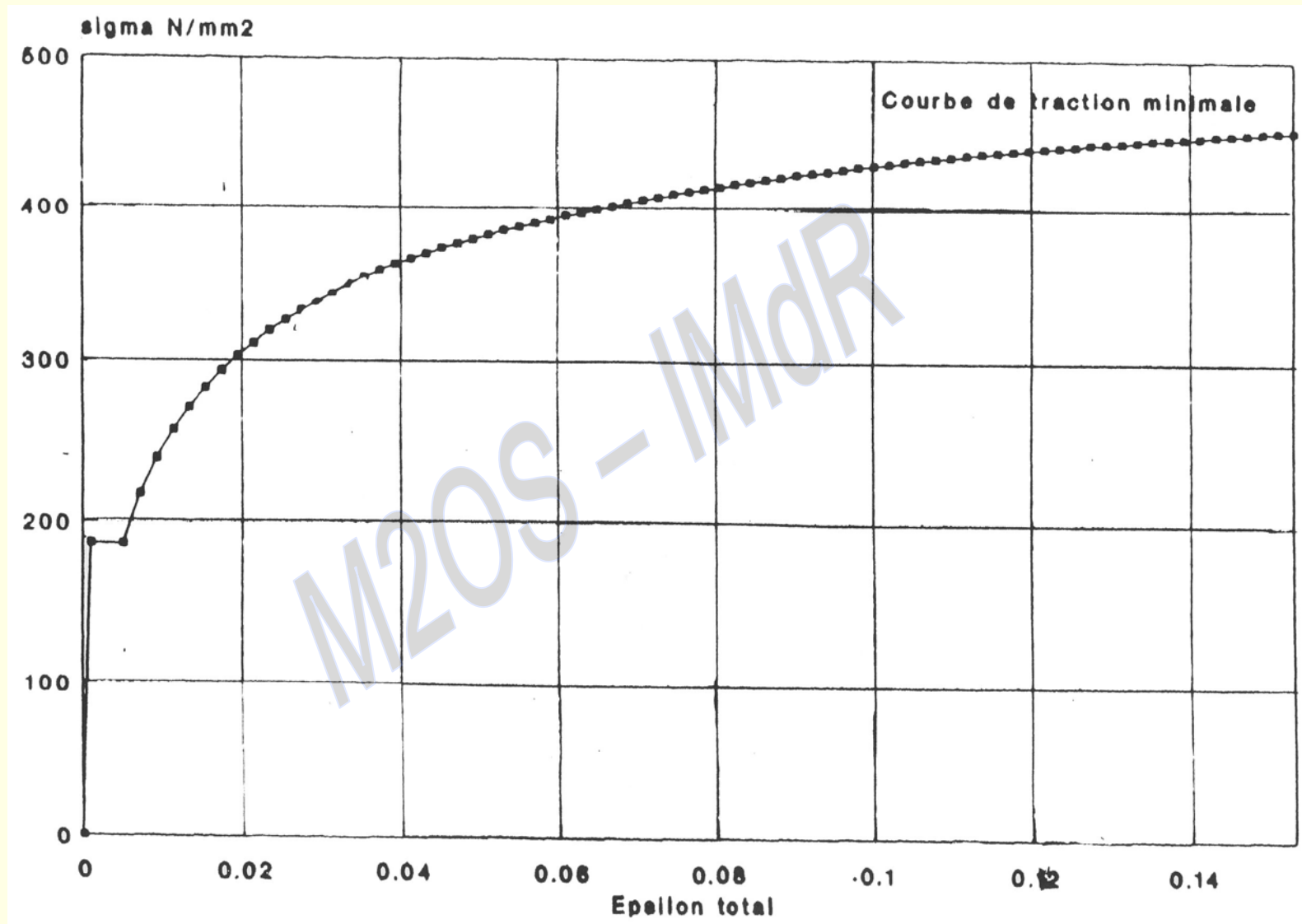
Longueur : 500 mm

Profondeur de la fissure :  $a = 9.25$  mm



- Matériau : acier A48 à la température de 300 °C
- Caractéristiques prises en compte :
  - Module d'Young :  $E = 191500 \text{ Mpa}$
  - Coefficient de Poisson :  $\nu = 0,3$
  - Limite élastique :  $\sigma_e = 186 \text{ MPa}$







## Calcul de $K_r$ et $L_r$

$$L_r = \frac{P}{P_L} = \frac{\sigma_{\text{ref}}}{\sigma_y} \quad - \quad K_r = \sqrt{\frac{J_e}{J_{\text{mat}}}}$$

$$J_e = (K_1^2 / E)$$

→ Formulaire pour obtenir  $K_1$  et  $\sigma_{\text{ref}}$

$K_1 = F_1 \sigma_N \sqrt{\pi a}$	$F_1 = \frac{5}{\sqrt{20 - 13(a/b) - 7(a/b)^2}}$
$\sigma_{\text{ref}} = F_2 \sigma_N$	$F_2 = \frac{b}{(b - a)}$

→  $J_{\text{mat}} = J_{\text{IC}}$  (catégorie 2)

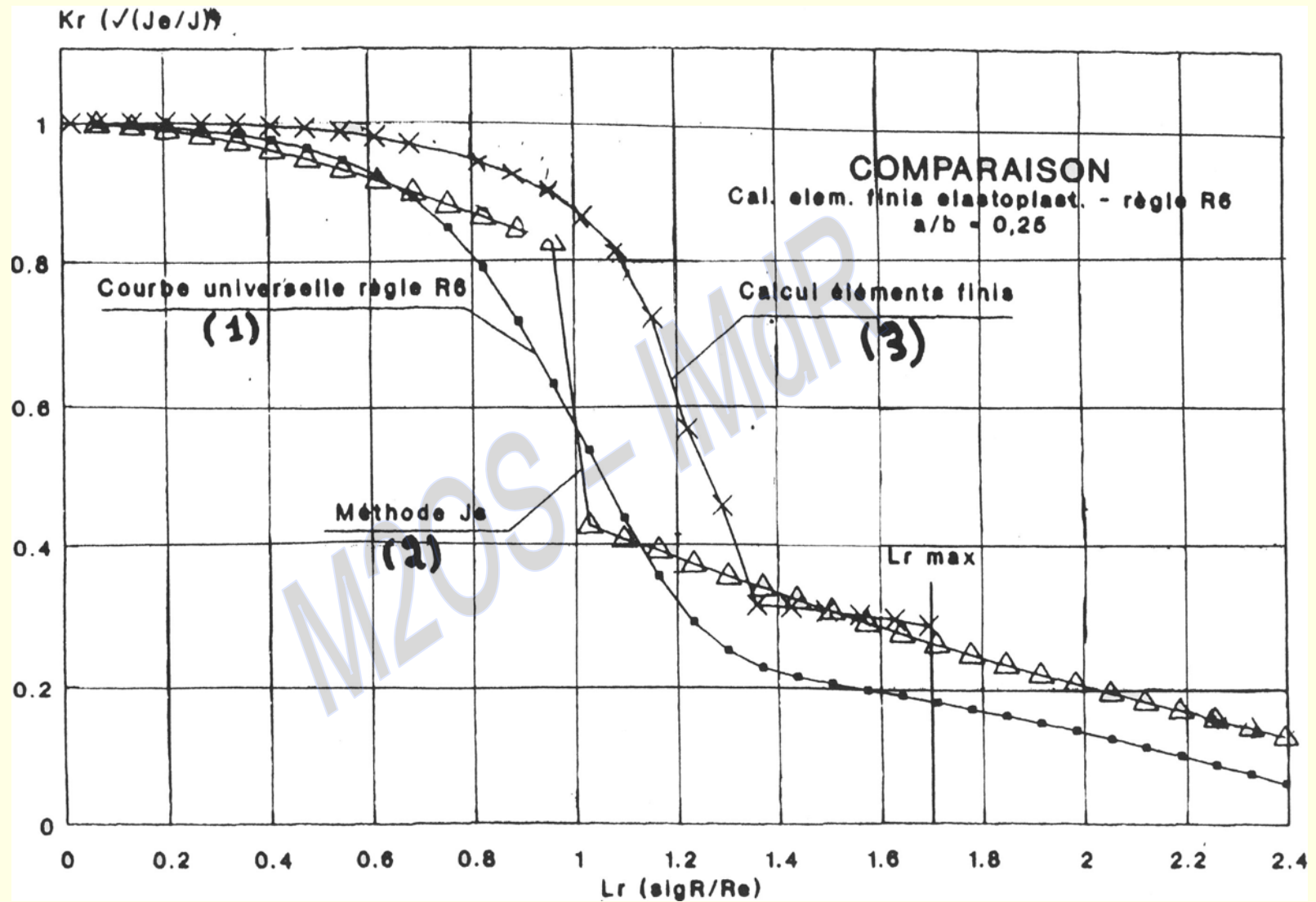


## Choix du diagramme

Option 1, 2 ou 3

M2OS - IMdR





## Conclusion

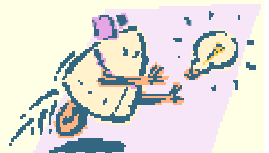
- **Règle R6** : interaction entre deux modes de rupture distincts :
  - la rupture fragile
  - la rupture ductile
- Méthode rapide et simple à mettre en œuvre pour évaluer la nocivité des défauts dans une structure



## Méthode pratique de calcul de J

- L'analyse de la nocivité des fissures repose sur le critère J lorsque des déformations plastiques apparaissent
- Plusieurs méthodes sont proposées dans l'industrie nucléaire :
  - ⇒ annexe ZG du RCC-M
  - ⇒ annexe A16 du RCC-MR
  - ⇒ règle anglaise R6
- Ces méthodes sont basées sur une estimation simplifiée de l'intégrale J

**RCC-M** : règles de conception et de construction des appareils mécaniques des îlots nucléaires PWR



## Mécanique de la rupture linéaire et non linéaire

On distingue 3 catégories d'analyse suivant la taille de la zone plastique en tête de fissure :

→ **1) Pas de plasticité :**

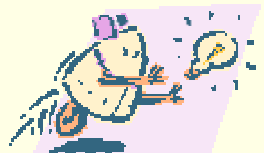
Rupture fragile  $\Rightarrow$  mécanique de la rupture linéaire - calcul de  $K_I$

→ **2) Plasticité confinée :**

- Détermination de l'étendue de la zone plastique
- Correction de la longueur de la fissure et application de la mécanique linéaire de la rupture

→ **3) Plasticité étendue :**

Mécanique de la rupture non linéaire (ou élastoplastique)  $\Rightarrow$  calcul de l'intégrale  $J$



→ **Annexe ZG du RCC-M**

Estimation de  $J$  pour une zone plastique confinée

→ **Annexe A16 du RCC-MR**

Méthode simplifiée du calcul de  $J$  dans tous les cas de figures : méthode  $J_S$



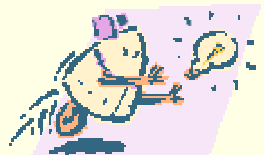
## Méthode d'estimation simplifiée de J

**Principe** : partir de la solution élastique et corriger par l'adjonction ou la multiplication d'un facteur correctif

→ 1981 : 1<sup>er</sup> développement - EPRI  
(Electric Power Center Research)

$$J = J_{\text{élastique}} + J_{\text{plastique}}$$

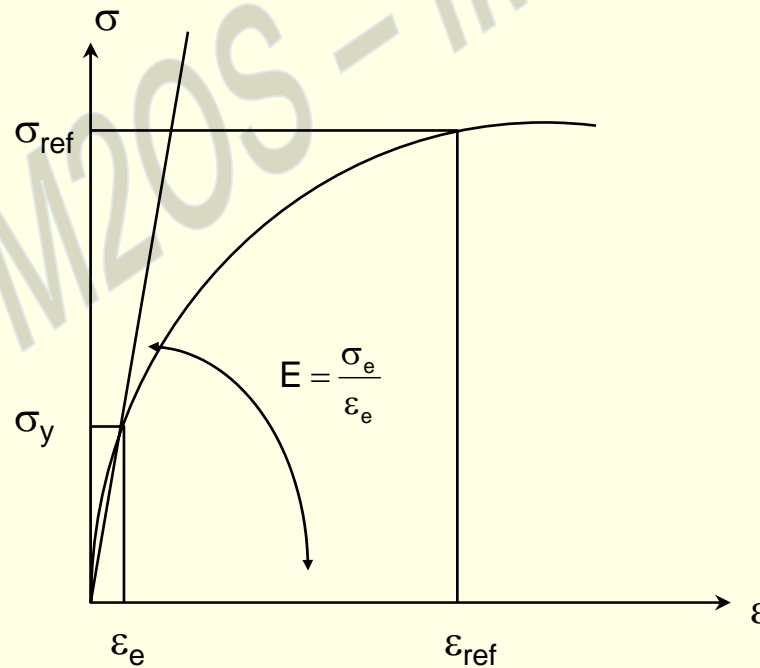
→ ***Erreurs importantes sur le calcul de J dues à la modélisation de Ramberg-Osgood***





## Modélisation de Ramberg-Osgood

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_e} = \frac{\sigma}{\sigma_e} + \alpha \left[ \frac{\sigma}{\sigma_e} \right]^n \quad \sigma > \sigma_e$$



- 1984 : Travaux d'Ainsworth : améliorer le calcul simplifié de J de l'EPRI en utilisant directement la courbe de traction réelle du matériau (point par point)



Introduction de la contrainte de référence  $\sigma_{ref}$



Ainsworth :

$$\left| \begin{array}{l} J = J_{\text{élastique}^*} + J_{\text{plastique}} \\ J_{\text{élastique}^*} = J_{\text{élastique}} (1 + \varphi) \end{array} \right.$$

$(1 + \varphi)$  : correction plastique

$$J = J_e \left( \varphi + \frac{E \varepsilon_{\text{ref}}}{\sigma_{\text{ref}}} \right) \quad \text{et } \varphi \geq 1$$

Ainsworth :

$$\varphi = \frac{\sigma_{\text{ref}}^2}{\sigma_{\text{ref}}^2 + \sigma_y^2}$$

Règle R6 :

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\text{ref}}^3}{E \varepsilon_{\text{ref}} + \sigma_y^2}$$



## Méthode $J_S$

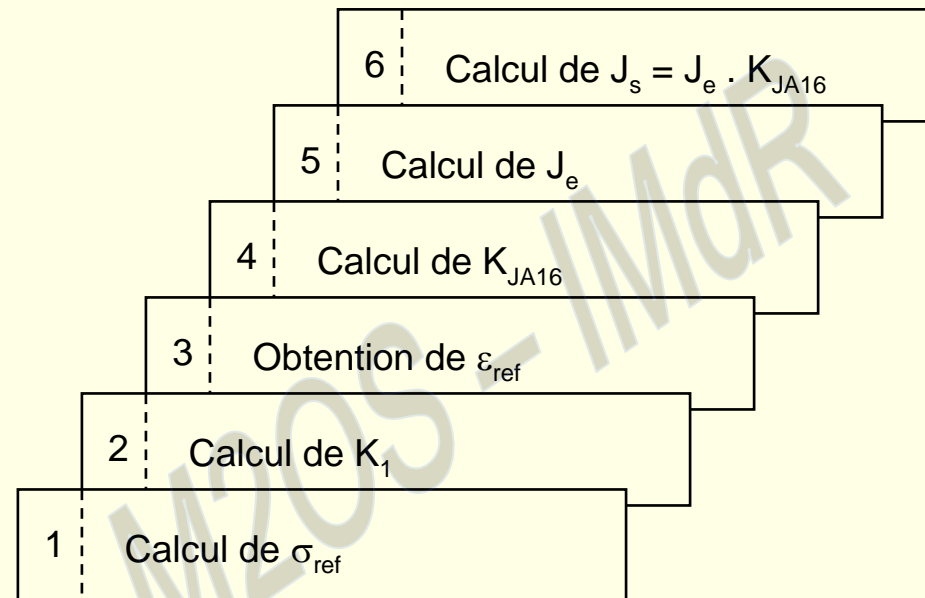
$$J = J_S = J_e \left( \varphi + \frac{E \varepsilon_{\text{ref}}}{\sigma_{\text{ref}}} \right)$$

→ On calcule la valeur élastique de  $J$ ,  $J_e$ , que l'on corrige par un facteur d'amplification plastique :

$$\varphi + \frac{E \varepsilon_{\text{ref}}}{\sigma_{\text{ref}}}$$



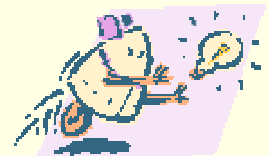
## Démarche

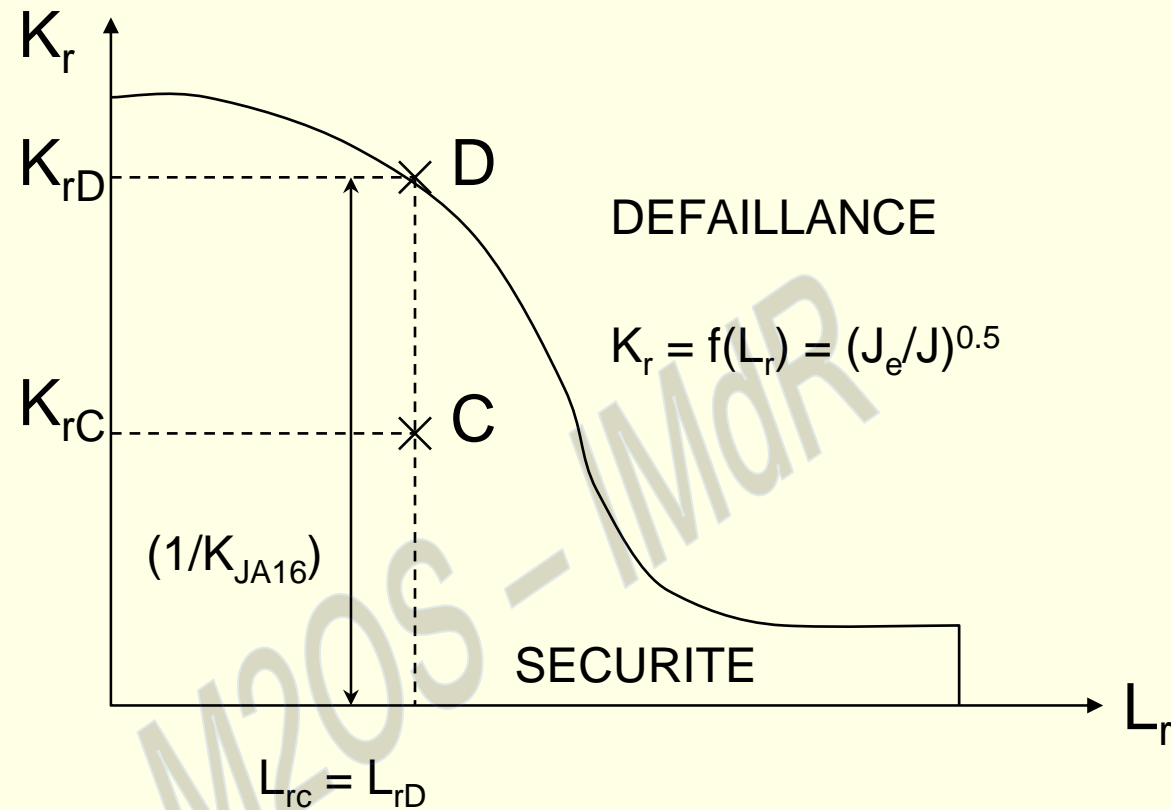


$\sigma_{\text{ref}}$  : contrainte de référence

$K_1$  : facteur d'intensité des contraintes

$K_{\text{JA16}}$  : correction plastique  $K_{\text{JA16}} = E \frac{\varepsilon_{\text{ref}}}{\sigma_{\text{ref}}} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\text{ref}}^2}{\sigma_{\text{ref}}^2 + \sigma_e^2}$  et  $J_e = \frac{K_1^2}{E^*}$





$$C(L_{rc}, K_{rc}) = \left( \frac{\sigma_{ref}}{\sigma_y}, \sqrt{\frac{J_e}{J_{IC}}} \right)$$

Le point C se situe dans le domaine de sécurité



$$(i) \quad \sqrt{\frac{J_e}{J_{IC}}} < f(Lr_D)$$

$$(i) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{J_e}{J_{IC}}} < \sqrt{\frac{J_e}{J}}$$

$$(i) \Leftrightarrow J < J_{IC}$$

avec  $J = J_s = K_{JA16} \cdot J_e$

Utiliser le diagramme R6 revient à évaluer l'intégrale  $J$   
par la méthode  $J_s$



## Conclusion

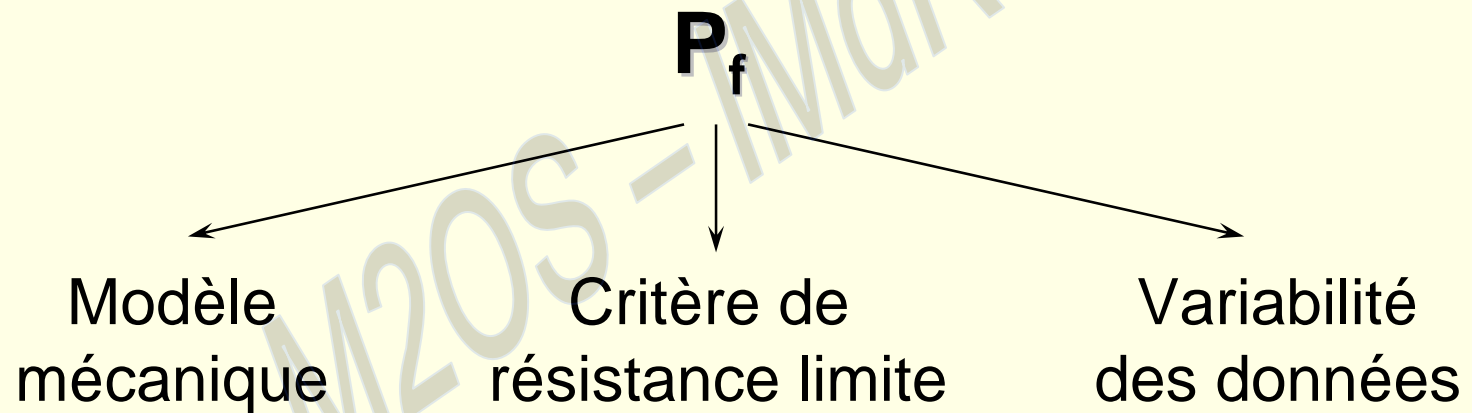
- Le diagramme de la règle R6, option 2, est une courbe donnant le terme de correction plastique à partir d'un calcul de contrainte de référence
- En fait, cette règle présente de façon simple et graphique le calcul de  $J$





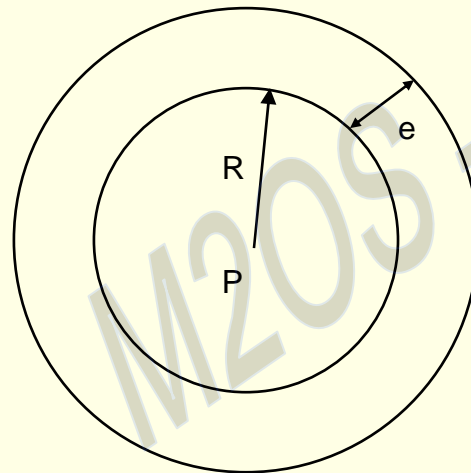
## Couplage mécano-fiabiliste

→  $P_f = \text{Prob} (G(Z) < 0)$



## Exemple

### Réservoir sous pression



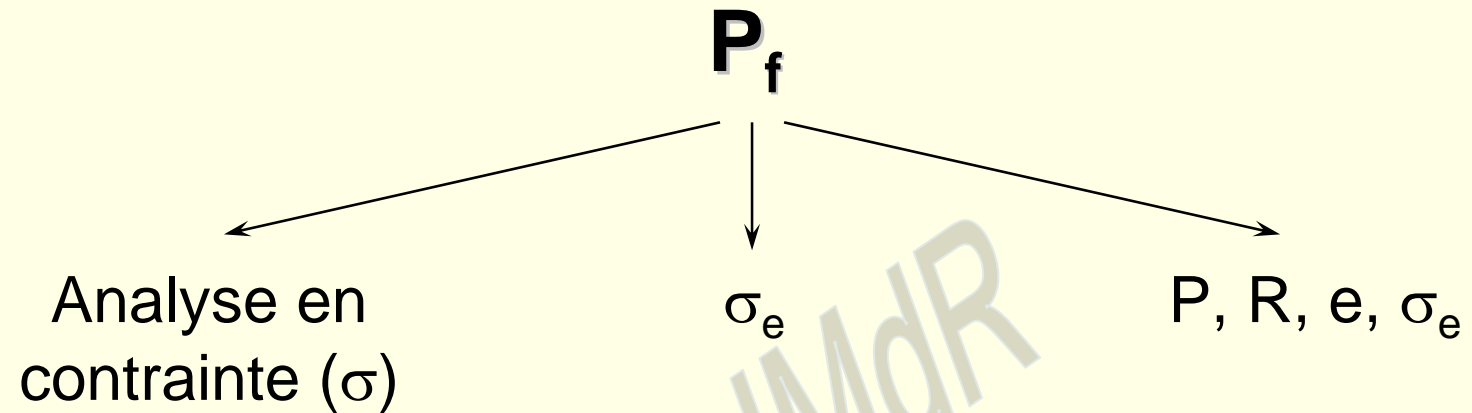
R : rayon interne de 18 mm

e : épaisseur de 3 mm

P : pression interne

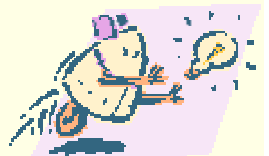
$$\sigma = \frac{PR}{2e}$$



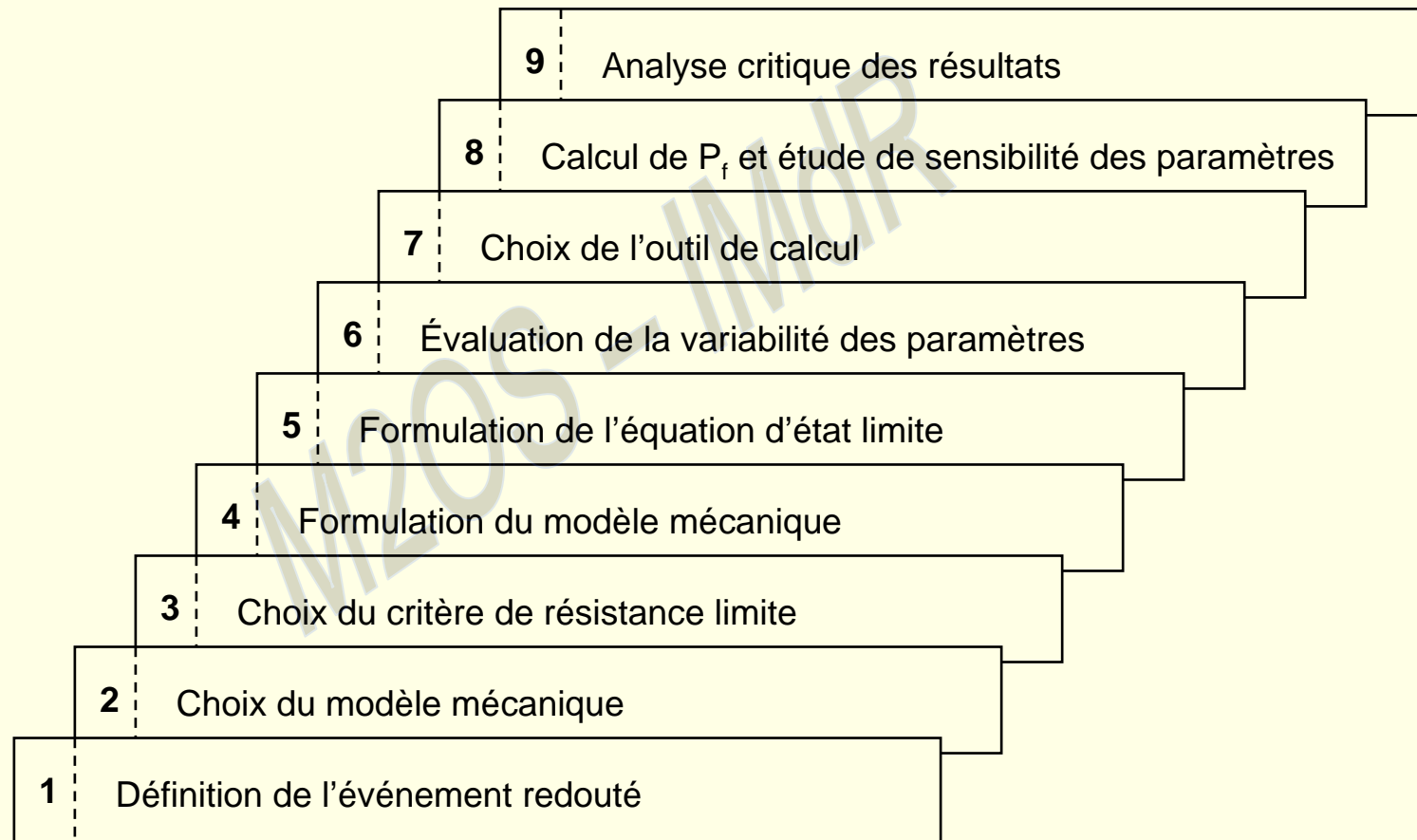


$$G(\sigma_e, P, R, e) = \sigma_e - \frac{PR}{2e}$$

$$P_f = \text{Prob} \left( \sigma_e < \frac{PR}{2e} \right)$$



## Démarche probabiliste



## Références

### → Probabilités - Statistique

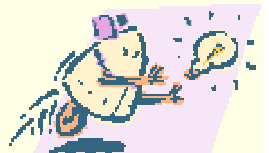
- ⇒ BOULEAU N., *Probabilités de l'ingénieur*, Hermann, 1986
- ⇒ SAPORTA G., *Probabilités, Analyse des données et Statistique*, Édition Technip, 1990

### → Fiabilité mécanique

- ⇒ DITLEVSEN O., MADSEN H.O., *Structural Reliability Methods*, John Wiley & Sons, 1996
- ⇒ PROCACCIA H., MORILHAT P., *Fiabilité des structures des installations industrielles*, Edition Eyrolles, 1996
- ⇒ LEMAIRE M., *Sécurité probabiliste des structures*, Collège de Polytechnique, Décembre 1994
- ⇒ FOURNIER C., *Dimensionnement probabiliste des structures : application aux enceintes sous pression*, Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal - Clermont II, 1997

### → Mécanique

- ⇒ RECHO N., *Rupture par fissuration des structures*, Hermès, 1995
- ⇒ FRANCOIS D., PINEAU A., ZAOUÏ A., *Élasticité et plasticité*, Hermès, 1992



## 5. EXEMPLES



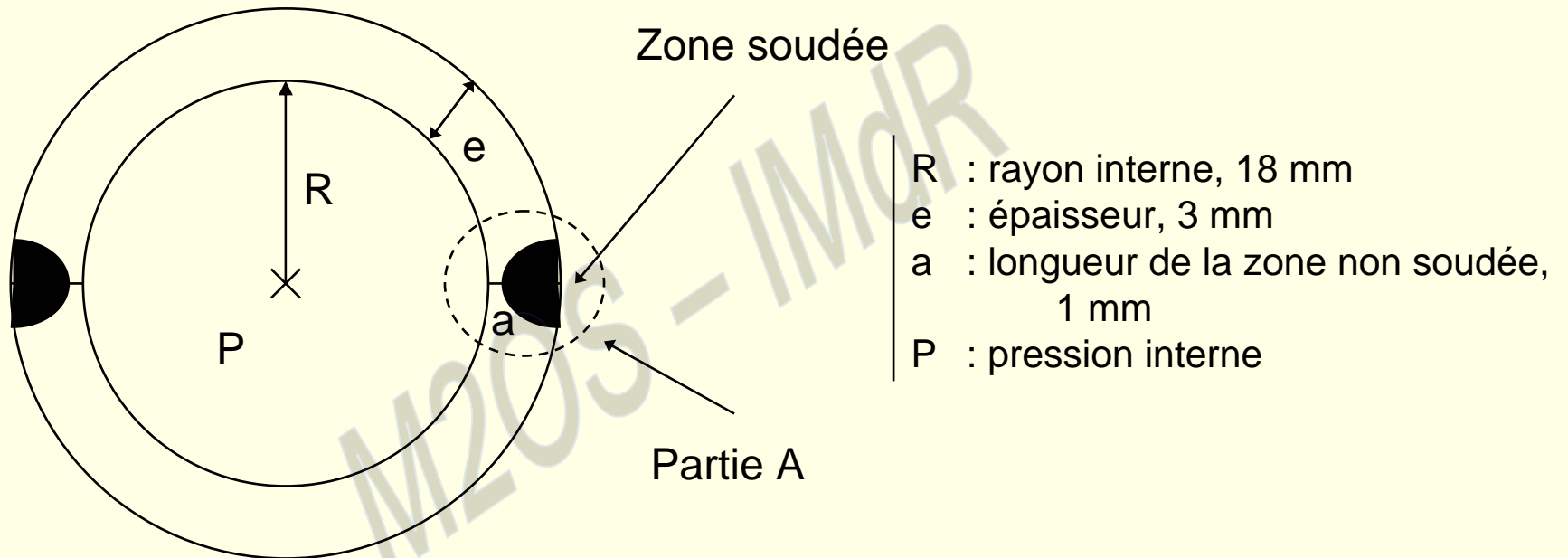
## Application sur un enceinte sous pression

### → But :

Dimensionner une enceinte sous pression interne par une démarche déterministe et probabiliste puis comparer les résultats en terme de pression admissible



## Géométrie et caractéristiques matériau



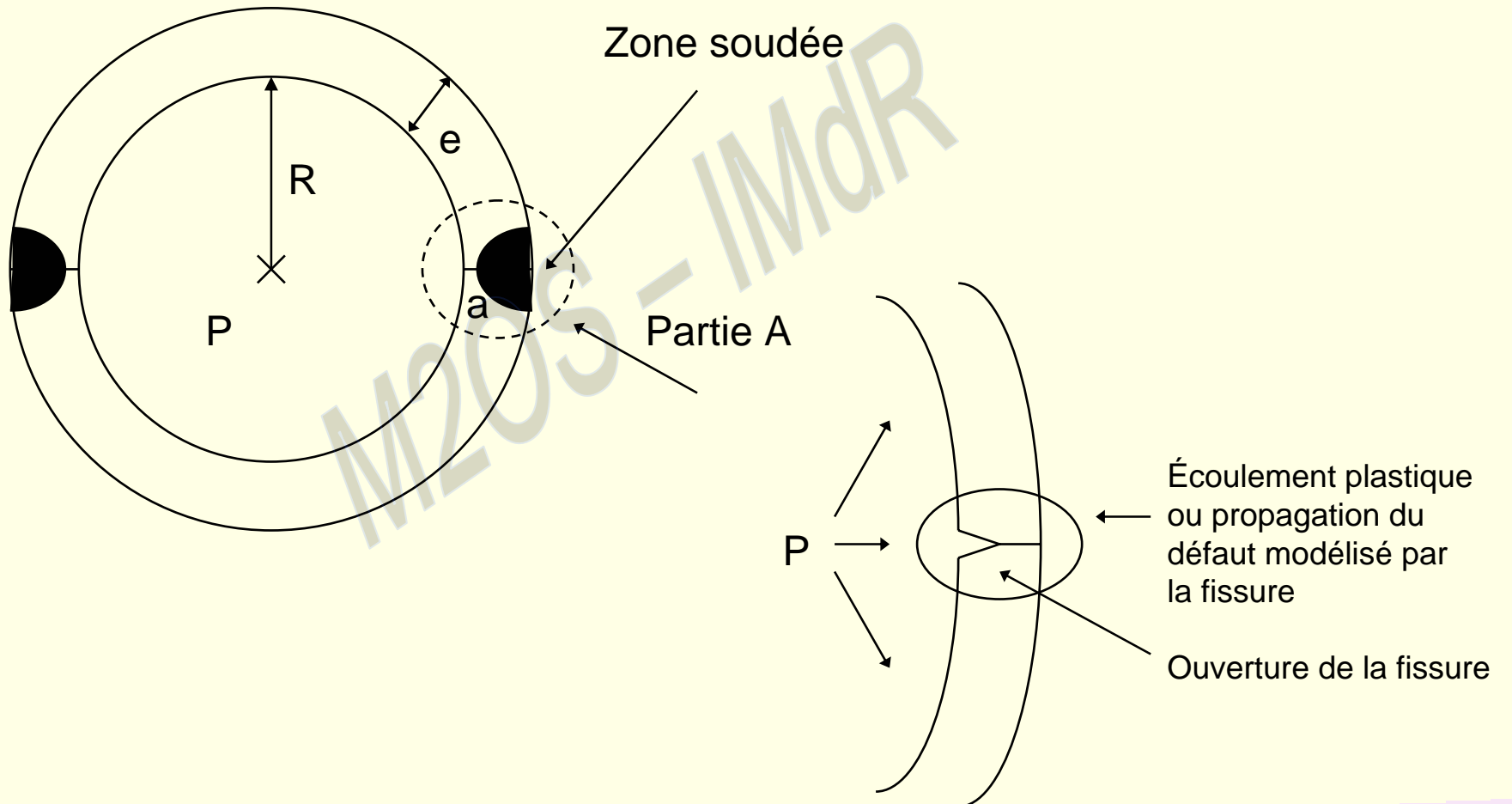
Matériau : alliage d'aluminium AZ5G

$\sigma_e$  : 342 Mpa (valeurs moyennes)  
 $\sigma_u$  : 407 MPa





## Modèles mécaniques associés



## Dimensionnement déterministe

Adoption d'un coefficient de sécurité global  $\gamma = 3$  par rapport à la rupture

→ **But** : Trouver  $P$  telle que :  $P = \min(P_1, P_2)$

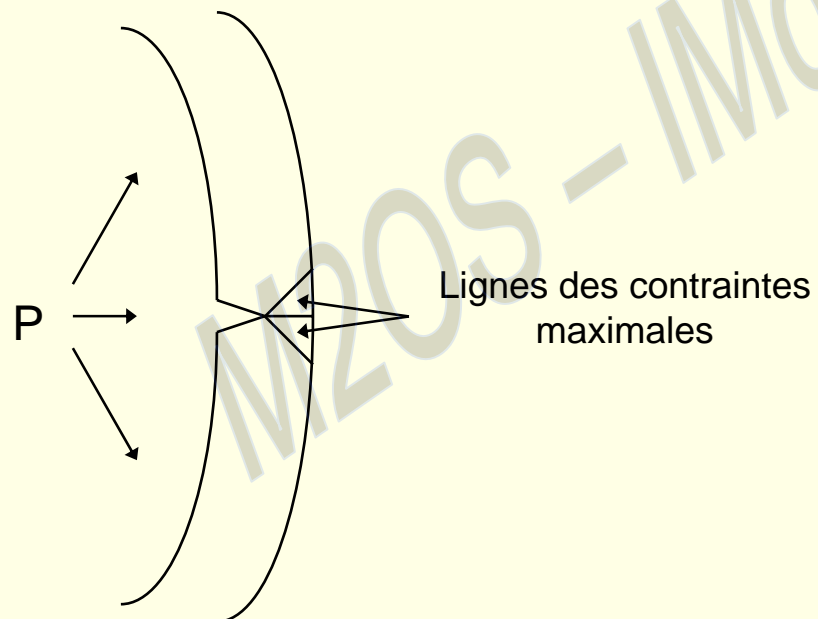
$P_1$  : pression autorisée par rapport à l'écoulement plastique

$P_2$  : pression autorisée par rapport à la propagation d'un défaut



## Écoulement plastique

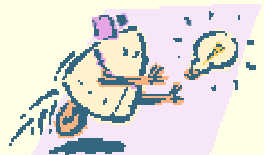
- Calcul d'une contrainte moyenne  $\sigma_{\text{moy}}$  dans l'épaisseur suivant la ligne la plus sollicitée



$$\sigma_{\text{moy}} = \frac{\sigma_u}{3}$$

$$\sigma_u = 407 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{moy}} = 136 \text{ MPa}$$



## Propagation d'un défaut

→ Calcul de l'intégrale J par éléments finis

$$J = \frac{J_{IC}}{3}$$

$$J_{IC} = 8000 \text{ J/m}^2$$

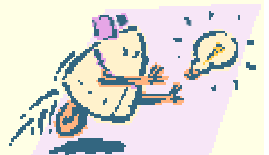
$$J = 2666 \text{ J/m}^2$$



## Résultats

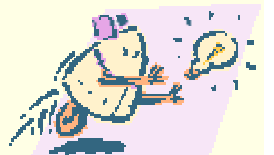
<b>Mode de défaillance</b>	<b>Pression admissible autorisée</b>
Ecoulement plastique	33
Propagation d'un défaut	45

$$P = 33 \text{ MPa}$$



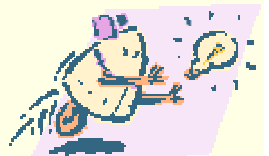
## Démarche déterministe

1	Dimensions géométriques nominales	Détermination du rayon interne R, de l'épaisseur e, de la longueur de la zone non soudée a
2	Calcul par éléments finis de la contrainte et de l'intégrale J	Calcul de la contrainte équivalente de Von Mises et de l'intégrale J en linéaire et non linéaire
3	Critère retenu	Moyenne des contraintes de Von Mises dans l'épaisseur sur la ligne la plus contrainte ; calcul de J par une intégrale de contour
4	Coefficient de sécurité moyen $\gamma$	Écoulement plastique : $\gamma = \sigma_u / \sigma_{moy} = 3$ Propagation d'un défaut : $\gamma = J_{IC} / J = 3$
5	Retour d'expériences	Tout à fait satisfaisant ...



## Démarche probabiliste

	ETAPES DE LA DEMARCHE	CAS DU RESERVOIR SOUS PRESSION	
1	Définition de l'événement redouté	Fuite ou rupture par écoulement plastique ou propagation d'un défaut	
2	Choix du modèle mécanique	Expression de la contrainte $\sigma$ dans la partie soudée	Expression de l'intégrale J dans la partie soudée
3	Choix du critère de résistance limite	$\sigma_e$	$J_{IC}$
4	Formulation du modèle mécanique	$\sigma_{ref}$	$J_s$
5	Formulation de l'équation d'état limite	$G(\sigma_e, \sigma_{ref}) = \sigma_e - \sigma_{ref}$	$G(J_{IC}, J_s) = J_{IC} - J_s$
6	Estimation de la variabilité des paramètres	$\sigma_e, R, e$ : lois normales $P, a$ : lois uniformes	$J_{IC}, R, e$ : lois normales $P, a$ : lois uniformes
7	Choix de l'outil de calcul probabiliste	Méthodes FORM/SORM Logiciel COMREL	
8	Calcul de $P_f$	$Pr = \text{Prob} [(\sigma_e \leq \sigma_{ref}) \cup (J_{IC} \leq J_s)]$	
9	Analyse critique des résultats		



## Formulation du modèle mécanique

→ Écoulement plastique : analyse en terme de contrainte :

$\sigma_{\text{ref}}$

$$\sigma_{\text{ref}} = \frac{PR}{2(e - a)}$$

→ Propagation d'un défaut : analyse en terme d'intégrale

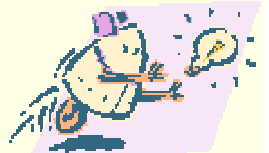
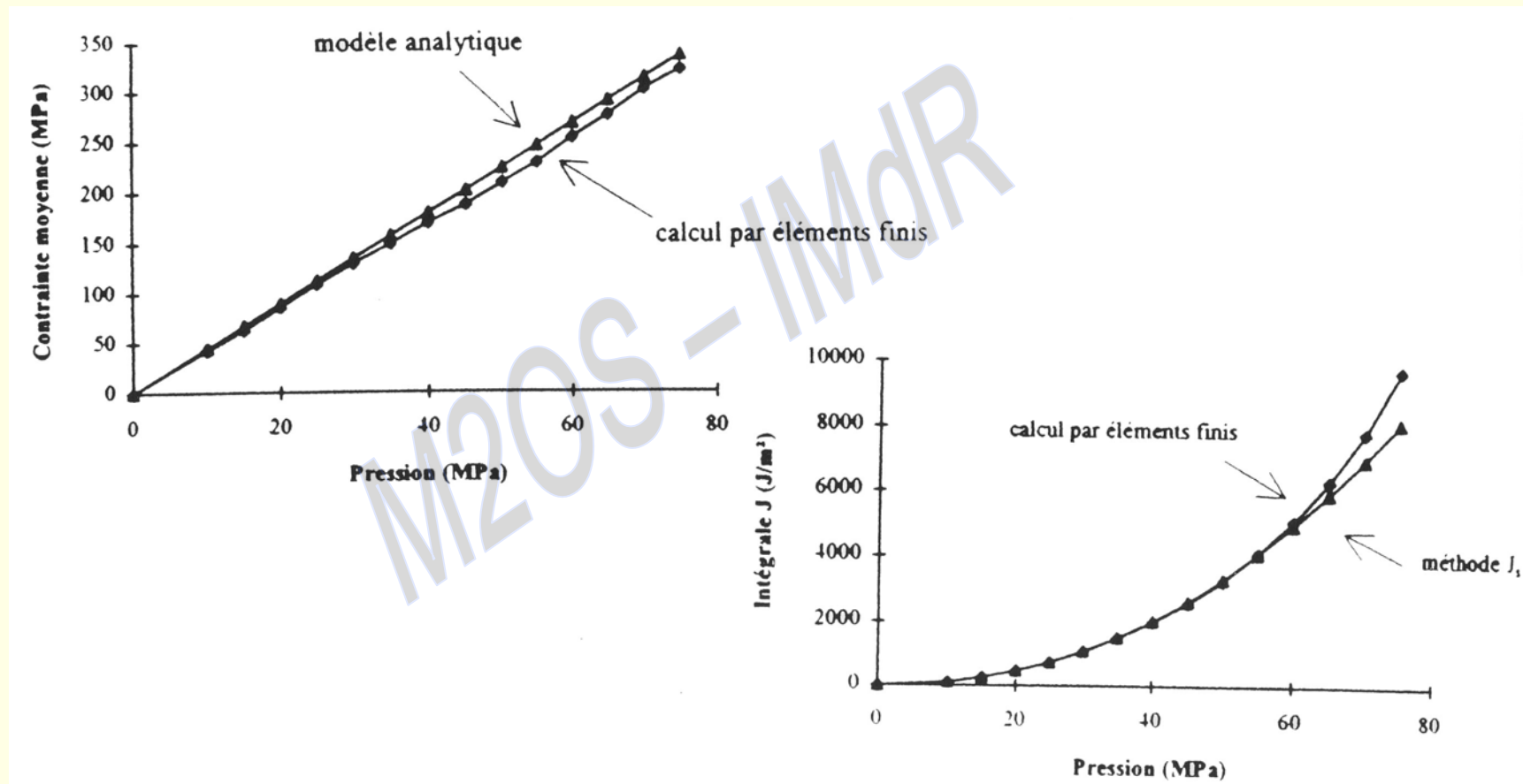
J :  $J_s$

$$J_s = \frac{K_I^2 (1 - \nu^2)}{E} \left( E \frac{\varepsilon_{\text{ref}}}{\sigma_{\text{ref}}} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\text{ref}}^2}{\sigma_{\text{ref}}^2 + \sigma_e^2} \right)$$





## Comparaison avec les calculs par éléments finis



## Évaluation de la variabilité des paramètres

Paramètre	Lois de distribution	Paramètres de ces lois	Coefficients de variation (en %) $C = \sigma/\mu$
$\sigma_e$ (Mpa)	Normale : N	N(342 ; 25.3)	7,4
$J_{IC}$ (J/m <sup>2</sup> )	Normale : N	N(8000 ; 1100)	13,75)
P (Mpa)	Uniforme : Unif	Unif [ $P_{min}$ ; $P_{max}$ ]	
R (mm)	Normale : N	N(18 ; 0,032)	0,18
e (mm)	Normale : N	N(3 ; 0,006)	0,2
a (mm)	Uniforme : Unif	Unif [0,8 ; 1,2]	11,55
E (Mpa)		69000	
$\nu$		0,3	

$$P_{moy} = \frac{P_{min} + P_{max}}{2}$$



## Calcul de $P_f$ et étude de sensibilité des paramètres

Objectif de fiabilité :  $P_f = 10^{-7}$

→ **But :**

Trouver la pression  $P$  telle que :

$$P_f = \text{Prob}(A \cup B) = \text{Prob}(A) + \text{Prob}(B) - \text{Prob}(A \cap B) = 10^{-7}$$

A :  
Écoulement  
plastique



B :  
Propagation d'un  
défaut



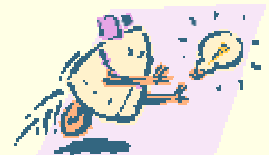
## Calcul de $P_f$

Scénario de défaillance	Probabilité à évaluer	Pression admissible (Mpaà)	$P_f$
Ecoulement plastique	Prob ( $\sigma_e < \sigma_{ref}$ )	Unif [37,05 ; 40,95]	<b>FORM</b> : $P_f = 0,14 \times 10^{-10}$ <b>SORM</b> : $P_f = 5,9 \times 10^{-10}$
Propagation d'un défaut	Prob ( $J_{IC} < J_s$ )	Unif [37,05 ; 40,95]	<b>FORM</b> : $P_f = 1,97 \times 10^{-7}$ <b>SORM</b> : $P_f = 1,02 \times 10^{-7}$



$$P_f = \text{Prob}(A \cup B) \cong \text{Prob}(B) = 10^{-7}$$

$P = 39 \text{ MPa}$

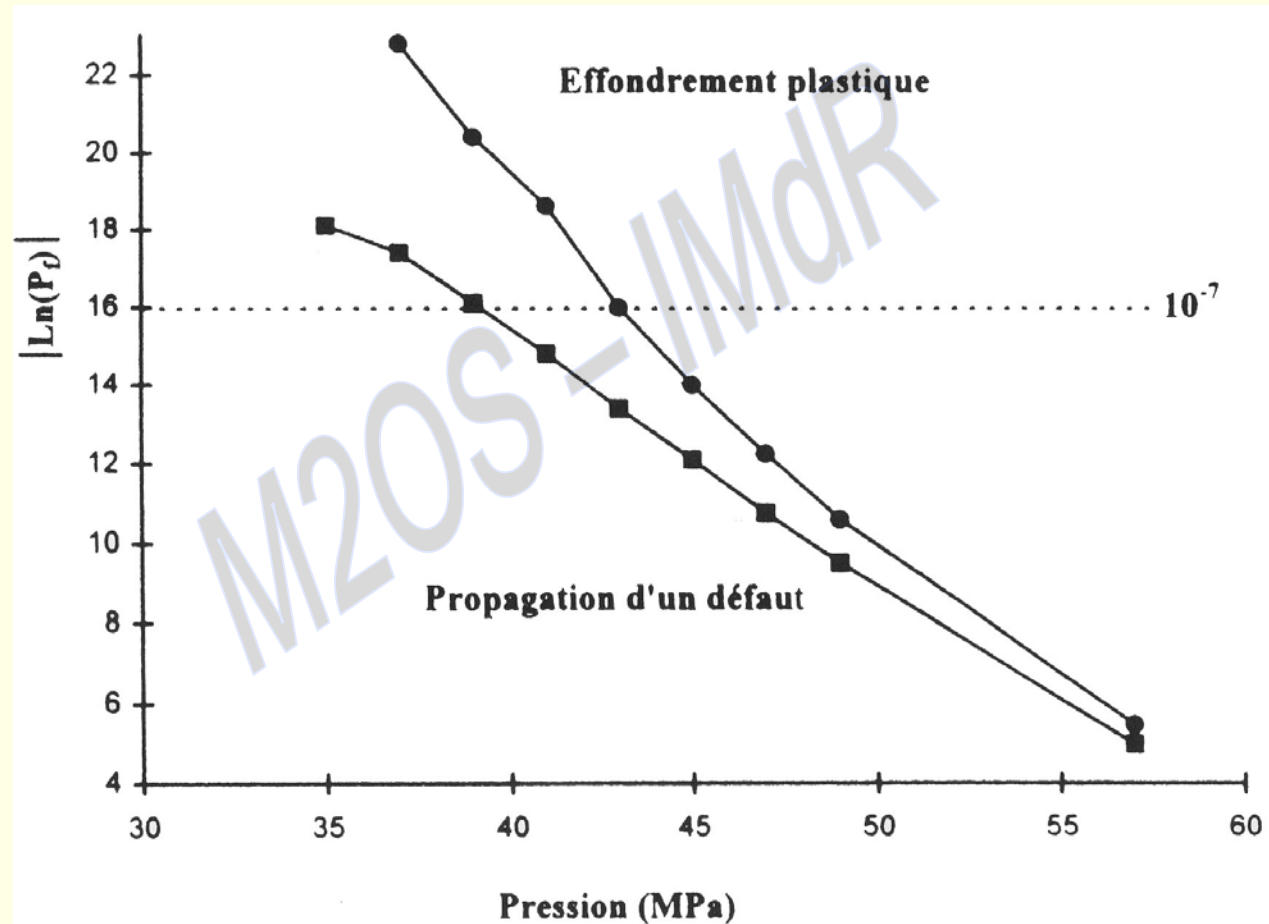


## Coefficients partiels de sécurité

Variables	Coordonnées du point P*	Valeurs moyennes	Coefficients partiels de sécurité
$J_{IC}$	2657,52	8000	3,01
a	1,1577	1	1,158
P	40,0631	39	1,027
$\sigma_e$	338,293	342	1.01
e	2,99996	3	1
R	18,0001	18	1



## Évolution de $P_f$ en fonction de $P_{\text{moy}}$



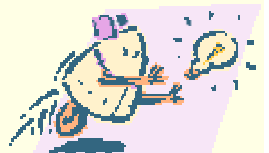
## Comparaison des approches déterministe et probabiliste

	Pression moyenne (Mpa)	Probabilité de défaillance $P_f$	Coefficient de sécurité $\gamma$ par rapport à $\sigma_u$
Dimensionnement déterministe	33	$10^{-9}$	3
Dimensionnement probabiliste	39	$10^{-7}$	2,6

→ Conservatisme de la démarche déterministe

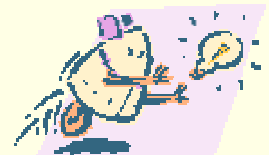
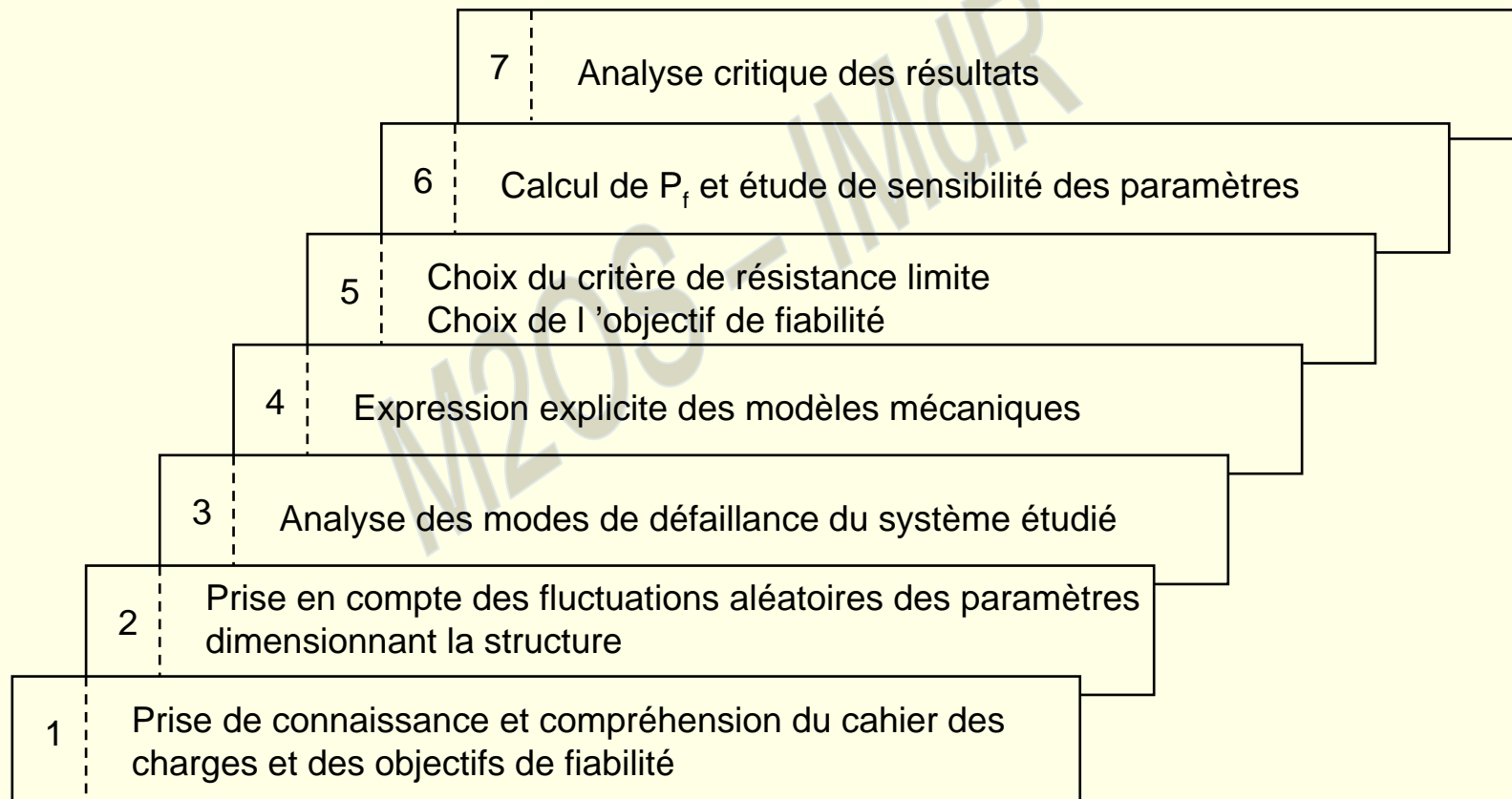
→ Lien entre  $\gamma$  et  $P_f$

→ Pression supérieure à 20% : risque 100 plus élevé

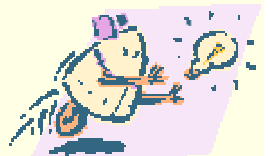
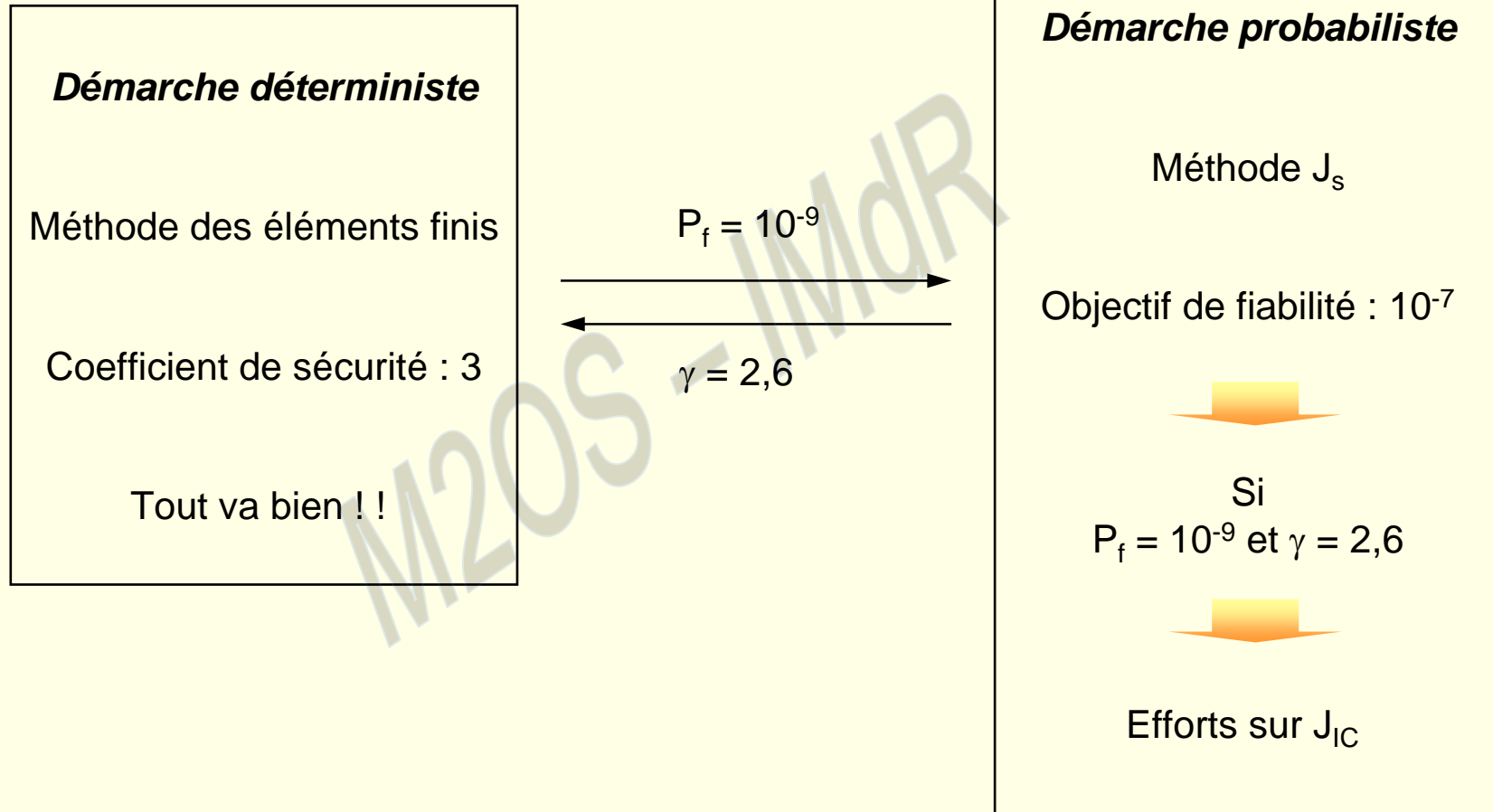


## Conclusion

→ Sur le plan de la méthode







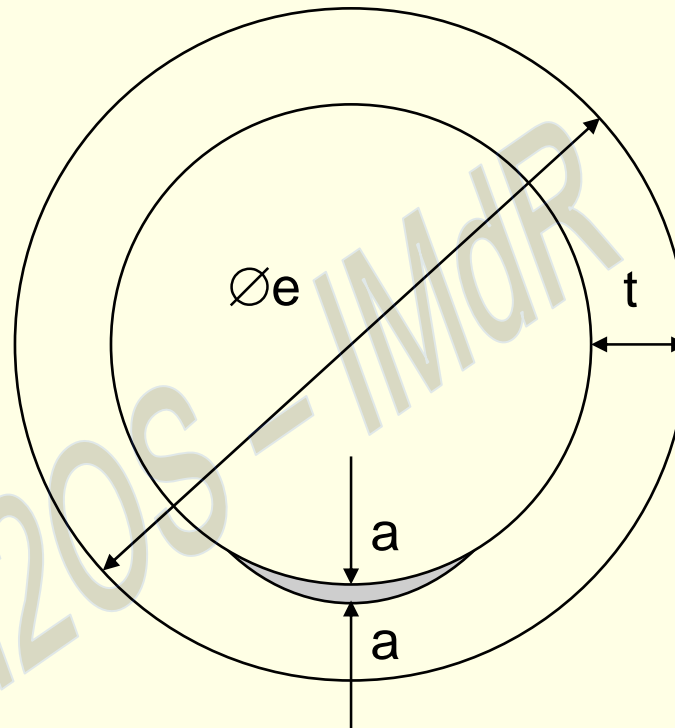
## Tuyauterie ferritique fissurée

### → But :

Utiliser une démarche probabiliste pour quantifier les coefficients de sécurité réelles de conception dans le cas d'une structure fissurée correspondant à une tuyauterie vapeur



→ Hypothèses :



Épaisseur :  $t$

Diamètre extérieur :  $\Phi e$

Défaut débouchant en peau interne - Semi elliptique : hauteur  $a$ , grande longueur  $2a$

Chargement :  $\sigma_{\infty}$

Acier ductile dans le domaine de température considéré



→ Facteur d'intensité des contraintes élastique :

$$K_I = F \sigma_\infty \sqrt{\Pi a a} \quad a a = a + \Delta a$$

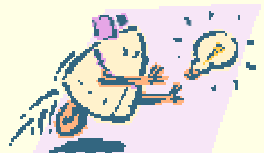
$$F = 0,93 + 3,85 \left( \frac{a a}{t} \right)^2 \quad (\text{facteur de forme})$$

Effet de la plasticité du matériau

$$L_r = \frac{\sigma_\infty}{2\sigma_e \left( 1 - \frac{a a}{t} \right)}, \quad \sigma_e : \text{limite élastique}$$

$$\text{Si } L_r < L_{\max} = \frac{\sigma_e + \sigma_u}{2\sigma_e} \Rightarrow \text{ruine plastique au niveau de la fissure}$$

$\sigma_u$  : limite à rupture de l'acier



→ Facteur d'intensité  $K_{CP}$  (corrigé de la déformation plastique) :

$$K_{CP} = \frac{K_I}{K_r} = \frac{K_I}{(1 - 0,14 L_r^2) (0,3 + 0,7 \exp(-0,65 L_r^6))}$$

$K_r$  : correction plastique

→ Force fissurée :

$$J = \frac{K_{CP}^2}{E} (1 - \nu^2)$$

$E$  : module d'Young

$\nu$  : coefficient de Poisson

Si  $J > J_{0,2} \Rightarrow$  propagation de la fissure de  $\Delta a$



→ Énergie nécessaire pour faire propager la fissure de  $\Delta a$  :

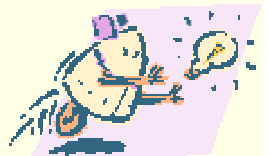
$$J_{\Delta a} = J_{0,2} + (\Delta a - 0,0002) \frac{dJ}{da}$$

→ Après initiation, il faut déterminer si la déchirure reste stable en comparant  $J_{app}$  (force fissurante appliquée à la structure) à la résistance à la déchirure du matériau

$$J(a) = J_{app} + (a + \Delta a) \leq J_{mat}(\Delta a)$$

$\Delta a$  limité à 3 mm

Instabilité si :  $J(a) > J_{0,2}$  et  $J(a + 3\text{mm}) > J_3$



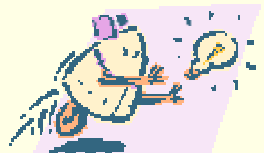
## Calcul des marges

→  $M_{ra} = \frac{L_{r \max}}{L_r(a)}$  : ruine plastique occasionnée par une fissure de dimension  $a$

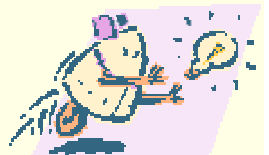
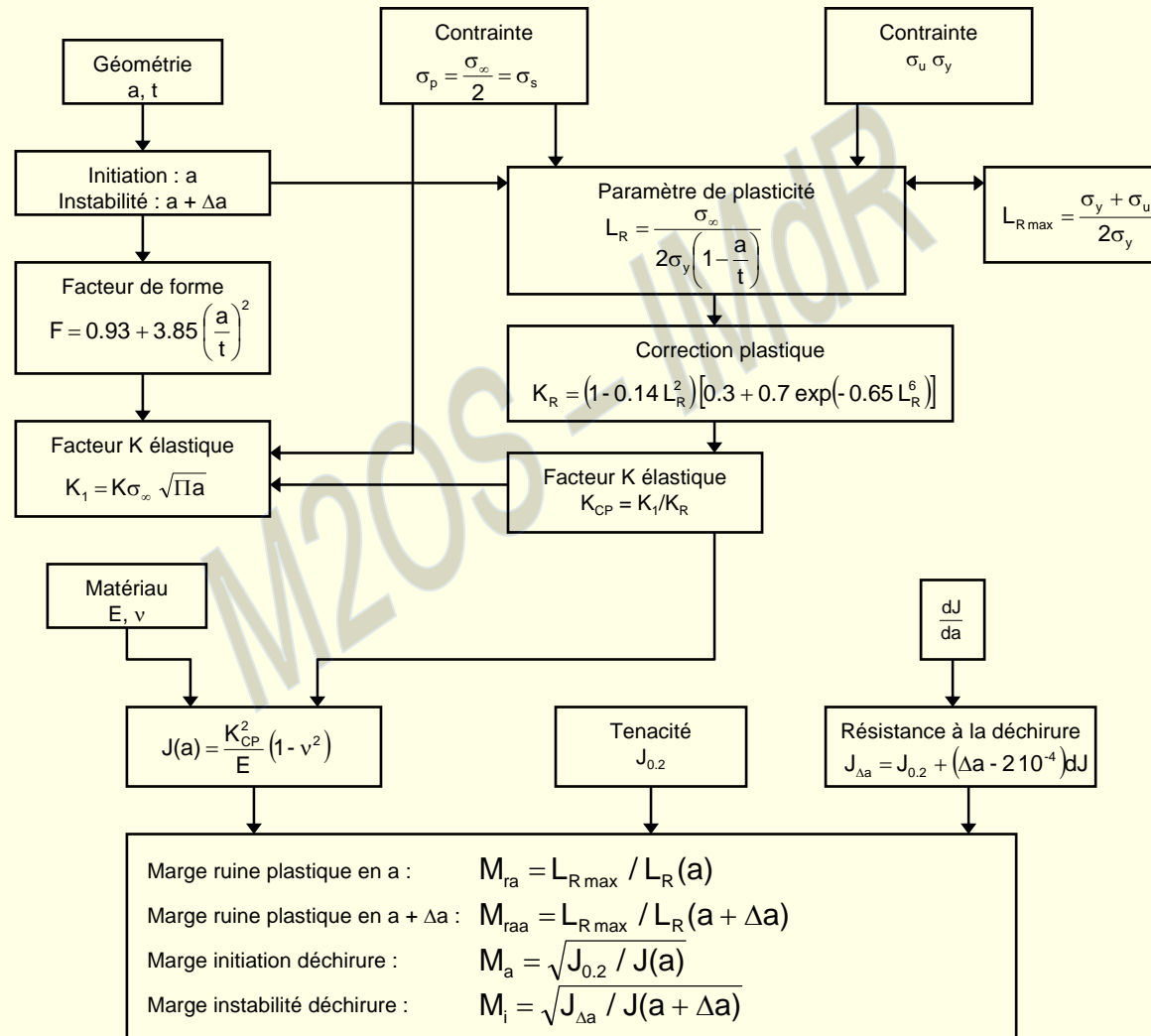
→  $M_{raa} = \frac{L_{r \max}}{L_r(a + \Delta a)}$  : ruine plastique d'une fissure qui se propage

→  $M_a = \sqrt{\frac{J_{0,2}}{J(a)}}$  : initiation de la déchirure

→  $M_i = \sqrt{\frac{J_{\Delta a}}{J(a + \Delta a)}}$  : instabilité par déchirure

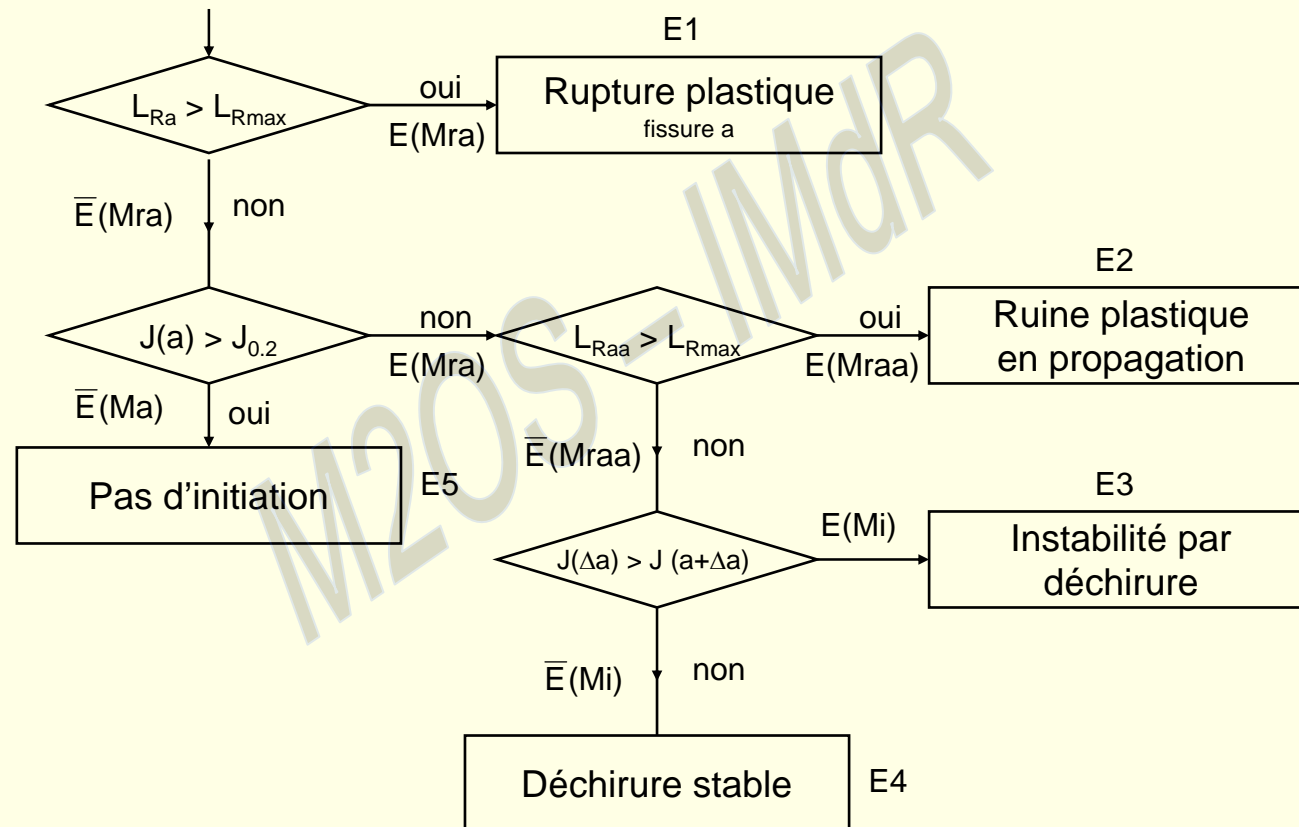


## Représentation schématique du calcul de défaillance

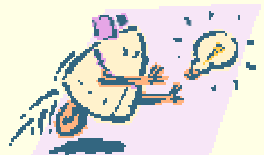




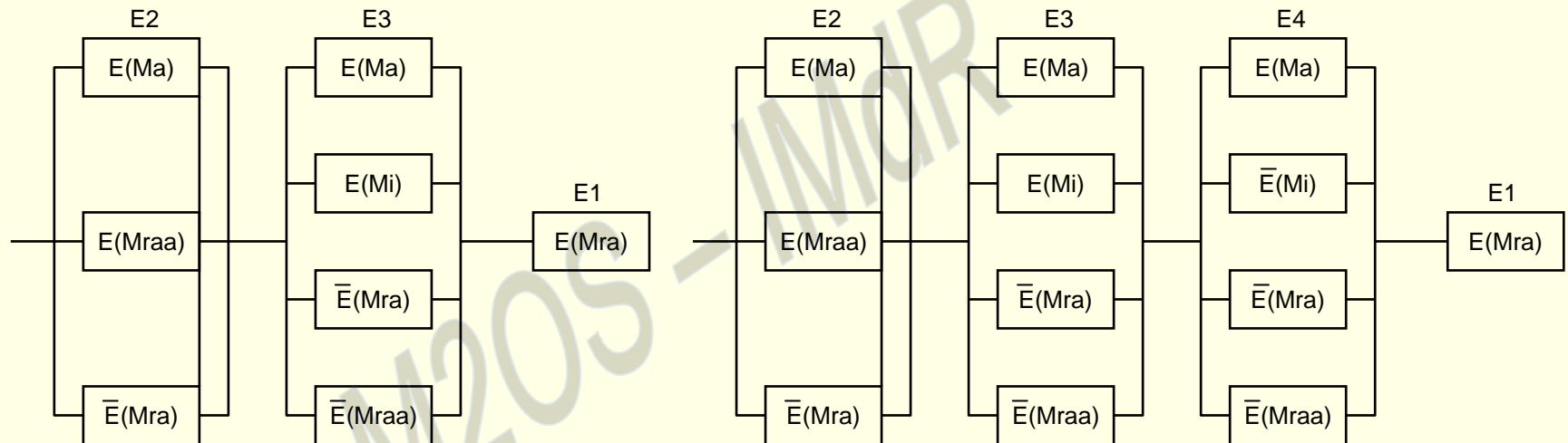
## Représentation schématique des différents modes de ruine envisagés



- Probabilité d'initiation de la déchirure :  $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$
- Probabilité d'instabilité :  $E_1 \cup E_2 \cup E_3$

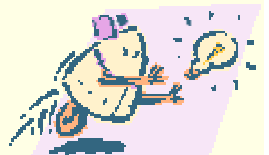


## Fiabilité d'un système série-parallèle



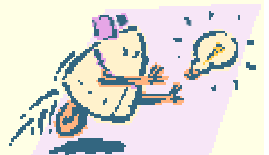
Représentation du risque  
d'instabilité

Représentation du risque  
d'initiation de la déchirure



## Variabilité des données

Désignation	Variable	Unité	Distribution de probabilité	Moyenne	Ecart type ou coefficient de variation
Epaisseur	t	m	-	0.04	-
Diamètre extérieur	$\varnothing e$	m	-	0.812	-
Module d'Young	E	MPa	Log Normale	191 000	10 000
Coefficient de Poisson	$\nu$	-	-	0.3	-
Hauteur du défaut	a	m	Log Normale	0.005	0.001
Accroissement	$\Delta a$	m	-	0.003	-
Limite d'élasticité	$\sigma_v$	MPa	Normale tronquée à 2 écarts type	212	16
Résistance à la traction	$\sigma_u$	MPa	Normale tronquée à 2 écarts type	525	30
Gradient	dJ	MPa	Log Normale	65	13
Energie d'amorçage	$J_{0,2}$	MN/m	Log Normale	0.109	0.033
Contrainte	$\sigma_\infty$	MPa	Log Normale	Variable de 150 à 600	10%



→ **But :**

Trouver les coefficients partiels de sécurité qui correspondent à une probabilité de déchirure de  $10^{-3}$

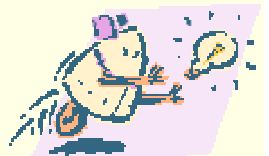
- Étude paramétrique en faisant varier la valeur moyenne  $\sigma$  entre 150 MPa et 600 MPa

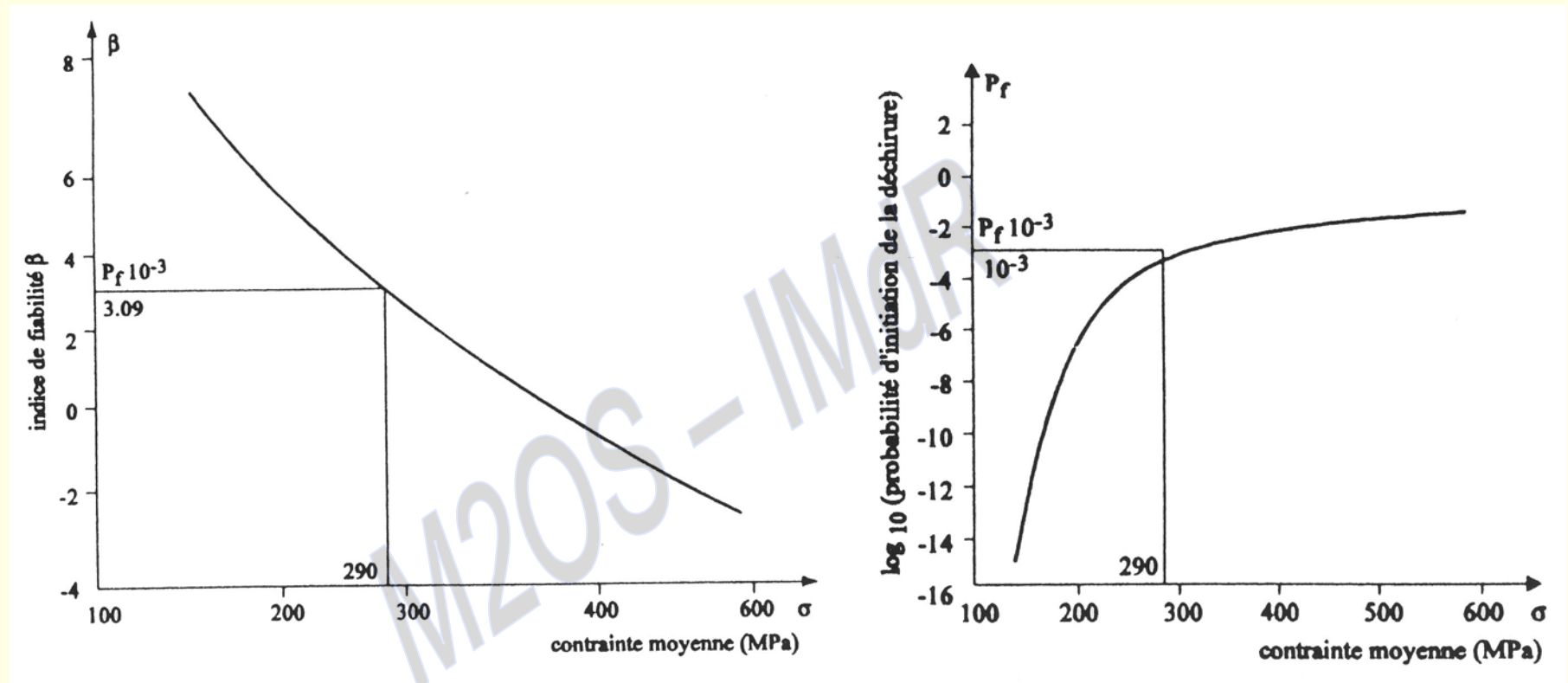


Évaluation du risque d'initiation de la déchirure :

$$\mu_{\sigma_{\infty}} \in [150, 600] \quad \sigma_{\sigma_{\infty}} \in [15, 60] (10\%)$$

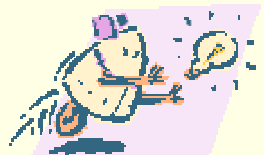
Calculs effectués sur PROBAN



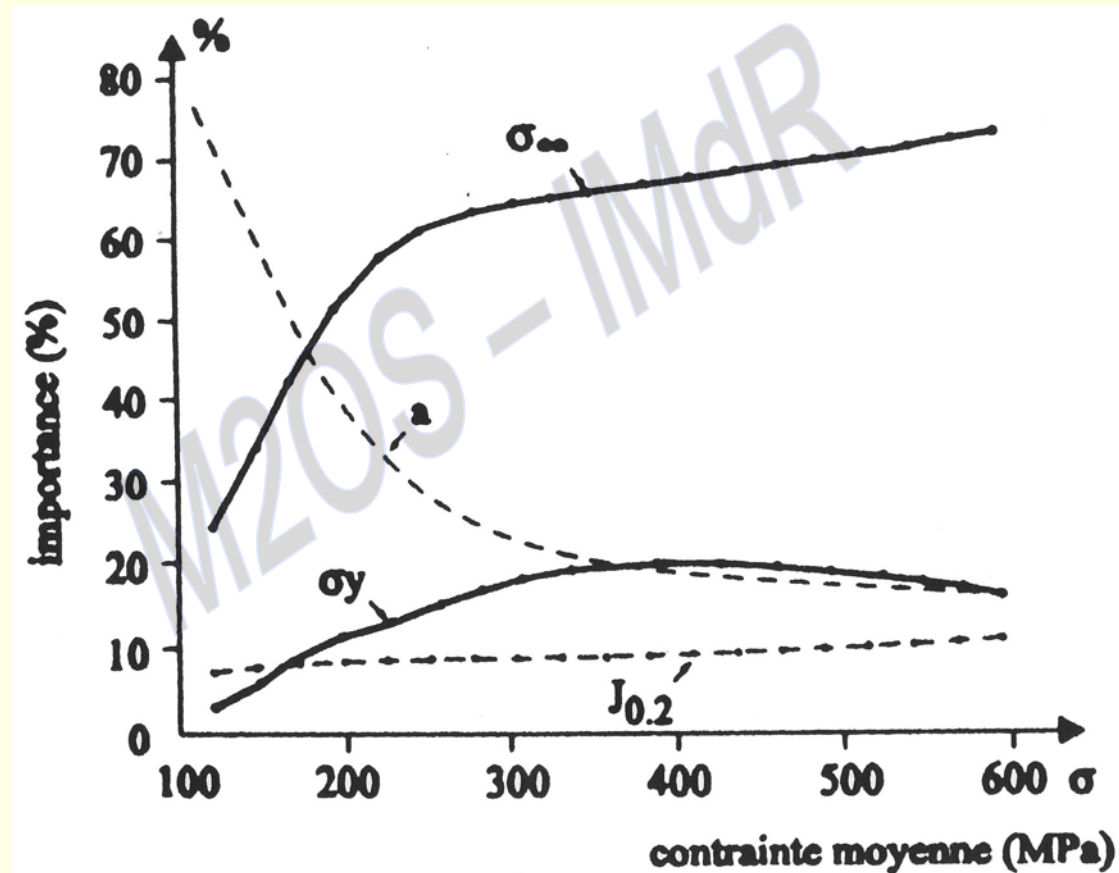


Évolution de  $\beta$  en fonction de la contrainte moyenne

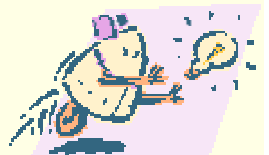
Évolution de la probabilité d'initiation de la déchirure en fonction de la contrainte moyenne



## Évolution de la sensibilité des facteurs en fonction de la contrainte moyenne



→  $\sigma$  et  $a$  prépondérants,  $\sigma_u$  et  $E$  négligeables



## Analyse de la probabilité critique d'initiation de la déchirure

Valeur moyenne de la contrainte  $\sigma = 290$  MPa

$$P_f = \text{Prob} (E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) = \text{Prob} [E(M_{ra}) \cup \bar{E}(M_{ra}) \cap E(M_{ra})]$$

$$E_1 \Rightarrow P (\text{rupture plastique pour une fissure de dimension } a) = 1.69 \cdot 10^{-12}$$

$$E_2 \Rightarrow P (\text{ruine plastique en propagation de fissure}) = 6 \cdot 10^{-10}$$

$$E_3 \Rightarrow P (\text{instabilité par déchirure}) = 9.3 \cdot 10^{-4}$$

$$E_4 \Rightarrow P (\text{déchirure stable}) = 1.3 \cdot 10^{-4}$$

$$EM_{ra} \Rightarrow 1.7 \cdot 10^{-12}$$

$$EM_a \Rightarrow P(Ja > J_{0.2}) = 1.06 \cdot 10^{-3}$$

$$EM_i \Rightarrow P(J(a+\Delta a) > J_{\Delta a}) = 1.6 \cdot 10^{-3}$$

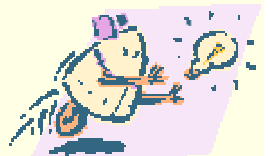
$$E(Mra) \cap EMa \Rightarrow P(Lra < Lr_{\max} \text{ et } J(a) > J_{0.2}) = 1.06 \cdot 10^{-3}$$

$$P_f = 1.06 \cdot 10^{-3}$$

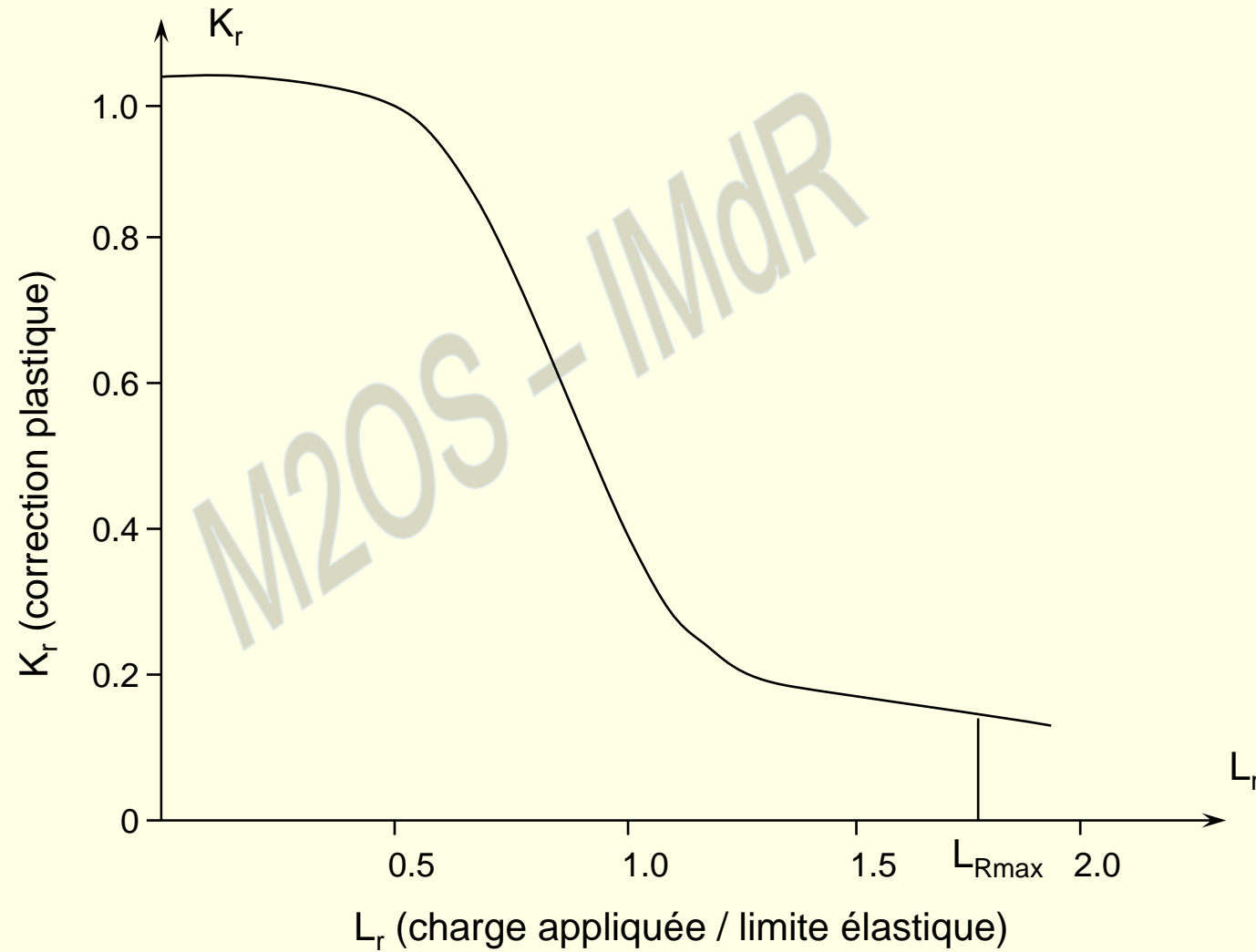




- Risque estimé d'initiation de la déchirure dominé par la probabilité que  $J(a)$  soit supérieure à  $J_{0.2}$  (événement  $E_{ma}$ )
- Risque de ruine plastique pour une fissure de dimension  $a$  ou une fissure de propageant  $a+\Delta a$  sont négligeables :  $1,7 \cdot 10^{-12}$  et  $6 \cdot 10^{-10}$  (loin de la valeur  $L_{rmax}$  sur le diagramme R6)
- Risque 7 fois plus important d'initier une déchirure instable plutôt que stable ( $9,3 \cdot 10^{-3}$  et  $1,3 \cdot 10^{-4}$ ) (un calcul de marge ne permet d'obtenir cette information)



## Diagramme d'évaluation de la rupture



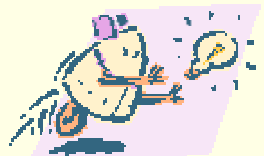
## Coefficients de sécurité

$$\theta_a = \bar{M}_a = \sqrt{\frac{J_{0.2}}{J(a)}} = 3.50$$

$$\theta_i = \bar{M}_i = \sqrt{\frac{J_{\Delta a}}{J(a + \Delta a)}} = 3.76$$

$$\theta_{ra} = \bar{M}_{ra} = \frac{L_{Rmax}}{L_{R(a)}} = 2.25$$

$$\theta_{raa} = \bar{M}_{raa} = \frac{L_{Rmax}}{L_{R(a + \Delta a)}} = 2.05$$



## → REMARQUES :

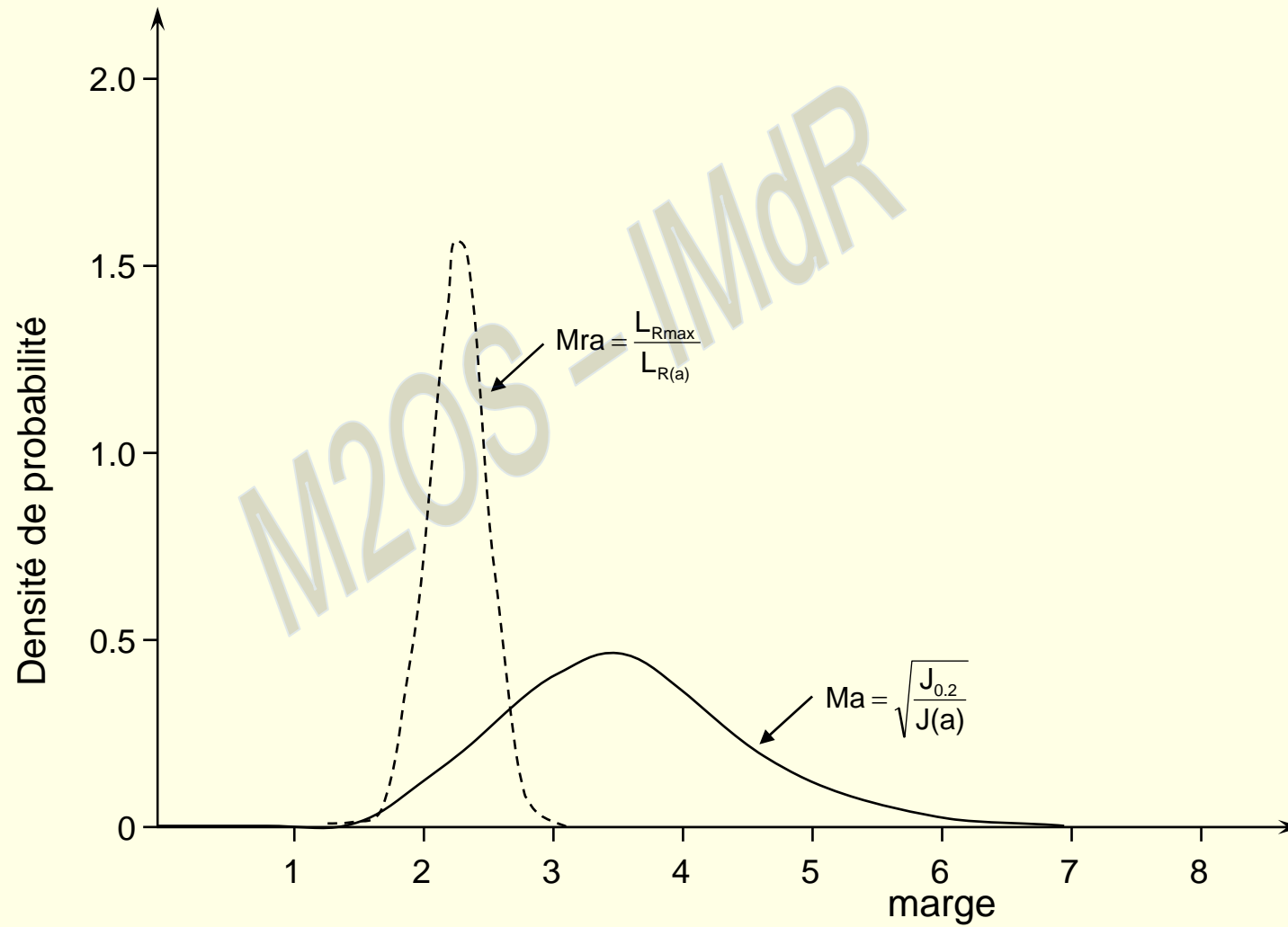
- ➡ La marge évaluée sur  $M_{raa}$  est naturellement plus faible que celle obtenue sur  $M_{ra}$
- ➡ Coefficient de sécurité sur  $M_a$  supérieur à celui de  $M_{ra}$  !!!



**La dispersion obtenue sur la distribution de  $M_a$  est très supérieure à celle de la marge de  $M_{ra}$**

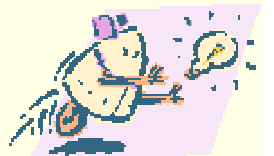


## Diagramme d'évaluation de la rupture

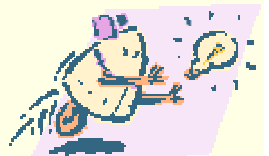
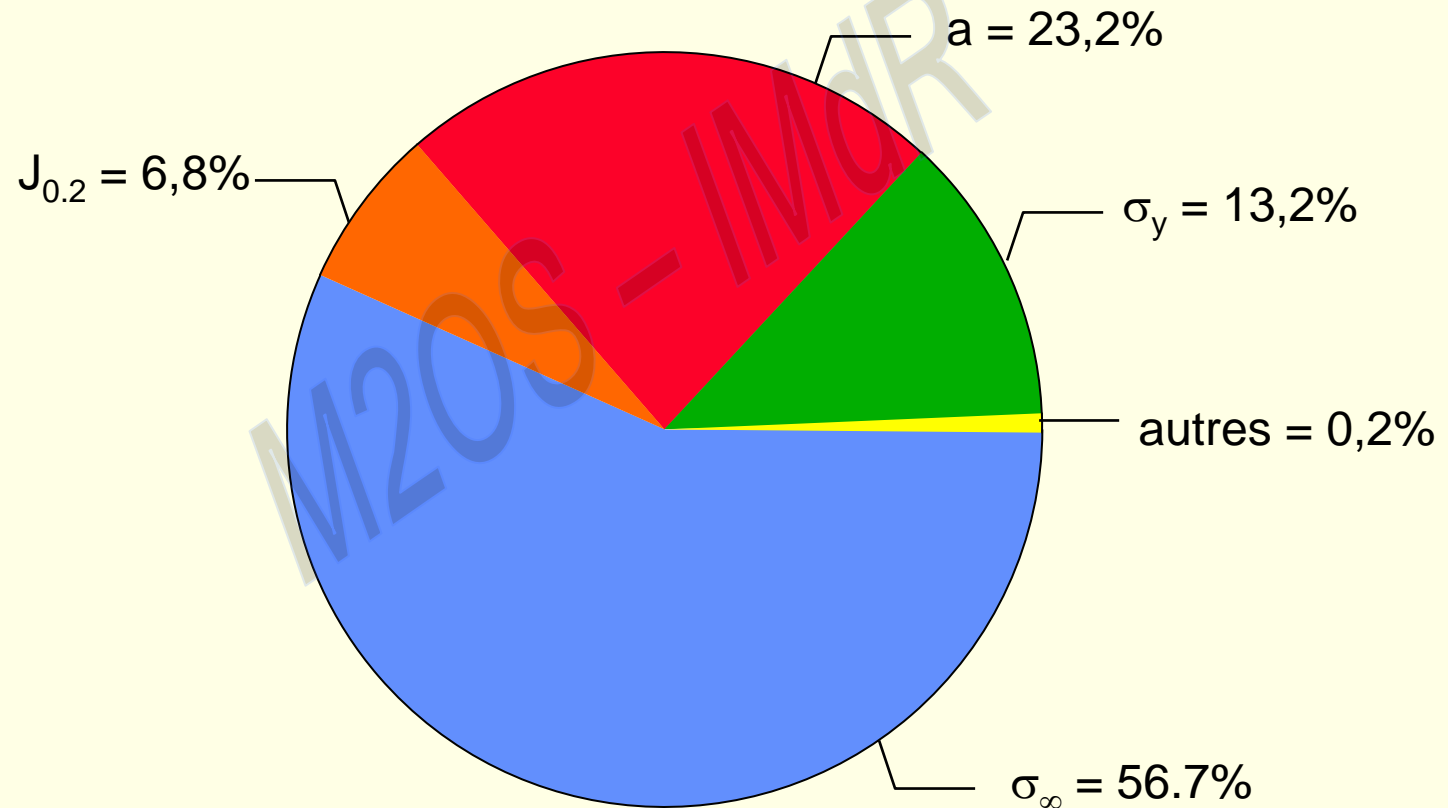




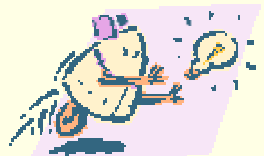
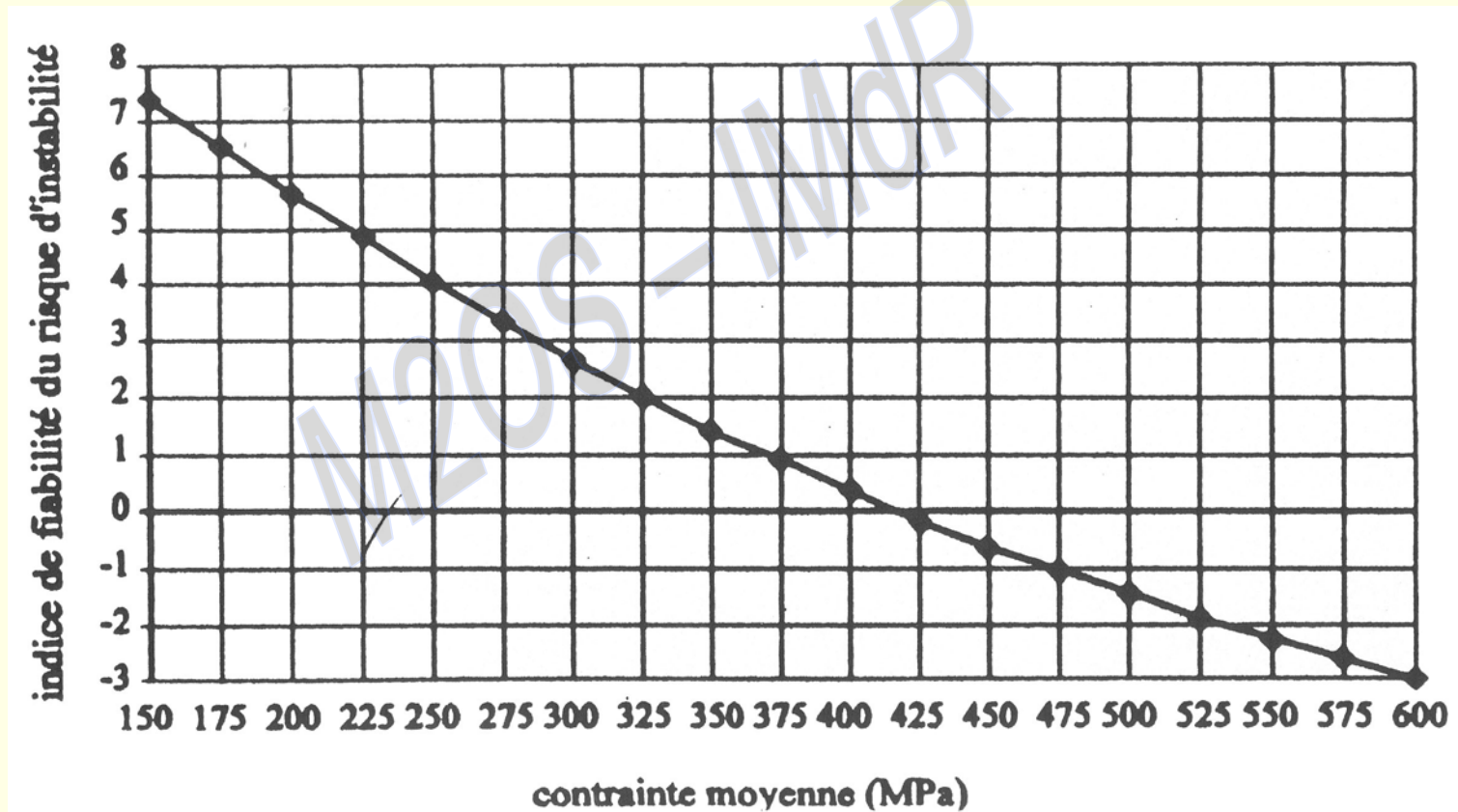
Un calcul de coefficient de sécurité global pourrait conduire à des conclusions erronées si l'on n'effectue pas de calibrage par une évaluation probabiliste : les coefficients globaux les plus élevés ne correspondent pas toujours aux probabilités les plus faibles



## Sensibilité des paramètres pour $\sigma = 290$ MPa

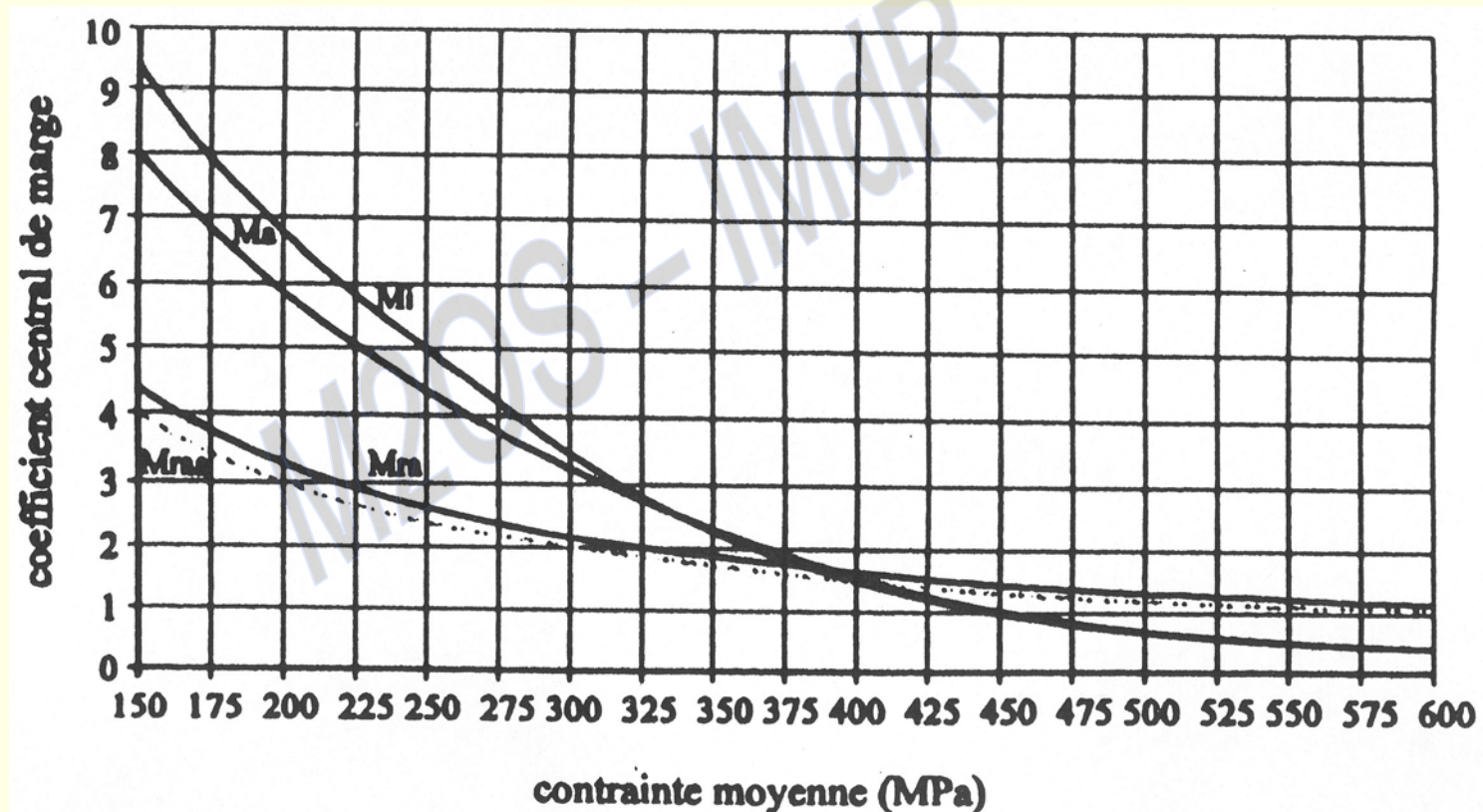


## Évolution de l'indice de fiabilité en fonction de la contrainte moyenne

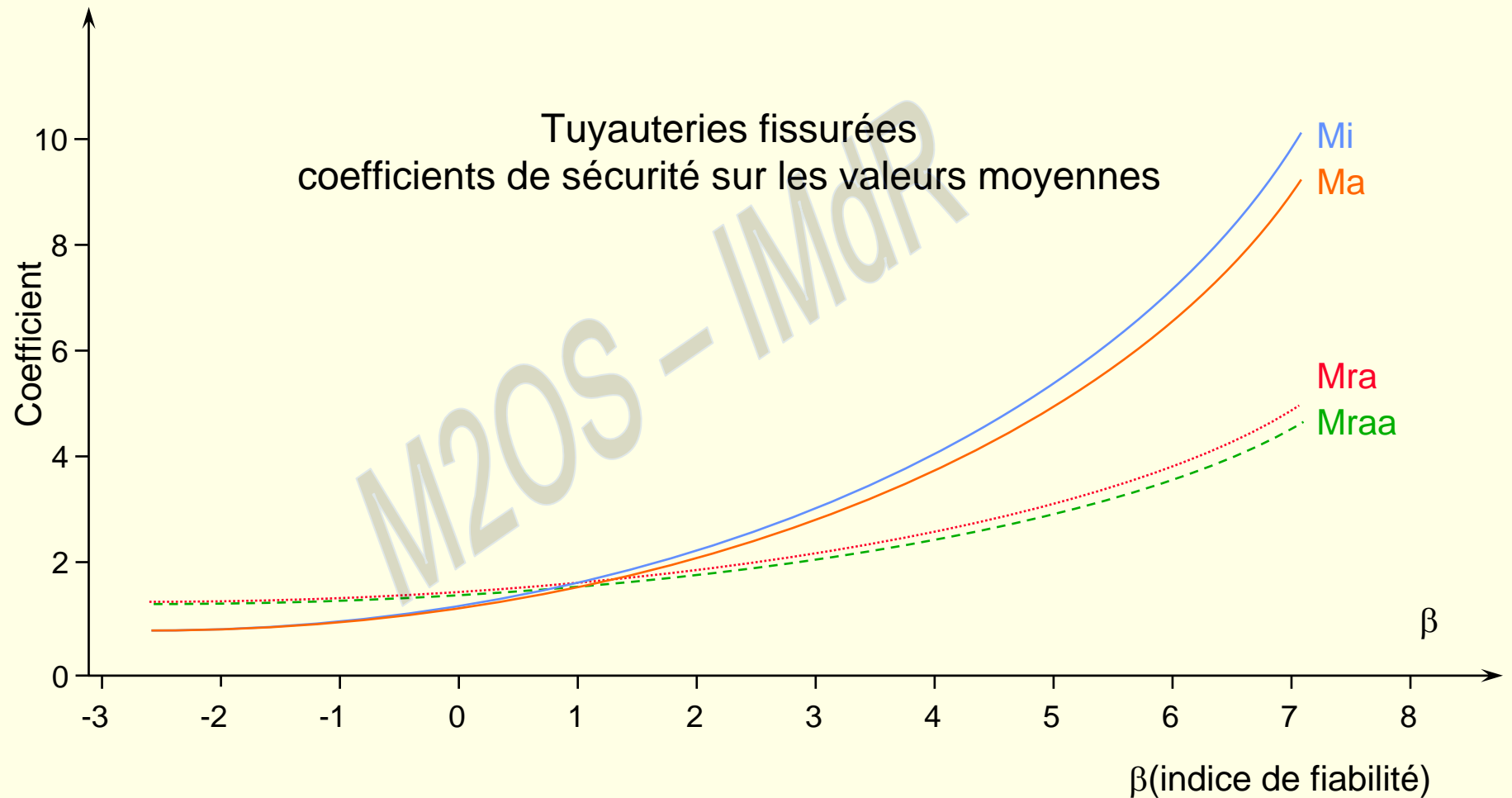




## Évolution des coefficients globaux de sécurité en fonction de la contrainte moyenne



## Relation entre l'indice de fiabilité et les coefficients globaux de sécurité



- Reprise des mêmes calculs avec les coefficients partiels de sécurité en prenant successivement les valeurs à un écart type puis deux écarts types

$$X^* \xrightarrow{T^{-1}} Z^*$$

$$P^* \xrightarrow{T^{-1}} U^*$$

$$\gamma_i = \frac{Z_i^*}{Z_i}$$

Pour le même indice de fiabilité  $\beta = 3$ , le coefficient central de sécurité sur  $M_a$  est égal à 3,5, le coefficient partiel de sécurité sur les valeurs à 1 écart type est égal à 1,8, et sur les valeurs à deux écarts types, il vaut 0,63



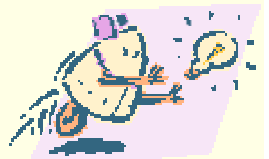
## Enseignements

- Une règle de codification «déterministe» n'est qu'un cas particulier d'une démarche «probabiliste» plus générale du problème
- Cette méthodologie permet d'établir plus rationnellement une réglementation de conception en prenant en compte des éléments de décision à plusieurs niveaux, en particulier :
  - ➔ sur le choix approprié des valeurs caractéristiques à retenir pour chaque variable aléatoire de base
  - ➔ sur la calibration des coefficients partiels de sécurité en fonction d'objectifs et du niveau de fiabilité requis
  - ➔ avec la réalisation d'études de sensibilité permettant de mettre en évidence les paramètres les plus influents



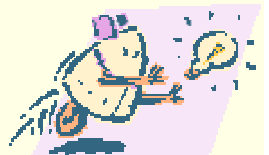
# FIABILITE MECANIQUE

## Les compléments



## SOMMAIRE

1. Le Dommage
2. Les Banques de Données « >> »
3. Nouveaux Modèles « >> »
4. Exemples « >> »
  - 4.1. Caisse de Métro
  - 4.2. Comparaison des Méthodes
  - 4.3. Exemple sur un Pont de Manutention
5. Gradient de Contrainte - Critères de Rupture « >> »
6. Rappels Tenseurs Mécanique de la Rupture « >> »
7. Travaux ESA « >> »
8. Travaux CEA Rupture de Cuves « >> »
9. Fiabilité Système FORM-SORM « >> »
10. Exemple sur Composites « >> »
11. Théorie de Liens « >> »
12. Méthodes Modernes « >> »
13. Freinage du Métro de Lille « >> »
14. La Déchirure Ductile « >> »
15. Compléments fatigue oligocyclique « >> »

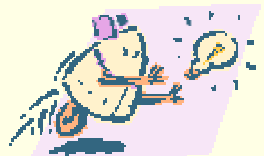


# 1. LE DOMMAGE



## LE DOMMAGE

- Dommage en fonction linéaire de la fonction de vie
- Dommage indépendant des niveaux de changement
- Dommage dépendant des niveaux de changement
- Dommage avec interaction
- Dommage dépendant des niveaux de contrainte
  - Théorie de SHANLEY
  - Théorie de VALLURI
  - Règle bilinéaire
  - Théorème unifiée
- Dommage en fatigue à déformation contrôlée
  - Règle linéaire
  - Règle bilinéaire
  - Théorie unifiée





## LES CLASSES DE LOI DE DOMMAGE

- C1 ⇒ Dommage indépendant des niveaux de chargement
- C2 ⇒ Dommage dépendant des niveaux de chargement
- C3 ⇒ Dommage avec interaction



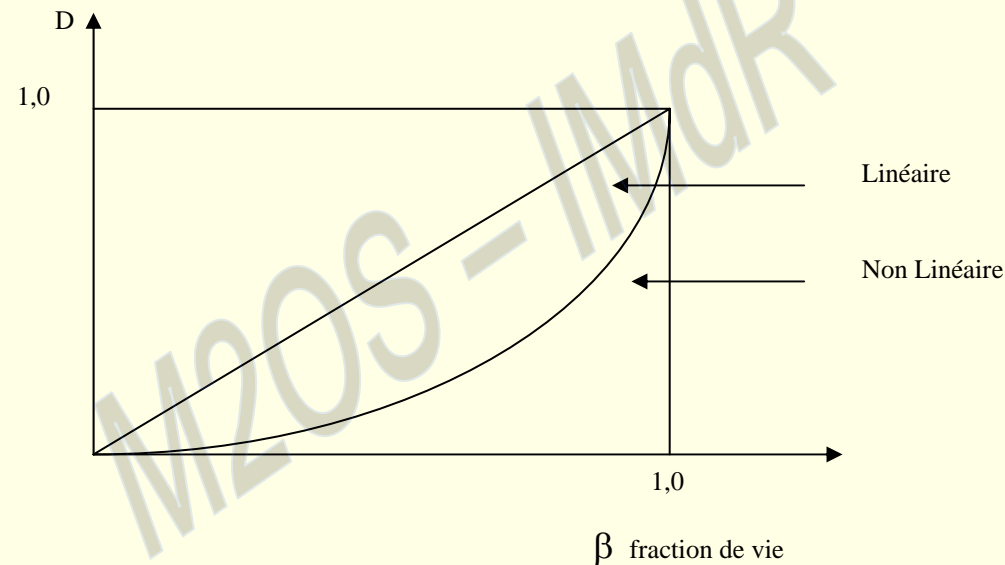
## QUELQUES LOIS DE DOMMAGE

- C1 : Miner
- C2 : Shanley
  - ⇒ Valluri
  - ⇒ Règle bilinéaire
  - ⇒ Théorie unifiée
- C3 : Corten - Dolan



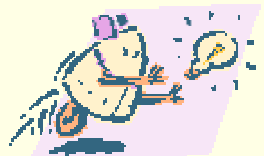
## LOI DE MINER

### → Loi de CUMUL LINEAIRE



### → Ne tient pas compte :

- ⇒ de l'effet d'ordre d'application
- ⇒ pas d'effet pour un niveau inférieur à la limite d'endurance



## THEORIE DE SHANLEY

→ Repose sur :

$$L = L_0 \sigma^X \times \text{EXP} \left( -\frac{X}{C_s} \sigma^n \right)$$

Cste du matériau

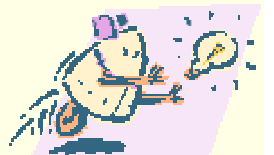
Pour  $n = N$  (à rupture)  $L = L$

$$\text{Soit : } N = \frac{K_1}{\sigma^X} (1 - K_2 \text{Ln} \sigma)$$

3 paramètres ( $K_1$ ,  $K_2$ ,  $X$ ) données par 3 points de la courbe de Wohler

Le dommage :

$$D = L/L_c = \text{EXP} \left[ -\frac{1}{K_1 K_2} \frac{X}{\sigma^N} (1 - \beta) \right]$$



## SHANLEY (SUITE)

→ On a :

$$D = \text{EXP} \left( -\frac{1}{K_1 K_2} \sigma N(1 - \beta) \right)$$

Pour  $\beta = 0$   $D = D^*$

Soit

$$D = D^* (1 - \beta)$$

(voir figure d6)

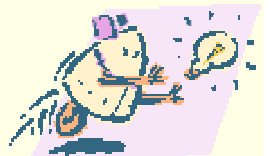
Cette loi donne :

une vie plus courte que MINER pour des niveaux décroissants

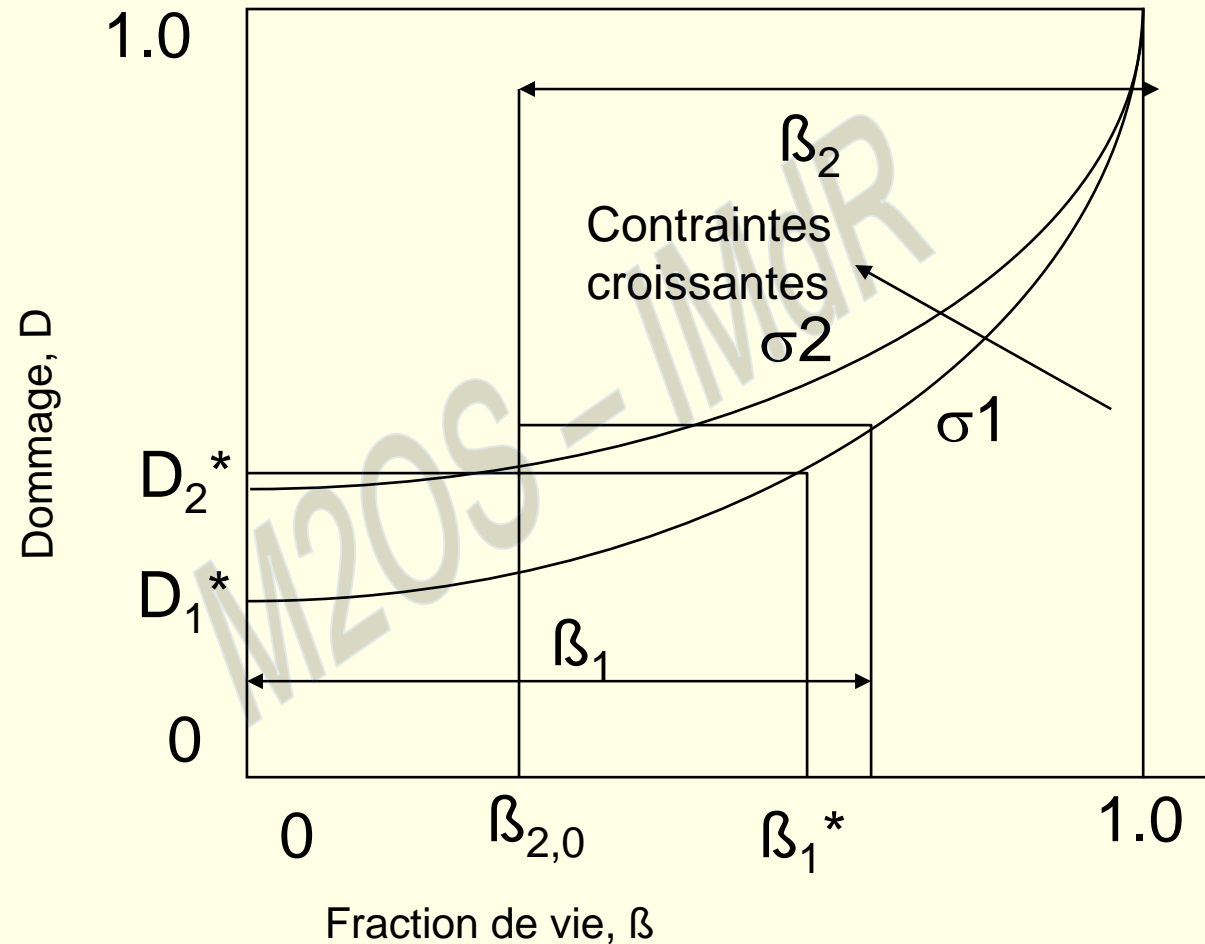
une vie plus longue que MINER pour des niveaux croissants

F.R. Shanley - The Rand Corp

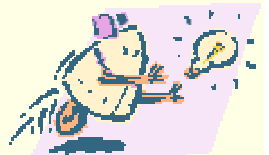
Rapport P350



## SHANLEY



- Dommage cumulatif à deux niveaux croissants de contrainte, d'après le théorie de SHANLEY



## THEORIE DE VALLURI

→ Repose sur :

$$\frac{dL}{dN} = C_v L \frac{\left[ \frac{\sigma - \sigma_0}{E} \right] \left[ \frac{2\sigma}{\sigma_0} \right]^2}{Ln \frac{\sigma - \sigma_0}{K_V}}$$

Constantes f (matériau)

LC valeur limite de la fissure donnée par théorie de Griffith

$$\frac{L_c}{L_0} = \left[ \frac{\sigma_u}{\sigma} \right]^2 \text{ d'où } N \text{ par intégration}$$

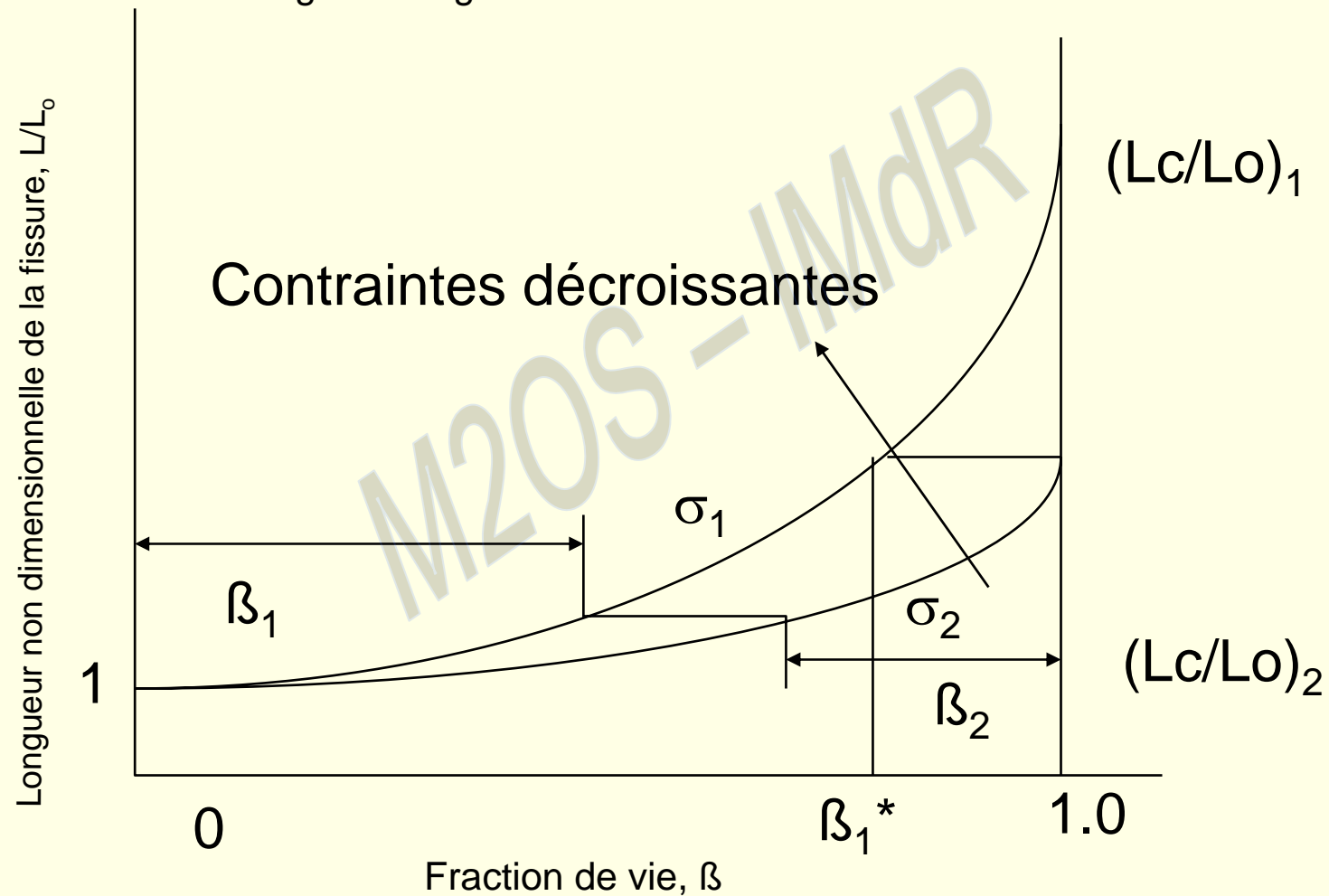
Taille de la fissure  $\frac{L}{L_0} = \left[ \frac{\sigma_u}{\sigma} \right]^{2\beta}$

Au niveau cumul en désaccord avec beaucoup de résultats expérimentaux



# VALLURI

Cumul du dommage en fatigue



- Dommage cumulatif à deux niveaux décroissants de contrainte, d'après la théorie de Valluri





## REGLE BILINEAIRE

$$N = N_o + N_p \quad (\text{cf Grover})$$

$\swarrow$                        $\searrow$   
 initiation                      propagation

Se base sur les relations empiriques :

$$N_o = N - 14 N^{0.6}$$

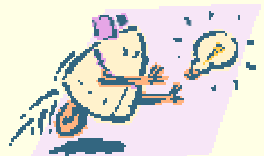
$$N_p = 14 N^{0.6}$$

$$\sum \frac{n_o}{N_o} = 1,0$$

$$\sum \frac{n_p}{N_p} = 1,0$$

\* S.S. MANSON, J.C. FRECHE, C.R. ENSIGN

ASTM - STP - 415, 1967, P.384-413



## THEORIE UNIFIEE

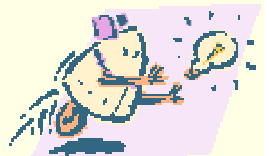
Utilise le paramètre non dimensionnel  $j = \frac{\sigma}{\sigma_0}$

Limite d'endurance initiale ( $n = 0$ )

on définit donc  $j_e = -\frac{\sigma_e}{\sigma_0}$  → Limite d'endurance instantanée

Hypothèses de base  $\frac{dj_e}{dn} = -\frac{1}{Ka} j^b (j - j_e)^2$

et  $\frac{\sigma_e}{\sigma_0} = \left[ \frac{\sigma_{ur}}{\sigma_u} \right]^8$  → Résistance statique instantanée



## THEORIE UNIFIEE (suite)

$$j_e^* = \left[ \frac{\sigma}{\sigma_u} \right]^8 \quad \text{et C.L.} \quad j_e = 1 \quad n = 0$$

$$n = N$$

d'où la courbe de fatigue

$$N = Ka \frac{1}{j^b} \left[ \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j(j/j_u)^8} \right]$$



## THEORIE UNIFIEE (suite)

Le dommage normalisé

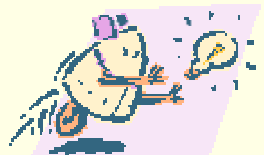
$$D = (1 - j_e)(1 - j_e^*)$$

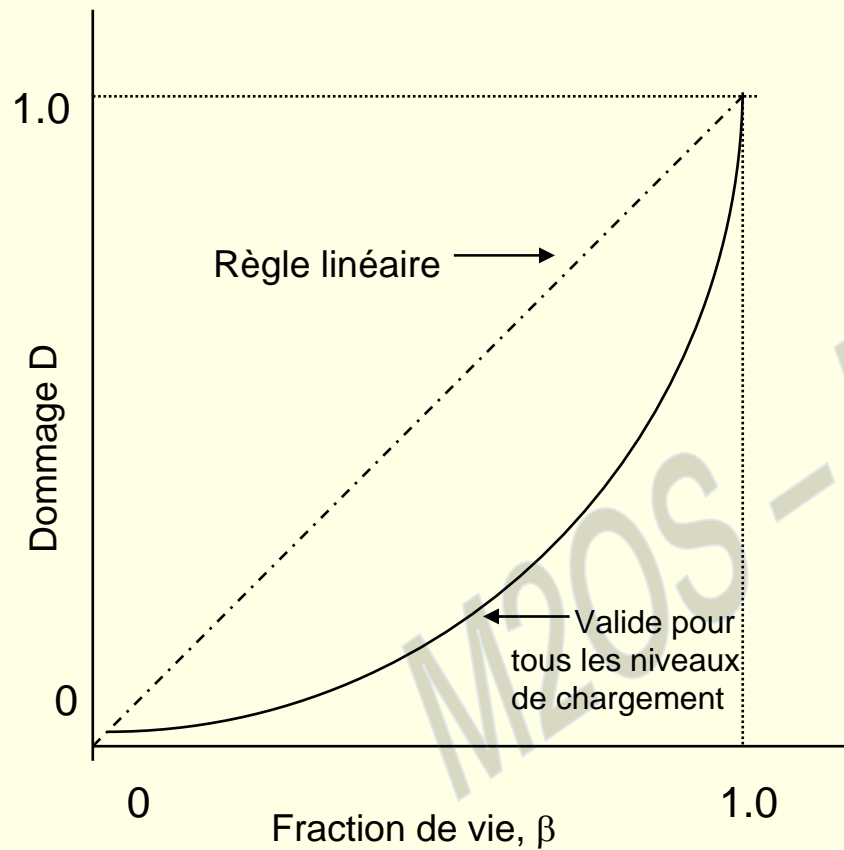
soit :

$$D = \frac{\beta}{\beta + (1 - \beta) \left[ \frac{j - j(j/j_u)^8}{j - 1} \right]}$$

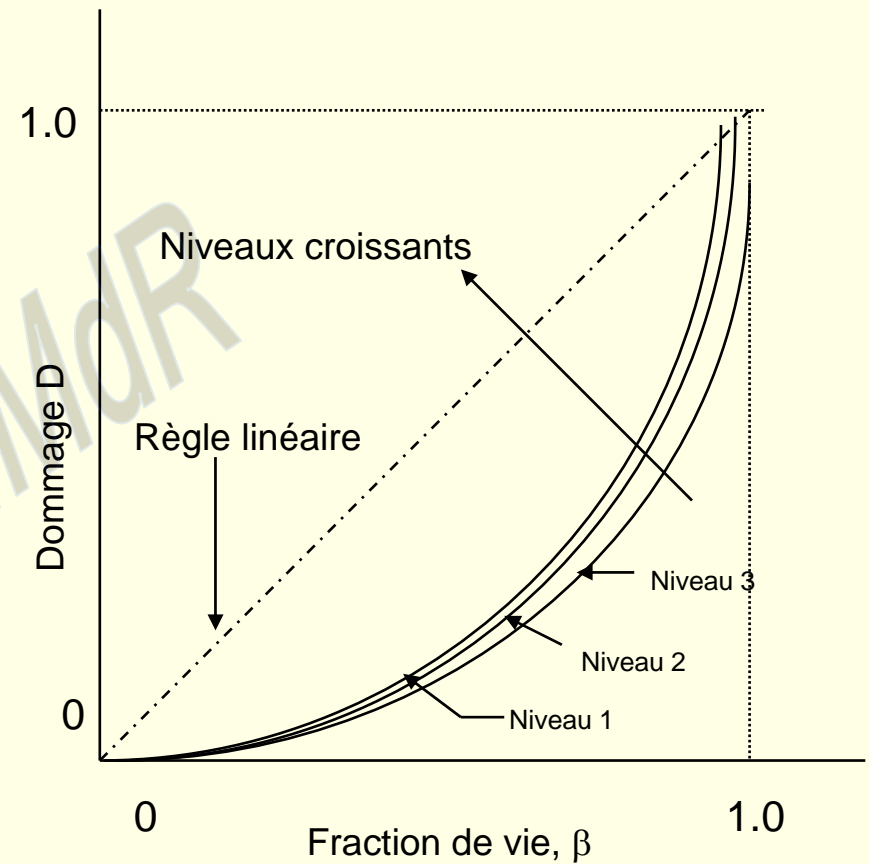
Permet d'évaluer la charge à rupture en statique après dommage

$$\frac{\sigma_{ur}}{\sigma_u} = \left[ j - \frac{1}{\frac{1 - \beta}{j - 1} + \frac{\beta}{j - (j/j_u)^8}} \right]^{\frac{1}{8}}$$



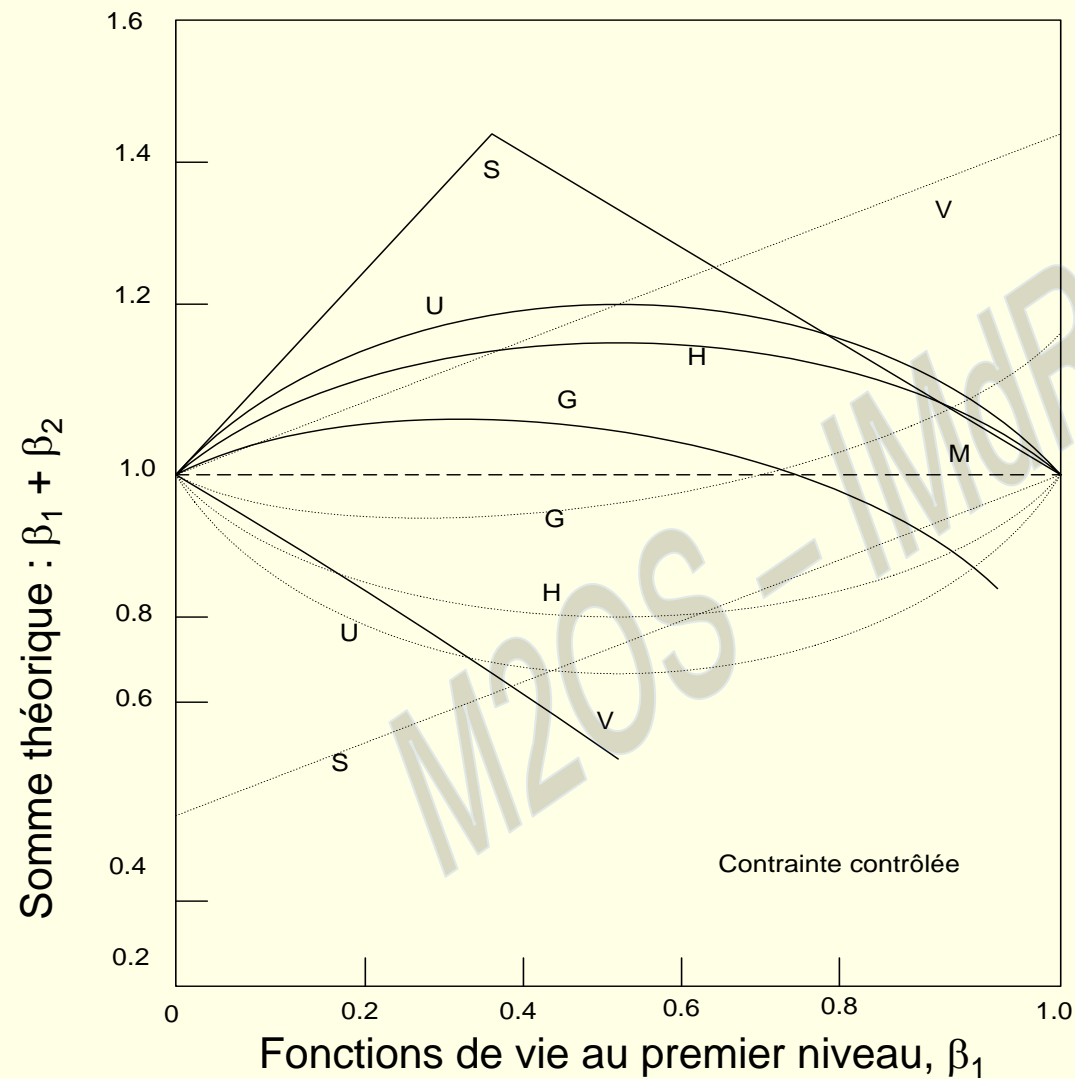


*Domage indépendant des niveaux de chargement*



*Domage dépendant des niveaux de chargement*





### Courbes théoriques

- |   |                   |   |
|---|-------------------|---|
| — | ordre croissant   | { M : Linéaire (Miner)<br>H : Henry<br>G : Gatts<br>S : Shanley<br>V : Valluri<br>U : Unifiée |
| ⋯ | ordre décroissant |   |

Sommes théoriques typiques des fractions de vie pour les essais à deux niveaux de contrainte, d'après différentes théories fondamentales de fatigue.



## THEORIE UNIFIEE suite)

### → CONCLUSION :

- ➔ Concept de dommage de Henry combiné aux théories de Shanley et Valluri
- ➔ Permet de calculer la contrainte statique à rupture après n cycles en fatigue
- ➔ S'applique bien à la fatigue à déformation contrôlée

$$D = \frac{\beta}{\beta + (1 - \beta) \left[ \frac{\lambda - (\lambda / \lambda_f)^8}{\lambda - 1} \right]}$$

$$\lambda = 1 + \ln (\epsilon_t / \epsilon_0)$$

$$\lambda_f = 1 + \ln (\epsilon_f / \epsilon_0)$$



## THEORIE AVEC INTERACTION

Elle s'appuie sur la théorie de Corten-Dolan

-  $D = m r n^a$  → fonction du matériau

↓ f (propagation de fissure)

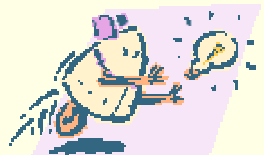
↓ nombre de noyau - dommage

- m et r dépendent des niveaux de contrainte

$$n_{b,e} = \left[ \frac{r}{r^*} \right]^{1/a} n_{b,1} \quad \text{Nombre de cycles équivalent au niveau } \sigma^*$$

$$D_{b,1} = m * r * \left[ \left[ \frac{r}{r^*} \right]^{1/a} n_{b,1} + n_{b,2} \right]^a$$

↓  
Dommage après application du premier bloc





## THEORIE AVEC INTERACTION (suite)

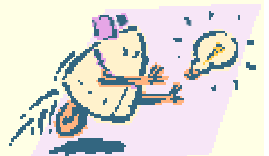
- Pour K blocs on a rupture pour :

$$\sum \left[ \frac{\sigma_i}{\sigma^*} \right]^d \frac{n_i}{N^*} = 1,0$$

Cette formule s'appuie sur :

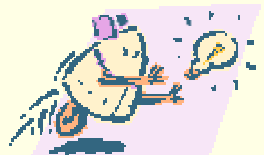
\* la relation de Corten et Dolan

$$\left[ \frac{r_i}{r^*} \right]^{i/a} = \left[ \frac{\sigma_i}{\sigma^*} \right]^d$$



## THEORIE AVEC INTERACTION (suite)

- Où :
  - $\sigma^*$  niveau de contrainte maximale de la séquence
  - $N^*$  nombre de cycle à rupture au niveau  $\sigma^*$
  - $d$  paramètre du matériau  
(peut être différent de la courbe  $\sigma - N$ )
  - $n_i$  nombre de cycle à la rupture au niveau  $\sigma_i$
- Conclusion  
Théorie simple, mais problèmes pour la détermination de  $d$  et l'effet d'interaction pour chaque couple de contraintes  
⇒ Beaucoup de travaux expérimentaux



## 2. LES BANQUES DE DONNEES



## BANQUES DE DONNEES

- OREDA - OFF SHORE
- NPRD
- DEF STAN
- R et M IN PERSPECTIVE
- RELIABILITY TECHNOLOGY



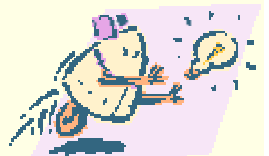
## PAYANTES

- SRS SYSTEMS RELIABILITY SERVICES
- HARIS HAZARD AND RELIABILITY INFORMATION SERVICES



## GENERIC FAILURE RATE

- $\lambda_{XA} = \lambda_0 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot p(A)$
- $\lambda_{XA}$  DE L'EQUIPEMENT X DANS LE MODE DE  
DEFAILLANCE A
- $\lambda_0 = \lambda$  GLOBAL POUR EQUIPEMENT SIMILAIRE A X
- $K_1 =$  FACTEUR ENVIRONNEMENT
- $K_2 =$  TAUX DE CONTRAINTE



## APPROCHE TYPE « SYSTEME »

### → Données de fiabilité sur les composants

→ taux de défaillance en fonctionnement

→ taux de défaillance à l'arrêt

→ probabilité de défaillance à la sollicitation

☰ sources : littératures spécialisées  
enquêtes

☰ précautions : Connaissance de l'échantillon de référence :

- technologie du composant
- conditions d'utilisation
- connaissance intervalle de confiance

### → Données sur l'utilisation du système

→ environnement

→ fréquence et durée d'utilisation

☰ sources : spécifications et exploitants



## LES TABLES

- Conditions d'utilisation non spécifiées
- Hypothèse du  $\lambda$  constant
- Durée de vie non précisée
- Critères de rejet
- Limitation des modèles proposés
- Sources utilisées





## NPDRD 91

- Quantité d'informations 4 x NPRD3
- 1400 - Composants différents
- 4800 - Taux de panne

### Difficultés

- Nombre de facteurs identifiés réduits
- Incertitudes sur taux :
  - Causes communes ou inhérentes
  - 1ère et 2ème défaillance
  - Fabricant, process
- Effets des variables corrélées
- Heures de fonctionnement
- Données de maintenance
- Contraintes réelles
- Identification des défaillances

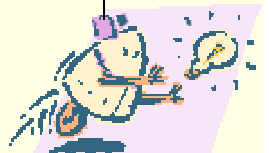
### Originalités

- Paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de Stabilisation du taux de panne



## SOURCES OF FAILURE DATA

N°	Author or contact person	Source title or type of data	Published in or developed by
1	M. J. Rossi	Nonelectronic Parts reliability Data, Rept. NPRD3. 1985	Reliability Analysis Center. Rome Air Development Center (RADC) Griffiss Air Force Base. NY 13441 – 5700
2	R. E. Schafer J. E. Angus J. M. Finkelstein M. Yerasi D. W. Fulton	RADC nonelectronic Reliability Notebook. Rept. RADC-TR-85-194. 1985	Reliability Analysis Center. Rome Air Development Center (RADC) Griffiss Air Force Base. NY 13441 – 57000
3	---	Data on general equipment	Military Electronics Laboratory (FTL/FOA). FACK. 10450 Stockholm 80. Sweden
4	A. E. Green	Safety Systems Reliability, 1983	John Wiley & Sons. Chichester. UK
5	---	Government industry data exchange program (GIDEP)	GIDEP Operations Center. U.S. Dept. Of the Navy. Naval Weapons Station. Seal Beach. Corona Annex. Corona. CA 91720



## SUITE

N°	Author or contact person	Source title or type of data	Published in or developed by
6.	C. H. Levinson	<i>Systems reliability Analysis Handbook</i> 1964, pp. 18.37-18.54	Mcgraw Hill Book Co. 1221 Avenue of the Americas. New-York. NY 10019
7	R. J. Sadlon	Analysis Techniques for Mechanical Reliability, Rept. NPS-1, 1985, p.95	Reliability Analysis Center. Rome Air Development Center (RADC) Griffiss Air Force Base. NY 13441 – 57000
8	R. G. Arno	Nonelectronic Parts Reliability Data, Rept. NPPD-2, 1985	Reliability Analysis Center. Rome Air Development Center (RADC) Griffiss Air Force Base. NY 13441 – 57000
9	---	SYREL : reliability data bank	Sustems Reliability Service. Safety and Reliability Directorate. UKAEA. Wigshaw Lane Culcheth. Warrington. Lancashire. WA3 4NE. England
10	---	Data on general equipment	Det Norske Veritas. P.O. Box 6060. Etterstad. Oslo 6, Norway



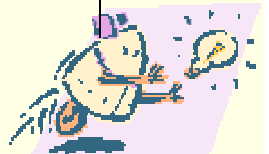
## SUITE

N°	Author or contact person	Source title or type of data	Published in or developed by
11	---	Reactor Safety Study : An Assessment of Accident Risks in U.S. Commercial Nuclear Power Plants. Rept Wash-1400 (NUREG 75/014), Appendix 3 & 4, 1975.	U.S. Nuclear Regulatory Commission*
12	---	IEEE Nuclear Reliability Data Manual, IEEE Std. 500-1977	Institute of Electrical and Electronics Engineers (available from John Wiley & Sons, 605 Third Ave., New-York. NY 10017).
13	---	Data on Nuclear powerplant equipment	ASEA-ATOM. Box 53, 72104, Vastreras 1, Sweden
14	H. P. Bloch F. K. Geitner	<i>Practical Machinery Management for Process Plants : Machinery Failure Analysis and Troubleshooting.</i> 1983, pp. 628-630.	Gulf Publishing Co., Houston, TX



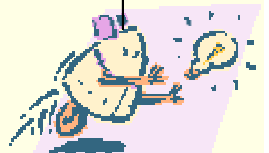
## SUITE

N°	Author or contact person	Source title or type of data	Published in or developed by
15	D. Hauck	Failure Rates of Mechanical Components for Nuclear Reactors : a Literature Survey. AECL Rept. CRNL-739 (SP-R-10)	Chalk River Nuclear Laboratories (CRNL). Atomic Energy of Canada Ltd., Chalk River. Ontario, Canada
16	---	Data related to automobiles	Dept. 56470 (Reliability Engineering). Car Div., AB Volvo. Torshanda. Goteborg, 40508. Sweden
17	---	Data Related to space systems	Product Assurance Div., European Space Research and Technology Center. European Space Research Organization, Domeinweg. Noodwilk, the Netherlands
18	---	(Useful to obtain information on available data sources)	Defense Technical Information Center. Defense Logistics Agency, Cameron Station. Alexandria. VA 22314



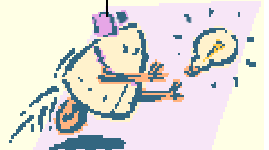
## SUITE

N°	Author or contact person	Source title or type of data	Published in or developed by
19	---	Data Related to space systems	Parts Reliability Information Center (PRINCE). NASA. George C. Marshall Space Flight Center. Reliability Office. Astrionics. Laboratory, Huntsville, AL 35812
20	---	Data on equipment used in steel works	Corporate Engineering Laboratory. 140 Battersea park Road. London SW11 4LZ. uk
21	---	Data on mechanical components	SNIA Viscosa Via Borgonuova 14, 20121 Milano, Italy
22	---	Prototype development (military)	Stephen Howe. (Consultants) Ltd., Kings Avenue House, New Malden, Surrey KT3 4DY, England. UK
23	A. P. Harris	Reliability and maintainability Data for Industrial Plants, Rept. TD-84-3, 1984	A. P. Harris & Associates. Box 6130, Station J. Ottawa. Ontario K2A 1T2, Canada
24	W. H. Dickinson	Report on Reliability of Electric Equipment in Industrial plants	<i>IEEE Transactions on Industrial Applications</i> . July 1962, pp. 132-151



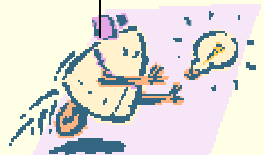
## SUITE

N°	Author or contact person	Source title or type of data	Published in or developed by
25	C. H. Karr G. L. Wagner	R & M-Today's Heating and Cooling versus Solar Energy	<i>Proceedings of the annual Reliability and Maintainability Symposium</i> , 1976, pp. 491-499 (available from IEEE, 345 W. 47 <sup>th</sup> St., New-York, NY 10017)
26	---	Data on equipment used in electric power generation	Reliability Engineering Group, Generation Development and Construction Div., Barwood, Gloucester GL4 7RS, England. UK
27	---	ESA electronic components data bank	Space Documentation Service, European Space Agency, Via Galileo Galilei, 00044 Frascati, Italy
28	---	Satellite and Rocket experiments-data catalog	NASA Space science Data Center, Goddard Space Flight Center. Grennelt. MD 20771
29	---	---	Mechanical Properties Data Center (MPDC), P.O. Box 8128, Columbus, OH 43201



## SUITE

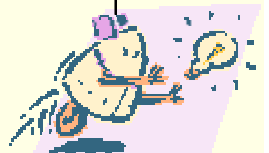
N°	Author or contact person	Source title or type of data	Published in or developed by
30	---	Failure Rates and Failure Modes of Small Rotary Electrical Devices. Rept. AD 267315. Nov. 1961	ASTIA*
31	---	Data on trucks and vans	Commanding general. Attn : DRSTA-QRA, U.S. Army Automative-Tank Co, Warren, MI 48090
32	E. Bassett	General Part Failure Rates for Spacecraft Application, GIDEP. Rept. E0410857, Aug. 12, 1974	Report prepared by TRW Systems Group. GIDEP Operations Center. U.S. Dept. of the Navy. Naval Weapons Station, Seal Beach, Corona Annex, Corona, CA 91720
33	---	Data on components used in nuclear powerplants	Process Engineering, Euratom Joint Research Center, 21020 Centro Eurotom di ISPRA, Varese, Italy
34	---	Failure Assesment handbook. Rept. RD-101, Feb. 1, 1963	Astro Reliability Corp., 14827 Ventura Blvd., Sherman Oaks, CA





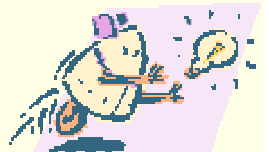
## SUITE

N°	Author or contact person	Source title or type of data	Published in or developed by
35	---	Component Parts Failure Data Compendium	Engeneering Dept., Electronic Industries Association. 11 W. 42 <sup>nd</sup> St., New-York. NY 10036
36	G. Guth	Develoment of Nonelectronic Part Cycle Failure Rates, Rept. 17D/A-050 678, Dec. 1977	Martin Marietta Corp., Orlando, FL*
37	---	Reliability analysis Data for Systems and Component Design Engineers. Rept. TRA-873-74, Sept.1, 1961	Missile and Space Vehicle Dept., general Electric Co.*
38	M. Anderson	Nuclear Reliability Assurance Data Source guide, Rept. ORNL-EWG-TM-2, Nov. 1976	Union Carbide Corp.,Oak Ridge, TN (available as GIDEP Rept. F010-2254. GIDEP Operations Center, U.S. Dept. of the navy, Nava Weapons Station, Seal Beach, Corona Annex, Corona, CA 91720)
39	---	Data on equipment used in steel works	Italsider, Via Corsica 4, 16128 Genova, Italy



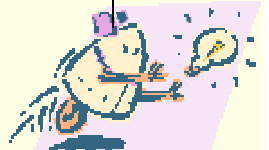
## SUITE

N°	Author or contact person	Source title or type of data	Published in or developed by
40	---	Failure Rates-Reliability engineering Data Series	Avco Corp., Research and Advanced Development Div., 201 Lowell Street, Wilmington, MA
41	---	Information service in mechanical engineering	Data Courier, Inc., Dept. DM, 620 South Fifth ST., Louisville, KY 40202
42	---	Information on metals	Defense Metals Information Center. Battelle Memorial Institute, 505 King Ave., Columbus. OH 43201
43	---	Data on Space equipment	Centre National d'Études Spécial (CNES), c/o Matra. 37 av. Louis Breguet, 78140 Velizy, France
44	---	Data on equipment used in fossil fuel powerplants	National Electricity Generating Board (ENEL), Bastioni di Porta Volta 10, 20121 Milano, Italy
45	---	Data on equipment used inelectric power generation	Equipment Reliability Information System (ERIS), Canadian Electrical Association, Montréal, Québec, Canada



## SUITE

N°	Author or contact person	Source title or type of data	Published in or developed by
46	J. P. Drago R. J. Borkowski D. H. Pike F. F. Goldberg	The In-plant Reliability Data Base (IPRD) for Nuclear Power Plant Components : Data Collection and Methodology Report, Rept. NUREG/CR-2641 (ORNL/TM 8271)	
47	B. S. Dhillon	Human Reliability : With Human Factors , 1986 (a number of human reliability data sources are listed in this text)	Pergamon Press, 395 Saw Mill River Rd., Elmsford, NY 10523
48	S. O. Nilsson	Reliability Data on Automotive Components	<i>Proceedings of the Annual Reliability and Maintainability Symasium.</i> 1975. Pp. 276-179 (available from IEEE, 345 W. 47th St., new-York. NY, 10017
49	---	Insurance facts (disaster impact data)	Insurance Information Institute, 110 William ST., New-York NY 10017



## SUITE

N°	Author or contact person	Source title or type of data	Published in or developed by
46	J. P. Drago R. J. Borkowski D. H. Pike F. F. Goldberg	The In-plant Reliability Data Base (IPRD) for Nuclear Power Plant Components : Data Collection and Methodology Report, Rept. NUREG/CR-2641 (ORNL/TM 8271)	
47	B. S. Dhillon	Human Reliability : With Human Factors , 1986 (a number of human reliability data sources are listed in this text)	Pergamon Press, 395 Saw Mill River Rd., Elmsford, NY 10523
48	S. O. Nilsson	Reliability Data on Automotive Components	Proceedings of the Annual Reliability and Maintainability Symposium. 1975. Pp. 276-179 (available from IEEE, 345 W. 47th St., new-York. NY, 10017
49	---	Insurance facts (disaster impact data)	Insurance Information Institute, 110 William ST., New-York NY 10017



## SUITE

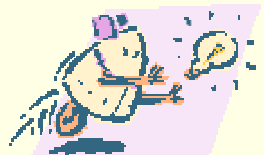
N°	Author or contact person	Source title or type of data	Published in or developed by
50	---	Data on main steam piping (ships)	NAVSHIPS report, Maintenance Support Office, Naval Shup Systems Command, U. S. Dept. of the Navy. Airlington, VA
51	---	Data on piping failure	NASA Literature Search, Information Tisco Inc., NASA Scientific and Technical Information Facility. College Park. MD
52	A. E. Green A. J. Bourne	<i>Reliability Technology</i> , 1972, pp. 567-568	John Wiley & Sons, Chichester. UK
53	---	Data on Pipeline leaks	Office of the Ppipeline Safety, U.S. Dept. of Transportation (DOT). Office of the Secretary, Washington, D. C.
54	---	Data on piping failure (GEAP)	Atomic Power Dept., General Electric Co., San jose, CA



## SUITE

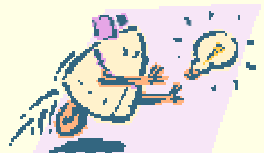
N°	Author or contact person	Source title or type of data	Published in or developed by
55	T. Anderson	Pipe Reliability An Investigation of Pipeline Failure Characteristics and Analysis of Pipeline Failure Rates for Submarine and Cross-Country Pipelines	<i>Journal of Petroleum Technology</i> , April 1983. Pp. 709-717
56	G. L. Wells	Safety in Process Plant Design, 1980. p 50	John Wiley & Sons, 605 Third Ave., New-York. NY 10017
57	---	Reliability Prediction on Electronic Equipment	MIL-HDBK-217, Dept. of Defense, Rome Air Development Center, Griffiss Air Force Base, New-York

\* Available from National Technical Information Service, U.S. Department of Commerce. 5285 Port Royal RD., Springfield. VA 22151.



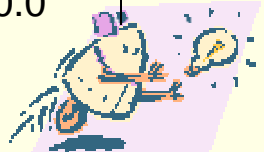
The failure modes are given below for various mechanical items :

1. Gages : leaking (39%), broken (26%), out of ajustement (14%), intermittent (4%), binding (9%), and other (8%)
2. Fans : no movement (11%), noisy (25%), intermittent (7%), out of ajustement (14%), and other (43%)
3. Clutches : displaced (17%), worn out (66%), and jammed (17%)
4. Bearings : worn out (54%), binding (12%), scored (5%), sticking (5%), loss of lubrication (9%), and other (15%)
5. Gears : broken (8%), worn out (54%), binding (12%), jammed (8%), stripped (12%), and other (10%)
6. Heat exchangers : leaking (70%), improper flow (8%), broken (4%), out of specification (4%), cracked fractured (9%), and other (5%)
7. Seals : cracked/fractured (5%), leaking (6%), deteriorated (28%), ripped/cut/torn (51%), and other (10%)
8. Brakes : scored (12%), worn out (58%), leaking (27%), overheated (1%), and other (2%)
9. Filters : leaking (73%), cracked/fractured (18%), out of tolerance (3%), broken (3%), improper flow (1%), and other (2%)
10. Hydraulic pumps : noisy (6%), leaking (61%), intermittent (3%), cracked/fractured (9%), out of specification (4%), improper flow (7%), and other (10%)



## Failure Rates for Selected Mechanical Items

N°	Mechanical item	Failure rate/10 <sup>6</sup> h	N°	Mechanical Item	Failure rate/10 <sup>6</sup> h
1	Pipes	0.2	19	Heat exchangers	6.11-244.3
2	Bellows	5.0	20	Pivot	1.0
3	Ball valves	0.5	21	Washers	0.5
4	Nuts or bolts	0.02	22	Flanges	5.69
5	Conveyor belts (light load)	3.6-19.0	23	Knobs	0.09
6	Pipe joints	0.5	24	Shims	0.003
7	Motors, general	10.0	25	Mechanical joints	0.2
8	Heavily stressed shafts	0.2	26	Pistons	1.0
9	Conveyor belts (heavy load)	20.0-140.0	27	Hinges	0.02-5.5
10	Brake assemblies (mechanical)	2.8-7.6	28	Pulleys, idler (roller)	0.025-0.16
11	Hair spings	1.0	29	Pumps, all types	65.74
	Gears		30	Valves, all types	11.33
12	Helical	1.0	31	Gaskets	0.5
13	Spurs	10.0	32	Relief valves	0.5-10.0
14	Ducts	1.0	33	Cylinders	0.1
15	Brake Assemblies (hydraulic, pneumatic)	0.8-114.0	34	Solenoid Valves	0.66-30.0
16	Compressors	0.84-198.0		Bearings	
	Seals		35	Roller	1.139-7.31
17	O-Ring	0.2	36	Ball (heavy duty)	20.0
18	Sliding	3.0	37	Sleeve	0.008-7.3
			38	Ball (light duty)	10.0





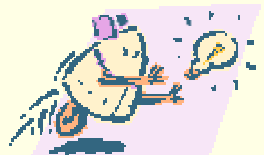
## SUITE

N°	Mechanical item	Failure rate/10 <sup>6</sup> h
39	Filters, blockage	1.0
40	Diesel engines	30.3-1733.0
41	Rotating seals	4.4
42	Gages, dial Type	0.5-21.5
43	Clamps, cable	2.0
44	Cups, grease	0.091
45	Motors, Stepper	5.0
46	Tachometers	5.0
47	Rivets	0.01-1.5
48	Welded fittings	0.01-0.5
49	Inset locks	4.0-27
50	Shackles	0.05



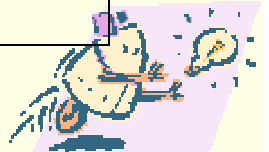
## Failures Rates for Selected Mechanical Items (Use Environment : Airborne)

N°	Mechanical item	Failure rate/10 <sup>6</sup> h	Data source	
			Military	Commercial
1	Instrument counter Fans	346.985	X	
2	Centrifugal	89.200	X	
3	Centrifugal	21.739		X
4	Axial	211.557	X	
5	Axial	5.510		X
6	Power transmitter, mechanical	10.0		X
7	Gimbal	7.829	X	
	Pumps			
8	Coolant	657.251	X	
9	Engine driven	18.519		X
10	Electric motor driven	6.889		X
11	Electric motor driven	142.857	X	
12	Thermostat	233.746	X	
13	Pump, hydraulic	573.711	X	
	Bearings			
14	Roller	0.863	X	
15	Ball	5.133	X	
16	Ball	1.372		X
17	Seal, O-ring	2.387	X	
18	Shock absorber, mount	6.309	X	
19	Tank, storage	45.404	X	
	Valves			
20	Relief	26.796	X	
21	Solenoid	28.128	X	
22	Solenoid	29.827		X
23	Gate	32.448	X	
24	Check	30.277	X	
25	Manual actited	32.895	X	
26	Servo	38.730	X	



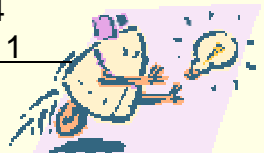
## Failure Rates for Selected Mechanical Items (Use Environment : Ground, Mobile)

N°	Mechanical item	Failure rate/10 <sup>6</sup> h	N°	Mechanical Item	Failure rate/10 <sup>6</sup> h
1	Gearbox (reduction)	18.755	17	Washers	
	Gears		17	Flat	0.165
2	Spur	5.95	18	Lock	0.116
3	Helical	19.725	19	Spring	4.302
4	Bevel	2.941	20	Tank (non pressurized)	529.100
	Filters			Bearings	
5	Liquid	14.944	21	Ball	6.040
6	Gas (air)	3.242	22	Roller	8.323
7	Duct (general)	4.267	23	Sleeve	4.661
	Couplings		24	Bellows (general)	13.317
8	Rigid	1.908	25	V-belt	16.812
9	Flexible	9.987	26	Axle (general)	9.539
10	Clutch (friction)	38.155	27	Antenna (radar)	114.812
11	Compressor (general)	33.624	28	Crankshaft (general)	33.292
12	Actuator (mechanical)	33.624		Blowers and fans	
13	Shock absorbers (resilient)	19.078	29	Centrifugal	4.84
14	Slip rings (general)	263.158	30	Axial	15.608
	Valves		31	Gear (antirotation)	1578.948
15	Hydraulic	19.608	32	Gaskets and seals	
16	Pneumatic	16.537		(dynamic)	4.643



## Failure Rates for Selected Mechanical Items (Use Environment : Ground, Fixed)

N°	Mechanical item	Failure rate/10 <sup>6</sup> h	N°	Mechanical Item	Failure rate/10 <sup>6</sup> h
1	Duct (general)	2.902	20	Pumps	
2	Clutch (friction)	5.318	21	Pneumatic	9.420
3	Bushings (general)	6.114	22	Vacumm-ring seal type	11.111
	Bearings		23	Instruments	
4	Sleeve	4.94	24	Indicator	4.12
5	Ball	2.237	25	Ammeter	8.000
6	Brake (electronmecanical)	16.00	26	Gear (spur)	3.152
7	Fittings (threaded)	2.4	27	Gaskets and seals (static)	3.004
8	Gaskets ans seals (dynamic)	3.295	28	Filters	
	Gears		29	Liquid	6.000
9	Helical	5.000	30	Gas-air	10.635
10	Bevel	1.333	31	Slip rings (general)	0.667
11	Hypoid	5.000	32	Solenoids (rotary)	33.906
	Keyboards		33	Sprocket (general)	5.693
12	General	6.909	34	Solenoids (rotary)	33.906
13	Mechanical	4.666	35	Tank (pressurized)	8.000
14	Knob (general)	2.081	36	Valves	
	Pumps		37	Solenoid operated	11.111
15	Vacuum	10.610	38	Pneumatic	4.000
16	Vacumm-lobe type	244.4444	39	Hydraulic	6.000
17	Pulley (gear belt)	5.287	40	Washer (lock)	0.586
18	Metal tubing (general)	0.150	37.3	Thermocouple (general)	1.333
19	Lamp holder (general)	4.540	8	Spring (torsion)	14.296
			39	Washer (flat)	0.614
			40	Air Conditioner (comfort)	711.111



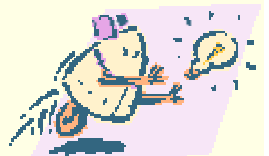
## LISTE DE BASE DE DONNEES MECANIQUES

- ERS/HIP-01-302 (remplace QRA 14)
- NPRD 3
- IEE Std 500
- AVCO CORPORATION
- FARADA
- Component Rate Failure Data
- TR 75-22
- WASH - 1400
- EDF
- OREDA



## LES TABLES

- Conditions d'utilisation non spécifiées.
- Hypothèse du  $\lambda$  constant.
- Durées de vie inexistantes.
- Critères de rejet.
- Limitation des modèles proposés.
- Sources utilisées.



N° fiche : 3	1	Identification du fichier : NPRD2 remplace le NPRD1 sorti en 1978 (NPRD3) Référence non électronique    Parts reliability data 2			2
Domaine d'application	3	Nature du fichier : Recueil (disquette P.C.)	4	Moyen d'accès – Langage d'écriture Feuilles en anglais	5
Electronique		Fiabilité		Date de création : Été 1981	6
Electromécanique		Disponibilité		Temps d'accès	7
Hydraulique		Maintenabilité		Immédiat	
Mécanique		Sûreté		Modes d'obtention	8
Pneumatique				Achat – Location - Don	
Pyrotechnique					
Mécanisme					
Divers		Coût		Détenteur :	9
		Opérationnel		- RADC : RAC	
		Stockage		- CECKRIS International (voir au verso)	
				- CENT	
Militaire		Grand public		Principaux utilisateurs : 27	
Civil				Toute l'industrie plus particulièrement l'avionique	28
				Références : Américaines Ce recueil a été réalisé à l'IIT sous contrat de RADC	
Possibilité d'adaptation	10	Possibilité d'évolution	11	Document disponible : Le recueil	12
		Oui		Portabilité du fichier	13
				OUI	
Principale données d'entrée/de base	14	Type du composant, environnement, application militaire ou commerciale			
Mode d'obtention des résultats	15	Lecture de tableaux			
Résultats obtenus	16	Taux de défaillance $\lambda$ , au maximum de vraisemblance Taux de défaillance $\lambda$ , à 60% unilatéral et bilatéral			
Critiques (+ avantages/- Inconvénients)	17	+Lecture du $\lambda$ immédiate, recueil de donnée utile pour une pré étude -le taux de défaillance en stockage n'est pas toujours donné			
Recommandations d'emploi	18	Utilisable seul Grandes facilités d'emploi sur GLOBAL			
Spécification de qualification	19	Année de sellrete du parc	20	Périodicité de mise à jour	21
OUI		Continue depuis sa création		1978 - 1981	
Richesse du parc	23	Personne à contacter	24	Coordonnées pour mise à jour	25
				Diponibilités des données - Temps écoulés	26



## CALCUL DE LA PROBABILITE D'APPARITION DES EVENEMENTS INDESIRABLES

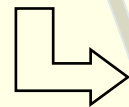
→ Hypothèses : taux de défaillance  $\lambda$  constant

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\lambda t} \approx \lambda t$$

→ Moyens de calcul

⇒ Manuels

⇒ Informatiques



Intervalles de confiance sur les résultats





## 3. NOUVEAUX MODELES



## POURQUOI

- Insatisfait par rapport aux méthodes actuelles
  - ➔ Pour l'aspect quantitatif
    - ▮ Manque de finesse pour l'approche base de données.
    - ▮ Manque de standardisation des méthodes spécifiques de la mécanique.
  - ➔ Pour l'aspect qualitatif
    - ▮ Besoin non satisfait de mémoires techniques.



## OBJET

# NOUVELLES APPROCHES POUR EVALUER LA FIABILITE DE COMPOSANTS MECANIQUES



## LES METHODES ACTUELLES

→ La fiabilité mécanique repose sur trois grands types d'approche :

➔ Première approche : base de données

- ☐  $\lambda$  constant.
- ☐ Source : nombre d'heures, nombre de pannes, ...

➔ Deuxième approche : composant standard

- ☐ Modèle de calcul pour pièce connue : roulement, engrenage, palier, ...

➔ Troisième approche : composants mal connus

- ☐ Outils spécifiques de la mécanique (fatigue classique, oligocyclique, meca-rupt contrainte-résistance, ...)
- ☐ Applicables aux : structures, pièces prototypes, etc...



## CRITIQUES DE CES APPROCHES

### → Première approche : base de données

- ⇒  $\lambda = \text{CST}$  → problème fatigue, usure, ...
- ⇒ Mauvaises connaissances des sources.
- ⇒ Approche peu précise :
  - ▢ paramètres de fonctionnement
  - ▢ conditions environnantes
  - ▢ généralisation de matériels prototypes.

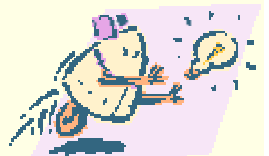
### → Deuxième approche : composant standard

- ⇒ Domaine d'utilisation des modèles souvent restreint ou mal connu.
- ⇒ Relativement peu de modèles.



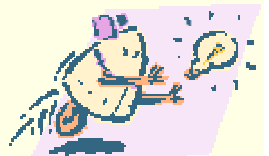
## CRITIQUES DE CES APPROCHES (suite)

- Troisième approche : composants mal connus
  - ⇒ Nécessité d'être mécanicien.
  - ⇒ Ne débouche pas forcément sur l'obtention de taux de défaillance
    - ▣ Proba de défaillance
    - ▣ Nombre de cycles à la rupture
    - ▣ ...
    - ▣ ⇒ ne permet pas de modélisation
  - ⇒ Méthode souvent coûteuse (C/R ⇒ Connaissance de dispersion)
  - ⇒ Nécessite un savoir-faire
  - ⇒ ⇒ problème de la mémoire technique
  - ⇒ Approche assez mais fine.



## ORIENTATIONS POSSIBLES

- Développer des modèles suffisamment précis, et assez facilement manipulables (analogie avec approche électronique)
- Développer des outils qui favoriseraient la constitution de «mémoire technique».



## LES NOUVEAUX MODELES

### → Origine ⇒ groupe T.T.C.P.

- ⇒ The Technical Cooperation program (USA, United Kingdom, Canada, Australia, and New-Zealand)
- ⇒ Participation US Army : A M S A A

### → La méthode

- ⇒ Décomposition du système en composants élémentaires
- ⇒ Calcul du taux de défaillance des composants élémentaires avec prise en compte :
  - ▣ taux de charge,
  - ▣ paramètres de fonctionnement,
  - ▣ environnement.





## LES NOUVEAUX MODELES (suite)

### → Les formules

#### ⇒ le système

$$\lambda_p = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p + \dots + \lambda_n$$

Le composant élémentaire

$$\lambda_p = \lambda_b * \prod_{k=1}^K C_k$$

Taux de base

Facteurs d'altération calculable par formules, tableaux, abaques issus des modèles physiques.



## LE TYPE D'EQUIPEMENT CONCERNE

- Soupape
- Joints
- Ressort
- Roulement
- Boîte de vitesse
- Embrayage
- Frein
- Moto pompe
- Compresseur
- ...



## EXEMPLE

### → La soupape

$$\lambda_p = \lambda_1 + \lambda_2 \dots + \lambda_6$$

ou	$\lambda_1$	joint
	$\lambda_2$	assemblage du manchon
	$\lambda_3$	ressorts
	$\lambda_4$	logement soupape
	$\lambda_5$	...

### → Le joint

$$(1) \lambda_1 = \lambda_b * C_P * C_Q * C_{DC} * C_H * C_f * C_V * C_T * C_\mu * C_W$$

$C_P$	effet de pression
$C_Q$	importance de la fuite tolérée
$C_{DC}$	état de surface
$C_H$	...



## FONDEMENT DES FACTEURS

$$\lambda_1 + \lambda_b \frac{Q_a}{Q_f} \text{ (joint)}$$

$Q_f$  = fuite admissible (S.T.)

$Q_a$  = fuite réelle

calcul 
$$Q_a = \frac{(P_s \cdot P_o^2) (r_2 + r_1)}{24 v_a P_o r_1 r_2} (H^3)$$

Avec ←

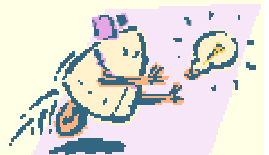
$P_s$  = pression du système

$P_a$  = Pression aval ou atmosphérique

$v_u$  = Viscosité du fluide

⋮

$H$  = paramètre de conduction





:

H = paramètre de conduction

$$H = 10^{-11} \left( \frac{C}{M_p} \right)^3 f 1.^{-5}$$

f = fini de surface



Calcule par  $Z = f (\alpha n Q d T)$

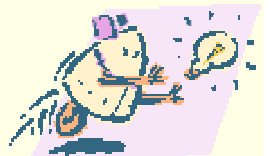


Ceci conduit à :

$$\lambda_1 = \lambda_b \cdot f \frac{P_s^1 \cdot P_o^2}{Q_f v_a P_o} * \left( \frac{r_2 + r_1}{r_2 \cdot r_1} \right) * H^3 * (ndT)$$

Calculable par tableaux, abaques, formules simples par :

$$(1) \lambda_1 = \lambda_b \prod_i C_i$$



## LA MEMOIRE TECHNIQUE

### → APPORT DE L'INFORMATIQUE

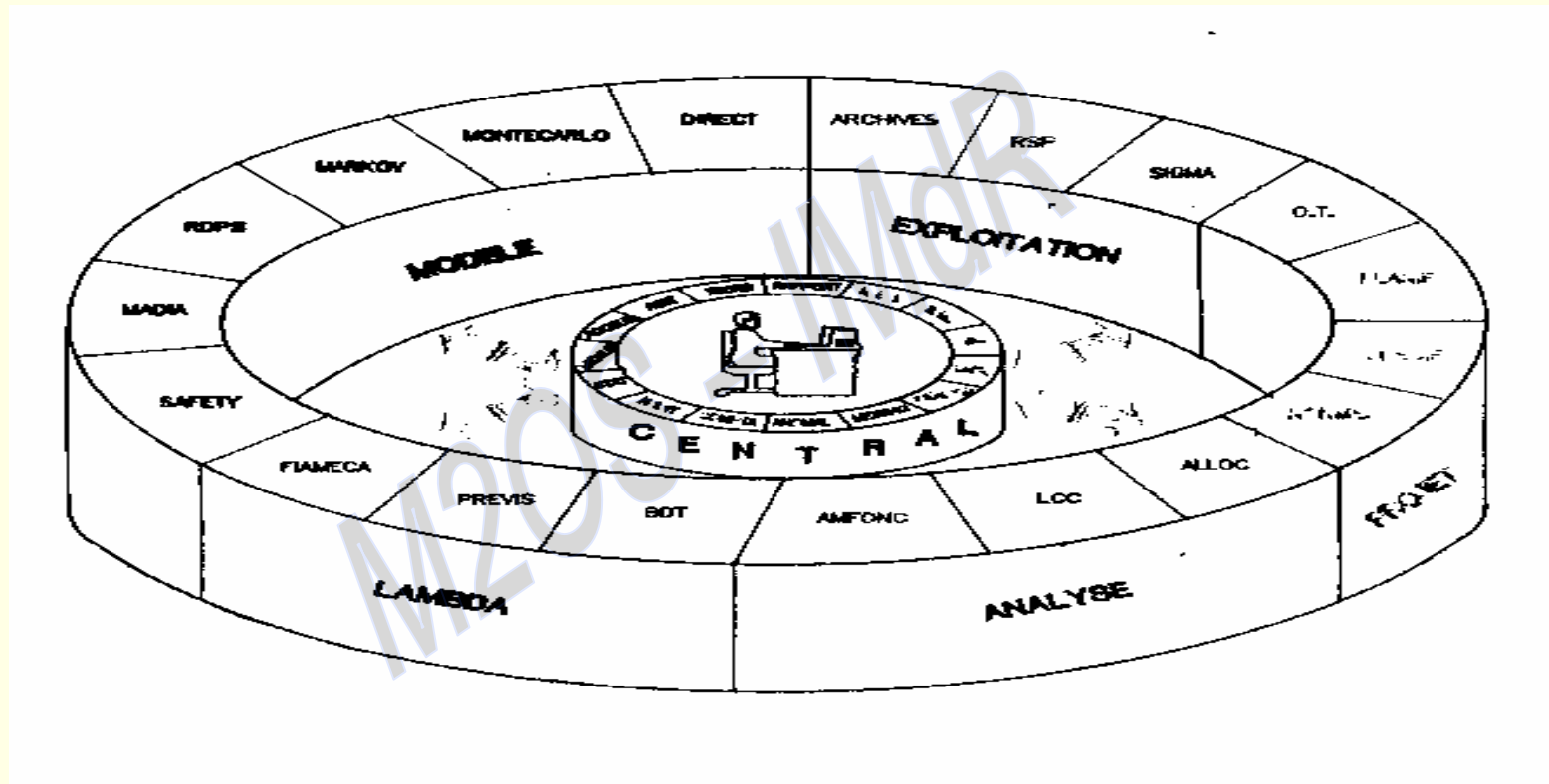
- ➔ Enrichissement des bases de données
- ➔ Les outils de l'I.A.
  - ☰ Diagnostic : développements spécifiques pour problèmes spécifiques
  - ☰ Aide-mémoire : mise en mémoire de démarches logiques
    - visualiser les enchaînements
    - Utilisable par non spécialistes
    - Enrichissement rapide du système



## CONCLUSIONS

- Efforts de standardisations des méthodes de fiabilité en mécanique
- Modèles prenant en compte les phénomènes physiques
- Compléments pour les problèmes pointus
  - ➔ Apport de l'informatique
    - ☒ B.d.D.
    - ☒ Mémoire technique (I.A.)







## OBJET TECHNIQUE

- Garder la mémoire technique des problèmes rencontrés sur un objet (enregistreur embarqué sur SPOT)

constat de panne → hypothèses de causes possibles → hypothèses de causes probables

↑  
Scénarios

↓  
Recommandations

### MECA

Définition : atelier de fiabilité en mécanique

Fonctions : mise à la disposition du fiabiliste des outils spécifiques de fiabilité mécanique.  
Aide au choix de l'outil le mieux adapté au problème posé.



## Fiabilité en électronique

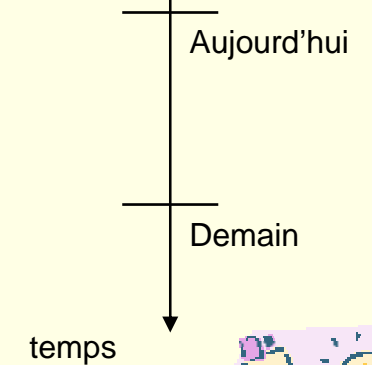
- Spécifications de fiabilité relatives aux systèmes électroniques (Normes US, ...)
- ↓
- Développement de méthodes
- ↓
- Outils informatiques de calcul de fiabilité (exp. PREVIS, MARKOV, RPDS, ...)

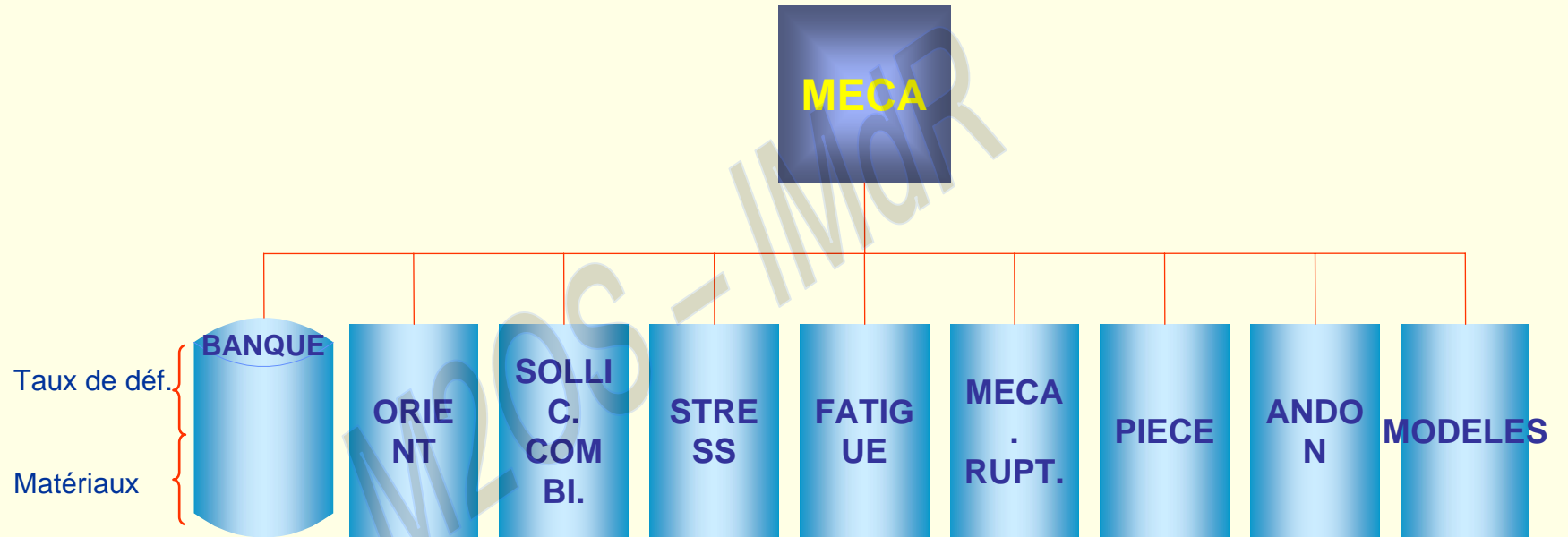
## Fiabilité en mécanique

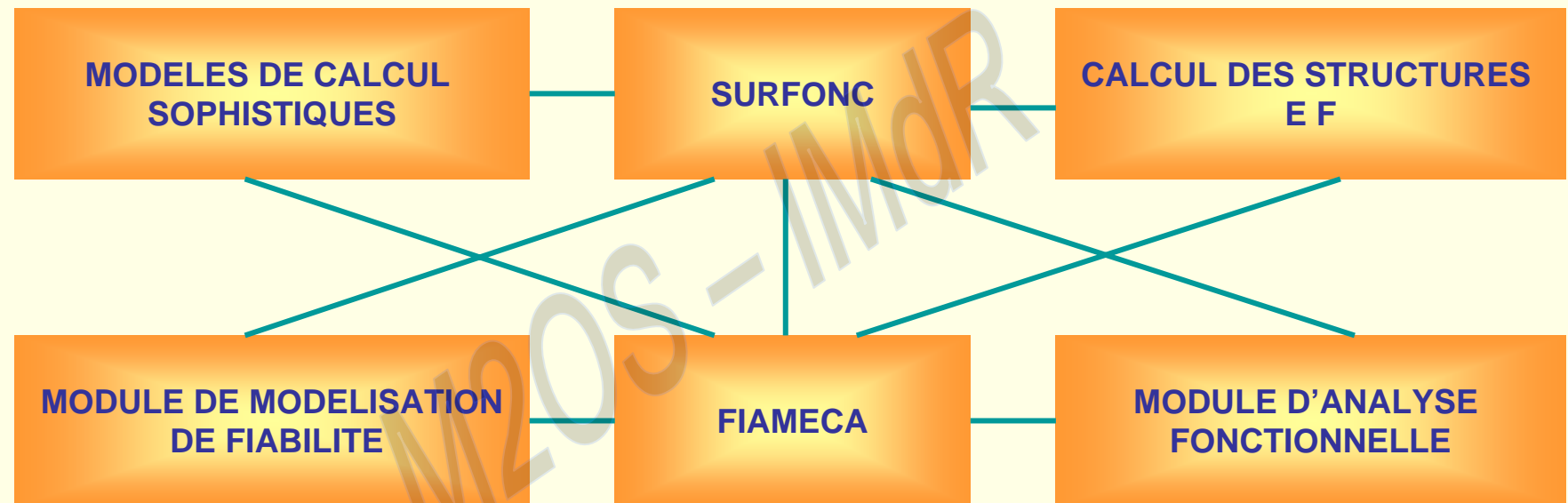
- Spécifications de fiabilité relatives aux systèmes mécaniques. Nouvelles exigences en fiabilité mécanique.
- ↓
- Méthodes simples manuelles et développement de méthodes plus évoluées.
- ↓
- Outil informatique FIAMECA

## Mécanique

- Développement pour le mécanicien de méthodes et d'outils informatiques sophistiqués (éléments finis, ...)







## MODULES DE MECA

### → MODELES

- ➔ Modélisation simple de la fiabilité par des données à taux de défaillance constants (bloc diagramme fiabilité)

### → ANDON

- ➔ Analyse de données expérimentales

### → PIECE

- ➔ Calculs de fiabilité sur des pièces particulières (roulements, engrenages,...)

### → MECARUPT

- ➔ Calculs en mécanique de la rupture
  - K1C
  - $da/dn$ ,
  - amorçage, ...

### → FATIGUE

- ➔ Calculs en fatigue
  - Courbe S.N.,
  - Goodmann,
  - Dommage,
  - Fatigue oligocyclique, ...



## MODULES DE MECA (suite)

### → STRESS

➔ Calculs contrainte résistance utilisant des outils tels que :

- ▣ Algèbre des V.A.
- ▣ Simulation de monte carlo

### → SOLLICITATIONS COMBINEES

➔ Traitement des contraintes multiaxiales

- ▣ Von misés
- ▣ Tresca, ...

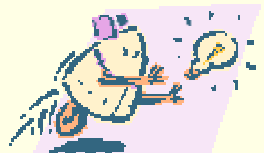
### → ORIENT

➔ Aide à l'analyse FIAMECA

### → BANQUE

➔ Banque de données

- ▣ NPRD3
- ▣ Données personnelles sur composants
- ▣ Caractéristiques matériaux, ...



## 4. EXEMPLES



## SOMMAIRE

- 4.1. Caisse de Métro
- 4.2. Comparaison des méthodes
- 4.3. Exemple sur un pont de manutention





## 4.1. Caisse de Métro



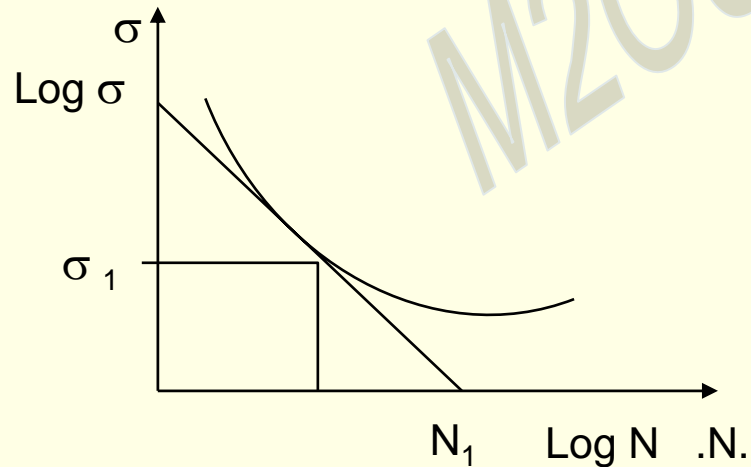
## CALCUL - CAISSE

Notations

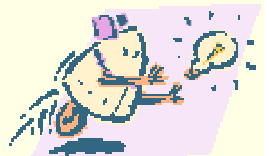
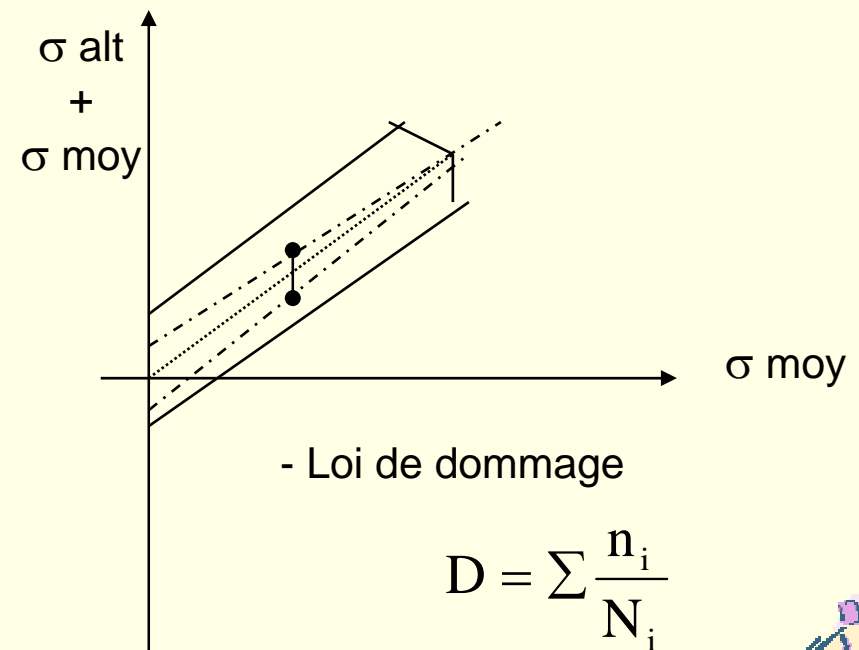
$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{1-X}{1+X}$$

$$X = \frac{\sigma_{\text{alt}}}{\sigma_{\text{moyen}}}$$

- Courbe de Wohler



- Diagramme de Goodmann



## 1ère étape

Tableau Rapports R - cycles/Km - charge

	R1	R2	R3
W1	n1	n2	n3
2/3W2			
W2			

## 2ème étape

Pondération pour 25 et proba charge

- soit  $4,6 \times 10^6$  Kms

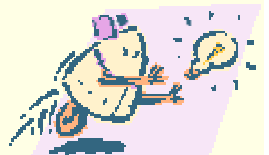
-  $W1 = 0,49 - 0,37$

$2/3W2 = 0,25$

$W2 = 0,23$

$3/2W2 = 0,03$

$W3 = 0,06$



### 3ème étape

- Choix d'une contrainte moyenne  $\sigma$  moy 6.8 hbars sous W1
- Calcul d'un équivalent à moyenne nulle.

### 4ème étape

- Calcul de dommage. Pour chaque couple R - W

- calcul de  $\frac{n_i}{N_i}$

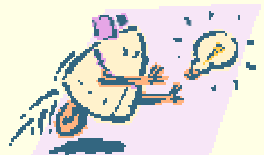
- Sommation des dommages, soit

$$\sum \frac{n_i}{N_i} = D$$

### 5ème étape

- Calcul de proba de rupture

$$U = \frac{D - \mu M}{\sqrt{\sigma^2 M}} = 1 - F = R$$

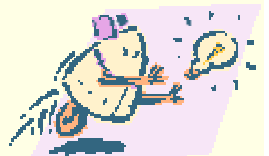


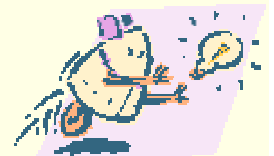
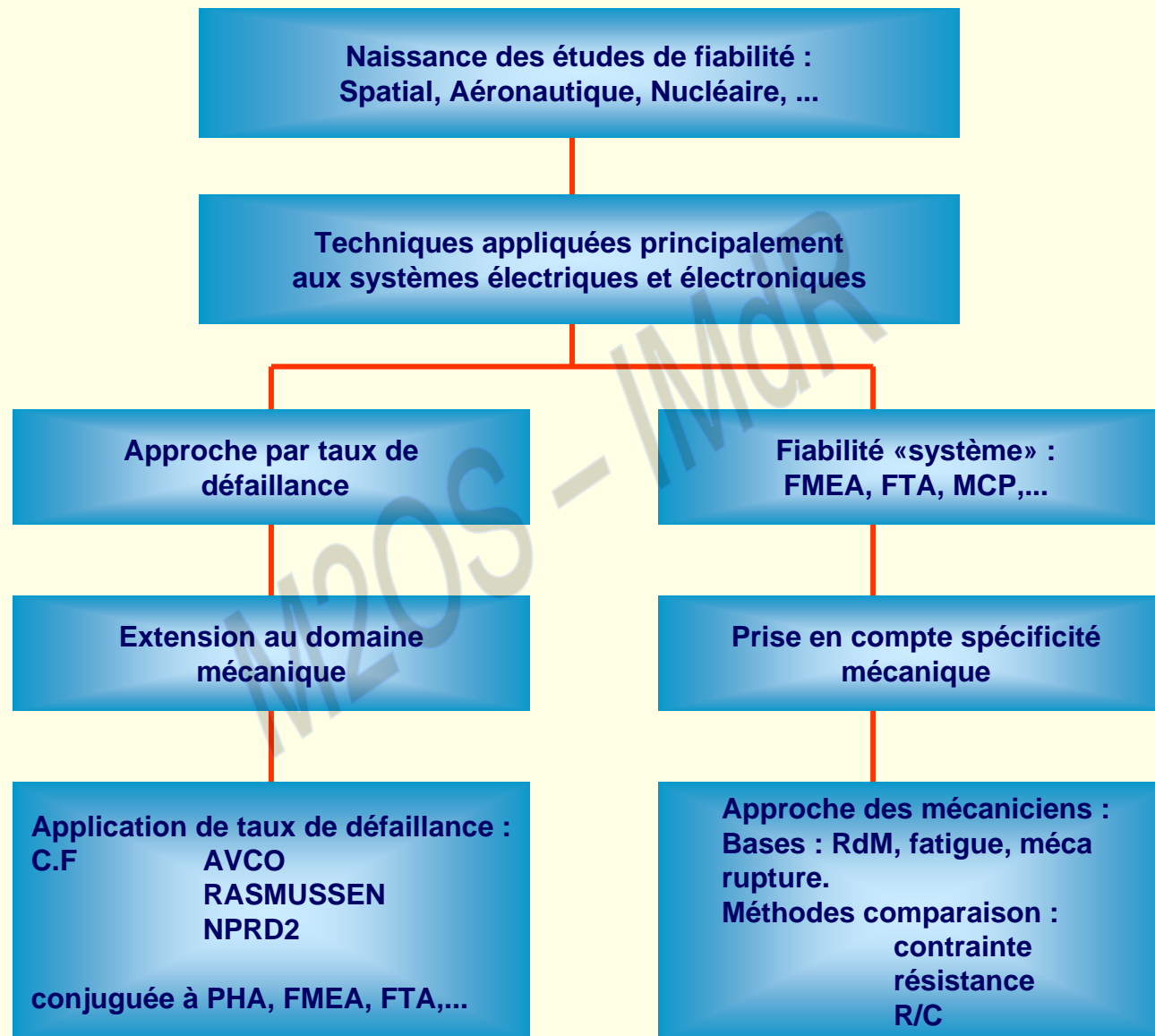
## 4.2. Comparaison des méthodes



## METHODE UNIFIEE D'APPROCHE PROBABILISTE DES SYSTEMES MECANIKUES

- L'approche des «Fiabilistes-Systeme».
- L'approche des «Mécaniciens».
- Méthodes communes d'analyse qualitative.
- Intérêts et limites des deux approches.
- Richesse d'une approche «unifiée».
- Exemple d'application dans le domaine nucléaire.





## POINTS COMMUNS AUX DEUX APPROCHES : ANALYSE QUANTITATIVE

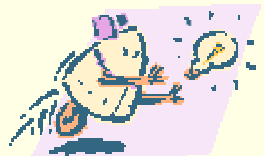
Connaissance du système et de ses  
conditions d'utilisation

Analyse préliminaire du risque

Analyse des modes de défaillance  
et de leurs effets

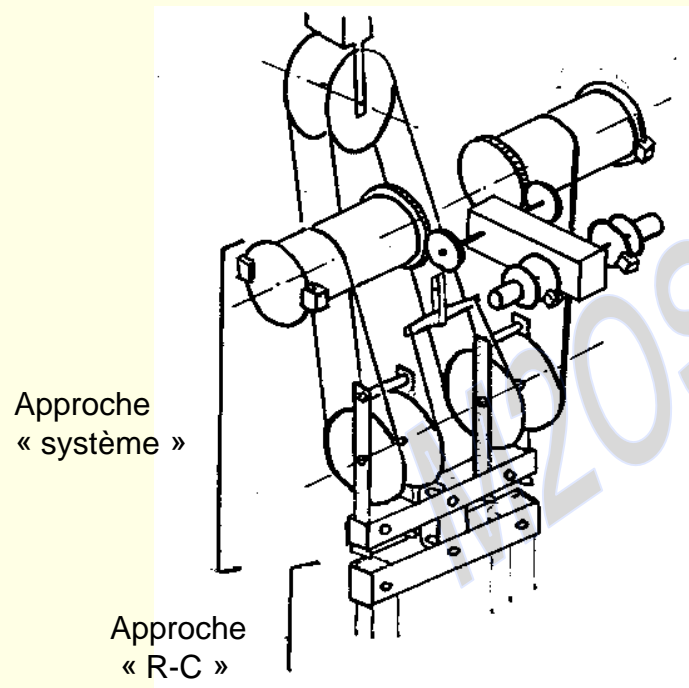
Modélisation du système et  
de son fonctionnement

Recherche des combinaisons  
de défaillances





## CONNAISSANCE DU SYSTEME ET DE SES CONDITIONS D'UTILISATION



### → Recueil de l'information

#### ↻ Niveau technologique

- ▣ Rôle de chaque composant
- ▣ Mode d'intervention
- ▣ Performances requises

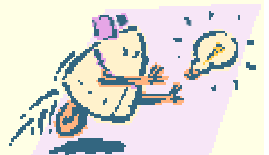
### → Conditions d'utilisation

#### ↻ Configurations de fonctionnement

#### ↻ Conditions d'utilisation :

- ▣ Procédures de conduite
  - Test
  - Entretien

#### ↻ Conditions d'environnement



## ANALYSE PRELIMINAIRE DU RISQUE

### → But :

#### ⇒ Identifier

- ▣ Les éléments dangereux
- ▣ Les situations dangereuses
- ▣ Les accidents potentiels

#### ⇒ Déterminer

- ▣ Les gravités des conséquences

#### ⇒ Définir

- ▣ Les règles de conception et procédures permettant d'éliminer ou de maîtriser les risques

→ Analyse effectuée dès le début de la conception et réactualisée périodiquement.



## ANALYSE DES MODES DE DEFAILLANCE ET DE LEURS EFFETS (F.M.E.A.)

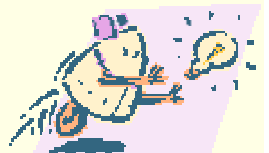
### → Objet :

➔ Démarche inductive, considérant chaque composant, en vue de :

- ▢ Analyser les conséquences de chaque mode de défaillance
- ▢ Identifier les modes de défaillance critiques
- ▢ Préciser les moyens de détection
- ▢ Déterminer les dispositions palliatives
- ▢ Mettre en évidence les causes possibles
  - de défaillances individuelles des composants
  - de défaillances de cause commune

### → Limitation :

➔ Ne permet pas de traiter les défaillances multiples



## Analyse des modes de défaillance et leurs effets (FMEA)

Identification du composant	Fonctions états	Modes de défaillance	Causes possibles	Effets/système	Moyens détections	Fréquence essais
12. Point fixe	Fixer câble sur châssis	Lâcher	Matériau surcontr.	Idem 9	Arrêt manœuvre	
13. Mouflé inférieur	Axe commun aux 4 poulies et aux 2 chaînes	Rupture	Choc	Chute de la charge		
14. Crochet	Accrochage charge	Rupture		Chute de la charge		

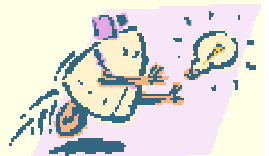


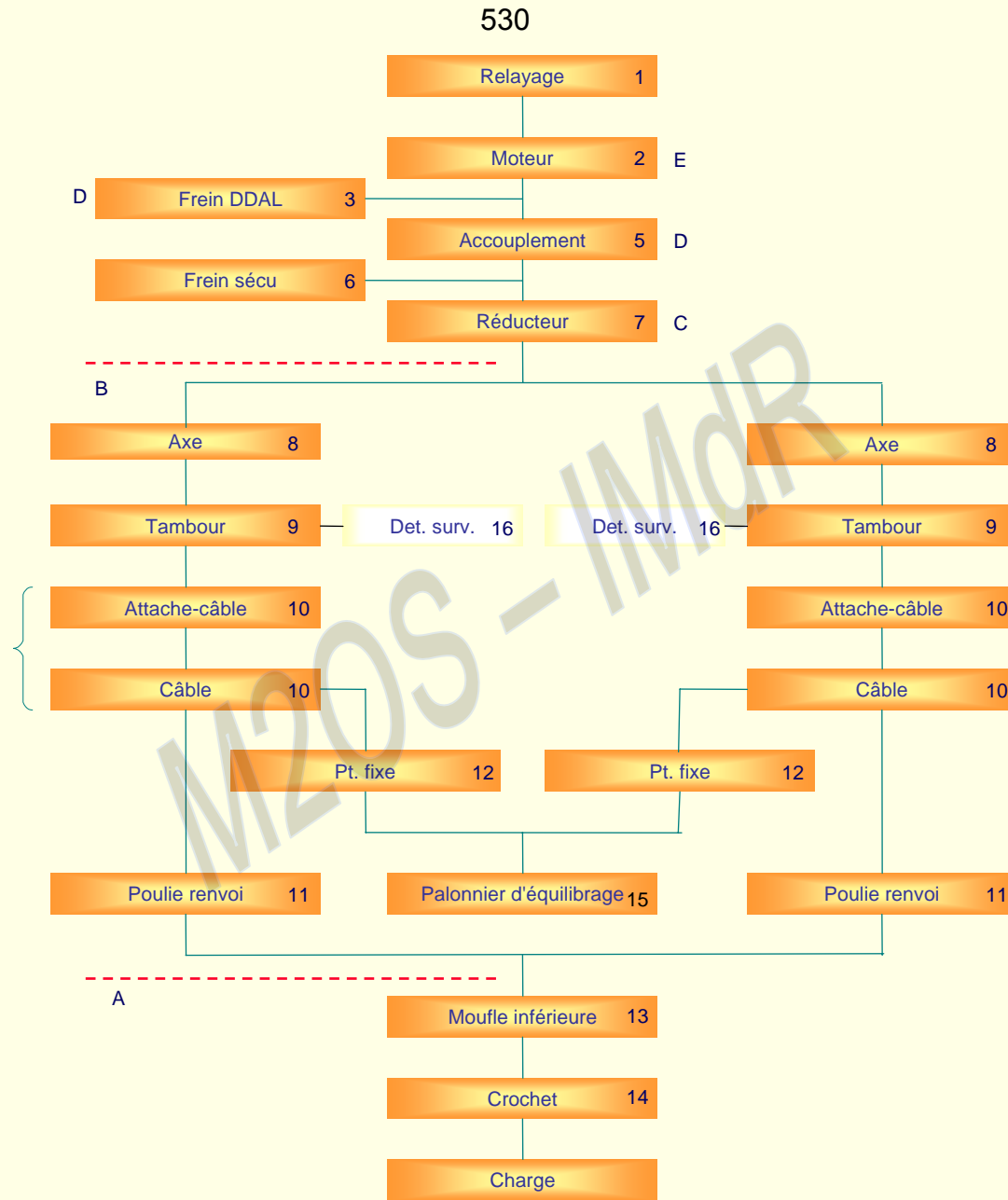
## MODELISATION

### → OBJET :

➔ Effectuer la synthèse des informations recueillies et des hypothèses émises en faisant apparaître :

- ▣ Les limites du système
- ▣ Le niveau de décomposition
- ▣ Les relations entre les éléments





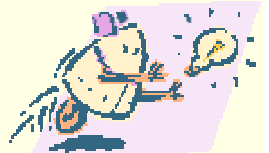
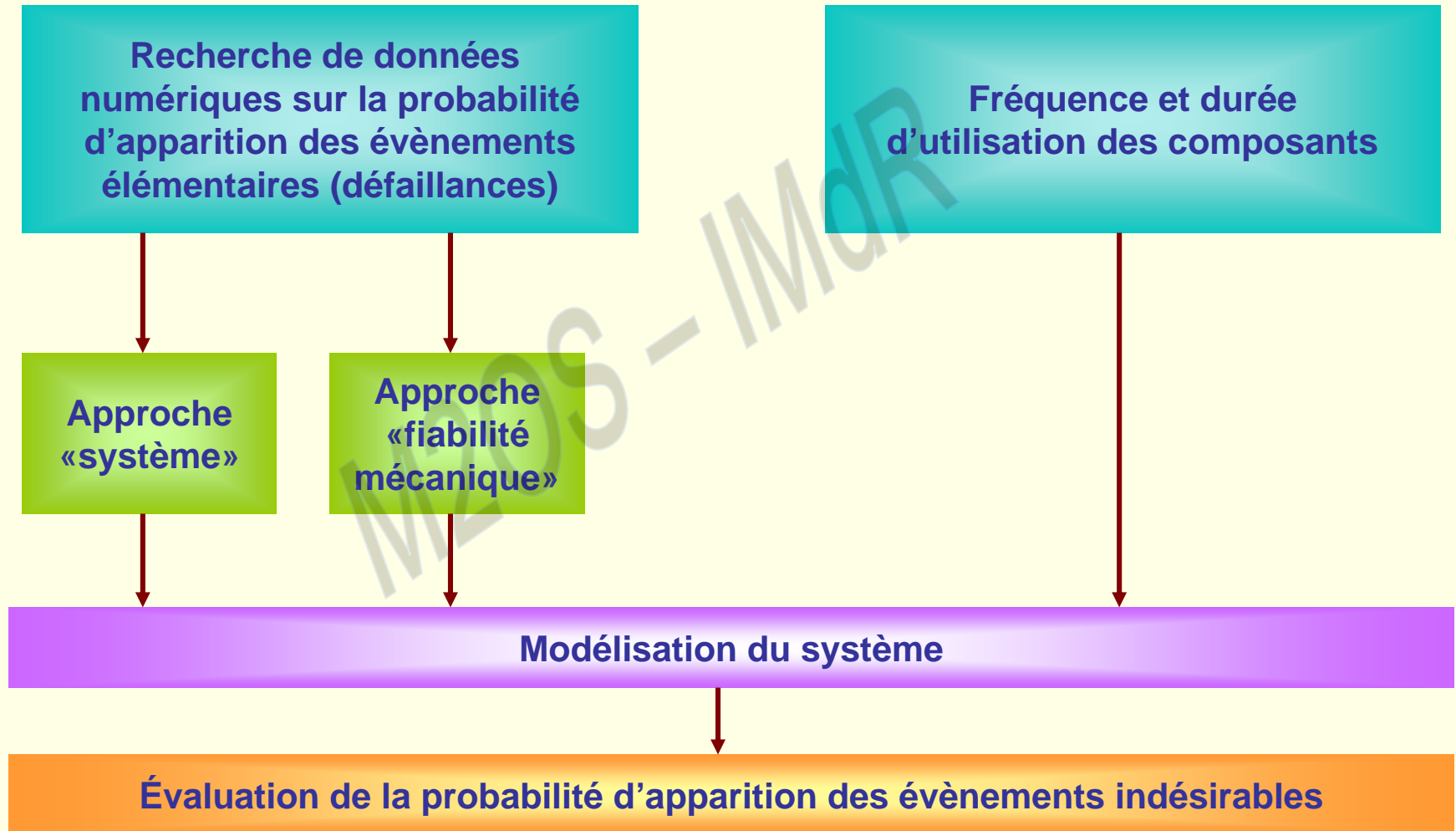
## RECHERCHE DES COMBINAISONS DE DEFAILLANCES ENTRAÎNANT LES EVENEMENTS INDESIRABLES

### → Méthodes :

- ⇒ Arbres de défaillance
- ⇒ Blocs-diagrammes de Fiabilité
- ⇒ Tables de vérité
- ⇒ Graphes causes-conséquences
- ⇒ Méthodes de combinaison de pannes



# ANALYSE QUANTITATIVE





## APPROCHE TYPE « SYSTEME »

- Données de fiabilité sur les composants
  - ➔ Taux de défaillance en fonctionnement
  - ➔ Taux de défaillance à l'arrêt
  - ➔ Proba de défaillance à la sollicitation
    - ▣ Sources : littératures spécialisées  
Enquêtes
    - ▣ Précautions :
      - Connaissance de l'échantillon de référence
      - Technologie du composant
      - Conditions d'utilisation
      - Connaissance intervalle de confiance
  
- Données sur l'utilisation du système
  - ➔ Environnement
  - ➔ Fréquence et durée d'utilisation
    - ▣ Sources : Spécifications  
Exploitants



## CALCUL DE LA PROBABILITE D'APPARITION DES EVENEMENTS INDESIRABLES

→ Hypothèses : taux de défaillance  $\lambda$  constant

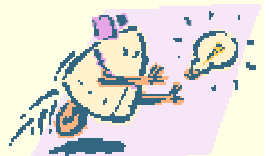
$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\lambda t} \approx \lambda t$$

→ Moyens de calculs

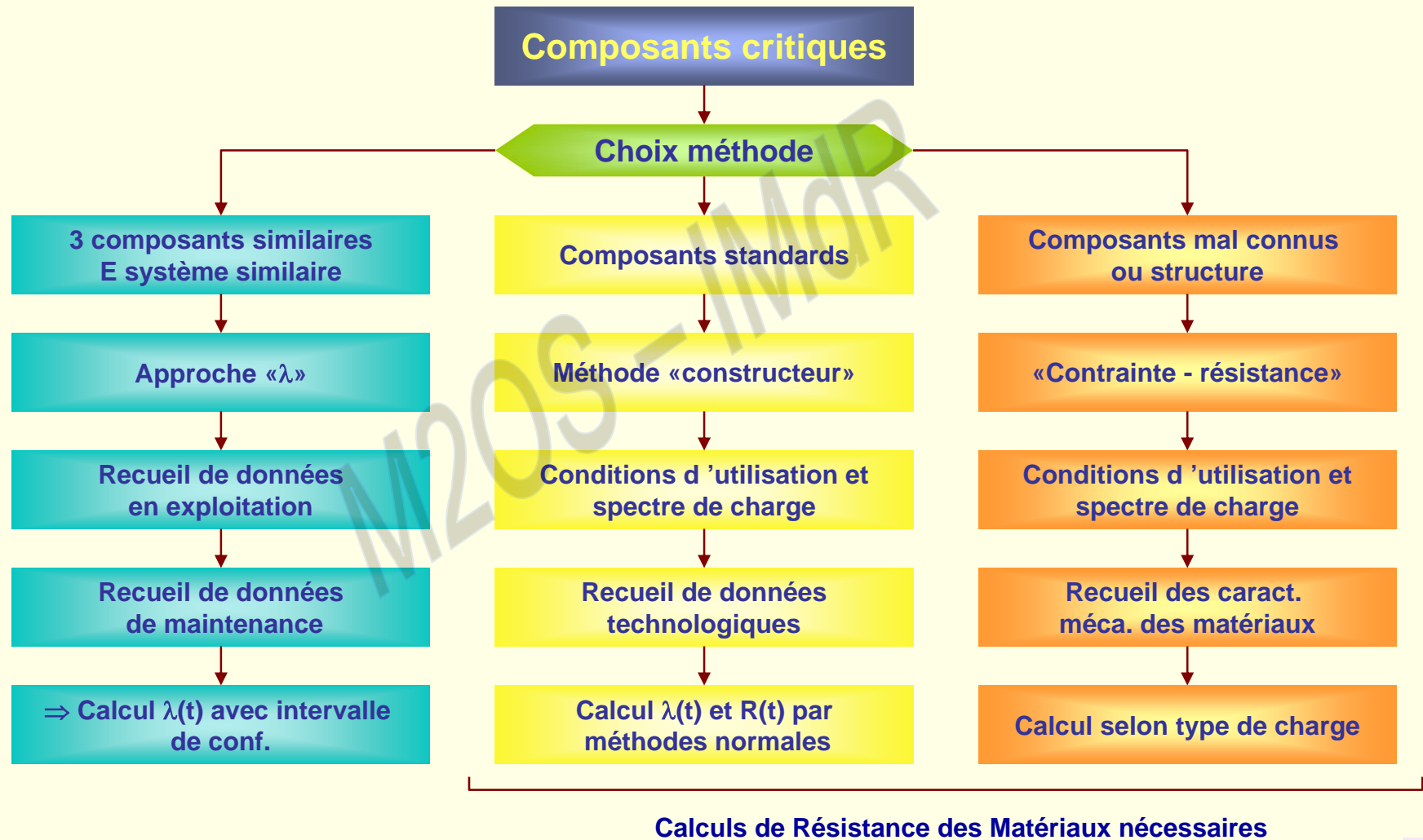
⇒ Manuels

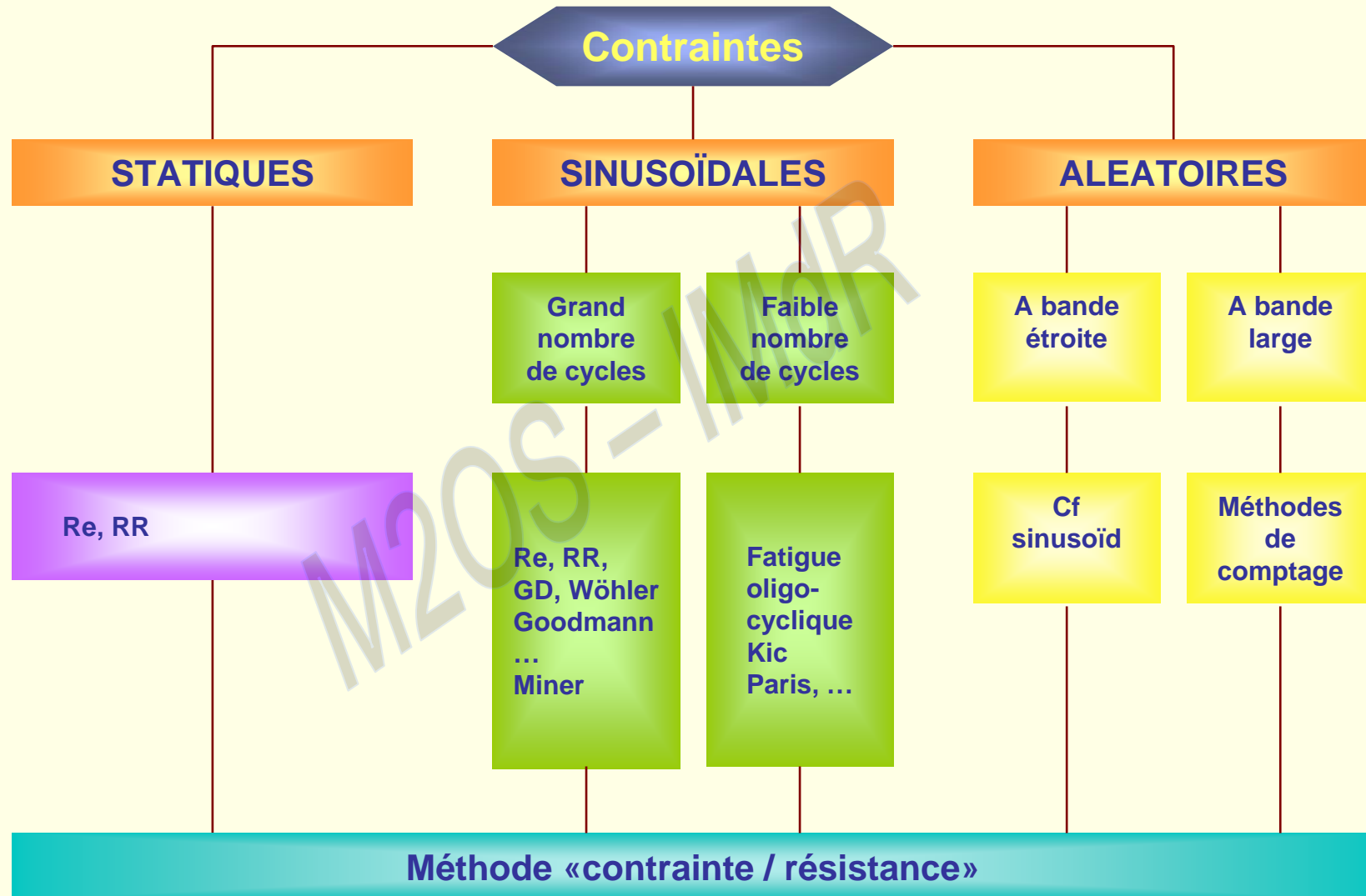
⇒ Informatiques

└─→ Intervalles de confiance sur les résultats

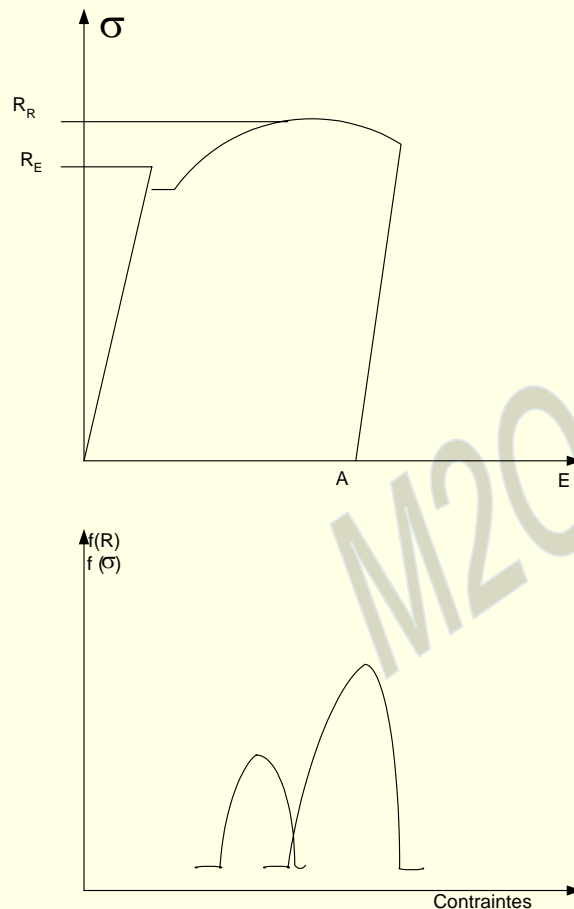


# APPROCHE «FIABILITE EN MECANIQUE»





## CAS DES CONTRAINTES STATIQUES



→ Incertitudes sur  $R_E$ ,  $R_R$

- Tolérances d'usinage
- Tolérances de montage
- Traitements thermiques
- Hétérogénéités

→  $R_R$ ,  $R_E$  = variables aléatoires

→ Proba de rupture  
= Proba ( $R > \sigma$ )

→ Outils : Algèbre des variables aléatoires

- Transformées de Mellin
- Simulation de Monte-Carlo



## CAS DES PIÈCES FISSURÉES

### Application de la mécanique de la rupture

- État de contraintes du voisinage de la fissure caractérisé par

$$K_1 = \alpha \sigma \sqrt{2\Pi a}$$

$$\sigma_{ij} = K_1 \frac{f_{i,j}(0)}{\sqrt{2\Pi r}}$$

Valeur critique du matériau  $K_{IC}$

Vitesse de propagation de la fissure :  $\frac{da}{dN} = c(\Delta K)^m$  (loi de Paris)

- Application à la fiabilité

Nombre de cycles à rupture

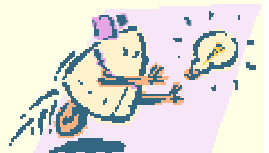
$$N_f = \left[ a_0^{\frac{m}{2}-1} \cdot A.C. \cdot \alpha^m \cdot \Delta C^m \right]^{-1}$$



Approche "système"	Approche "Fiabilité mécanique"
<ul style="list-style-type: none"><li>- dialogue difficile avec les B. E. mécaniques</li><li>+ Approche rapide si données disponibles mais</li><li>- Risques d'erreurs si données mal interprétées</li><li>+ Moyen de comparaison facilitant les discussions au niveau "projet"</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>+ Rapports aisés avec B. E. (même langage)</li><li>- Calculs longs et coûteux limités aux composants critiques</li><li>+ Moyen d'optimisation de la conception au niveau du composant</li></ul>

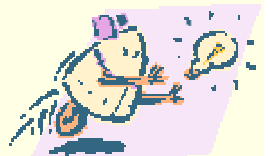


Approche "système"	Approche "Fiabilité mécanique"
<p>TAUX DE DEFAILLANCE CONSTANT</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>+ Simplicité des calculs</li> <li>- Non prise en compte des phénomènes d'usure, fatigue, ...</li> <li>+ Méthode éprouvée</li> </ul>	<p>PROB DE DEFAILLANCE DEPENDANT DU NOMBRE DE CYCLES APPLIQUES</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Complexité des calculs</li> <li>+ Prise en compte usure et fatigue</li> <li>- Parfois aux confins de la recherche</li> </ul>
<p>NON APPLICABLE AUX PIECES DE STRUCTURE</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Limitée à arguments qualitatifs</li> </ul>	<p>APPLICABLES AUX PIÈCES DE STRUCTURE</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>+ Évaluation de la proba de rupture</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>+ Applicable par des généralistes</li> <li>+ Synthèse de technologies différentes</li> <li>- Ne privilégie pas les composants soumis à la charge</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Nécessite des connaissances de mécanicien</li> <li>- Méthode purement applicable à la mécanique</li> <li>+ Importance donnée aux composants soumis à la charge</li> </ul>





Approche "système"	Approche "Fiabilité mécanique"
<p>TAUX DE DEFAILLANCE "moyen"</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Composant non individualisé</li> <li>- Conditions d'utilisation de l'échantillon de référence</li> <li>- Modes de défaillance de l'échantillon de référence</li> <li>+ Prise en compte "impondérables" (modes communs)</li> <li>- Ne permet pas de juger les modifications de dimensionnement</li> <li>+ Comparaison aisée des modifications d'architecture</li> </ul>	<p>PROB DE DEFAILLANCE CALCULEE</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>+ Composant individualisé</li> <li>+ Conditions d'utilisation réelles</li> <li>- Modes de défaillance limités à rupture, usure, déformation, ...</li> <li>- Composant supposé parfaitement conforme aux plans</li> <li>+ Prend en compte le dimensionnement réel</li> </ul>
<p>DONNEES DISPONIBLES SUR S/SYSTEME</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Ne tient pas compte du détail de chaque composant</li> <li>+ Permet de limiter le niveau d'analyse</li> </ul>	<p>ANALYSE AU NIVEAU DU COMPOSANT</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>+ Exhaustivité de l'analyse au niveau du composant</li> <li>- Possibilité de manque de données</li> </ul>



## 4.3. Exemple sur un pont de manutention



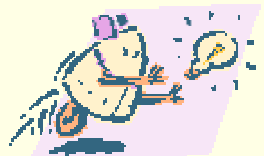
## ETUDE DE SECURITE D'UN PONT DE MANUTENTION PAR UTILISATION DES TECHNIQUES DE FIABILITE EN MECANIQUE

### → Objectif de l'étude :

- ➔ Démontrer que le risque de chute de la charge est inférieur à un seuil fixe à  $10^{-7}/\text{an}$ .

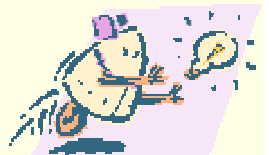
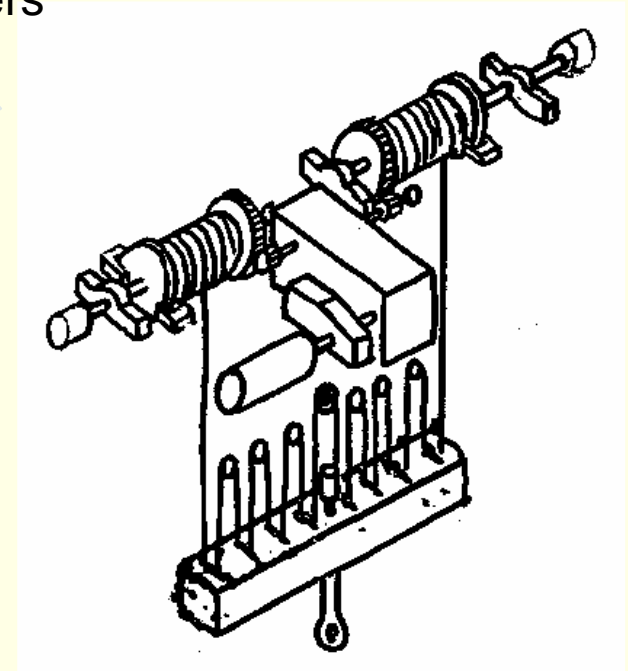
### → Méthode

- ➔ Approche par la fiabilité en mécanique pour apporter des renseignements sur la conception et le dimensionnement.



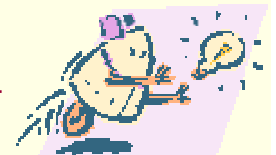
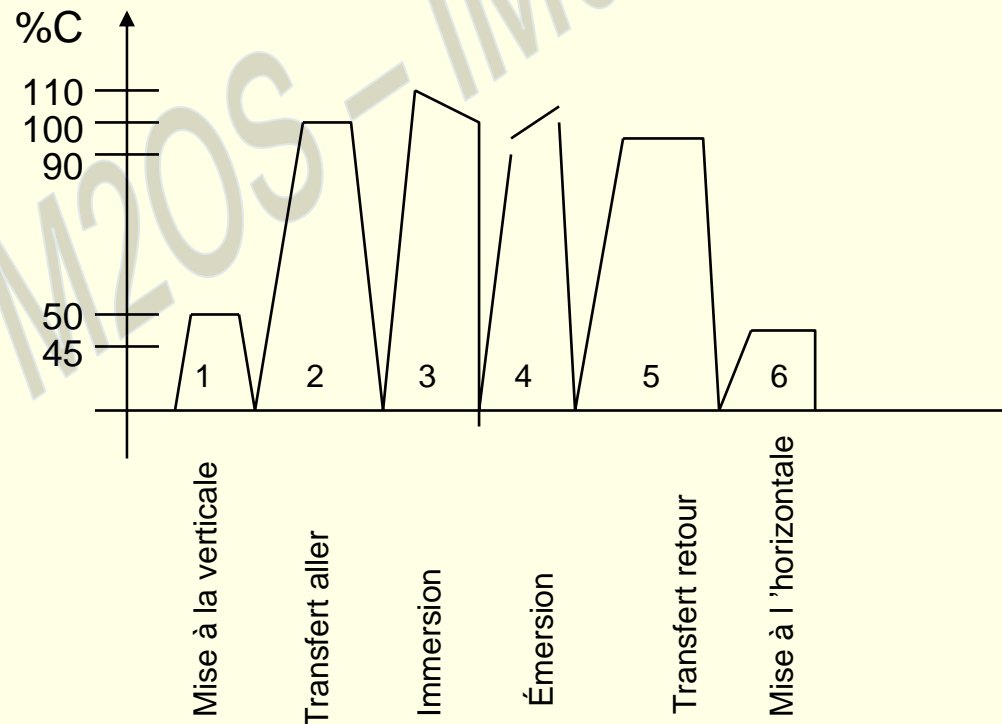
## DEMARCHE DE L'ETUDE

- 1 - Définition des limites du système
- 2 - Prise en compte du système (specs, plans, dossiers de calcul)
- 3 - Décomposition du système (→ équipements, composants)
- 4 - Analyse de la mission
- 5 - AMDEC
- 6 - Établissement d'une liste de composants critiques
- 7 - Analyse de fiabilité mécanique des composants critiques
  - \* Expertise
  - \* Calculs de fiabilité
  - \* Recommandations
- 8 - Étude du transitoire après panne
- 9 - Conclusions



## ANALYSE DE LA MISSION (détermination du spectre de charge)

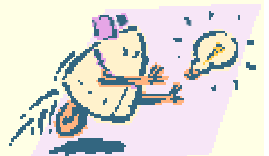
- Le pont transporte 4 types de charges (C1, C2, C3, C4) sur un trajet déterminé.
- La charge varie durant le trajet suivant le schéma suivant :



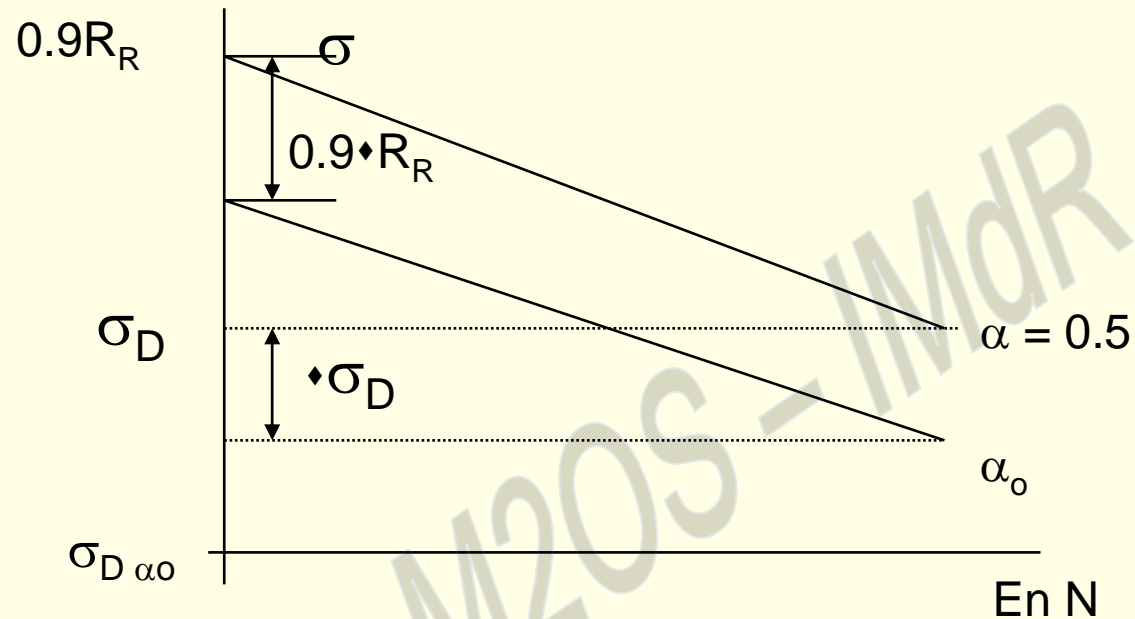
La durée de vie de l'installation étant de 25 ans, on dresse ainsi le tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6
C1	N11	N12	N13	N14	N15	N16
C2	N21	N22	...			
C3	N31	...				
C4	N41	...				

On détermine ainsi le nombre de cycles  $N_{ij}$  correspondant à l'état de charge  $C_{ij}$



## Tracé approché de la courbe de Wöhler



$$u_{\alpha_0} = \frac{\sigma_{D\alpha_0} - \sigma_D}{S_{\sigma D}} \Rightarrow \Delta\sigma_D = u_{\alpha_0} S_{\sigma D}$$

$$S_{\sigma D} \approx 0.08\sigma_D \text{ (matériau nu)}$$

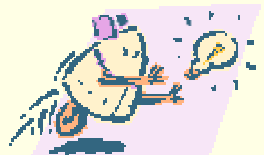
$$S_{\sigma D} \approx 0.13\sigma_D \text{ (soudures)}$$

Le dommage D a été calculé pour :

$$\alpha_0 = 10^{-10}$$

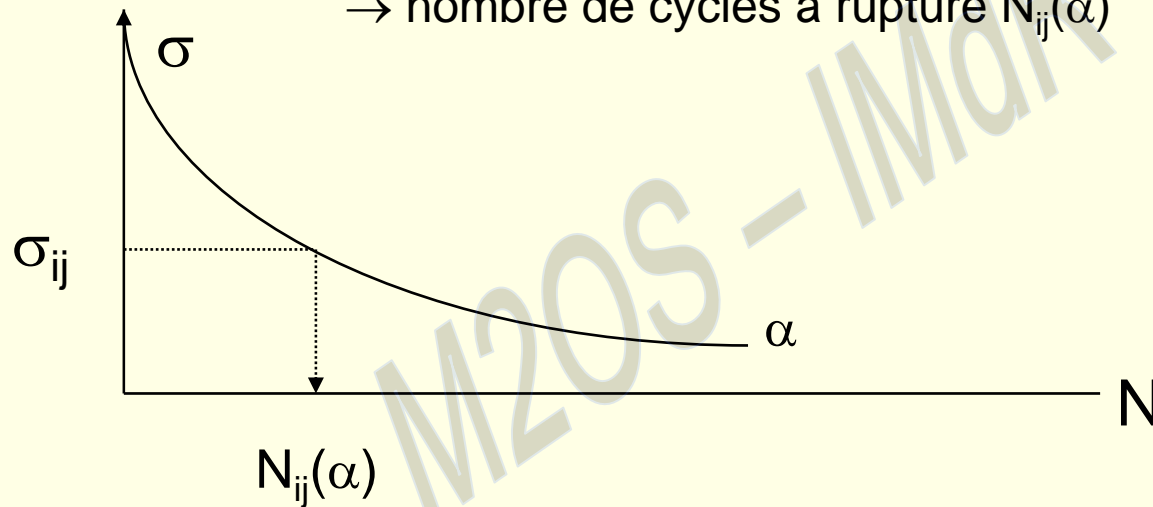
$$\alpha_0 = 10^{-7}$$

$$\alpha_0 = 10^{-5}$$



## CONTRAINTES DE FATIGUE (manipulation des charges transportées)

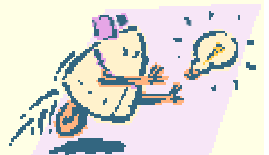
Charge  $C_{ij}$  → nombre de cycles  $n_{ij}$   
 Courbe de Wöhler correspondant au risque  $\alpha$   
 → nombre de cycles à rupture  $N_{ij}(\alpha)$



→ Dommage  $d_{ij}(\alpha) = \frac{n_{ij}}{N_{ij}(\alpha)}$

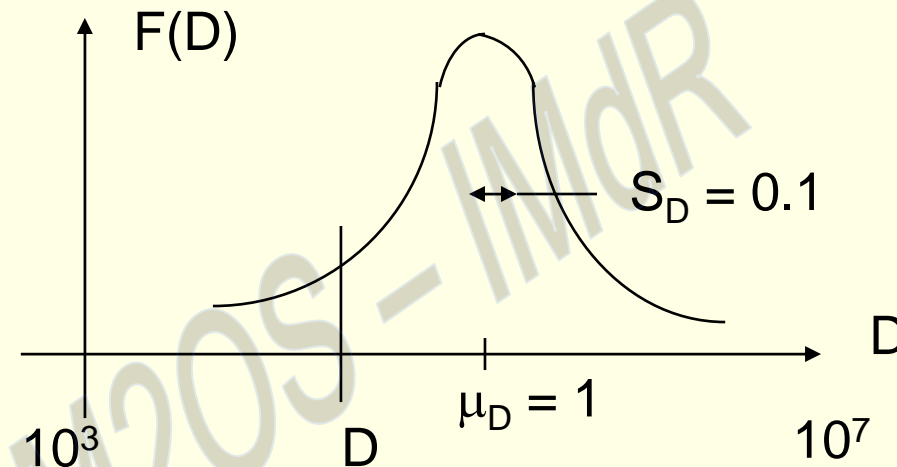
Calcul du dommage cumulé approché (loi de MINER)

$$D = \sum_{i,j} d_{ij}(\alpha)$$





## Comparaison du dommage à une distribution limite (prise en compte des phénomènes d'over et under stressing)



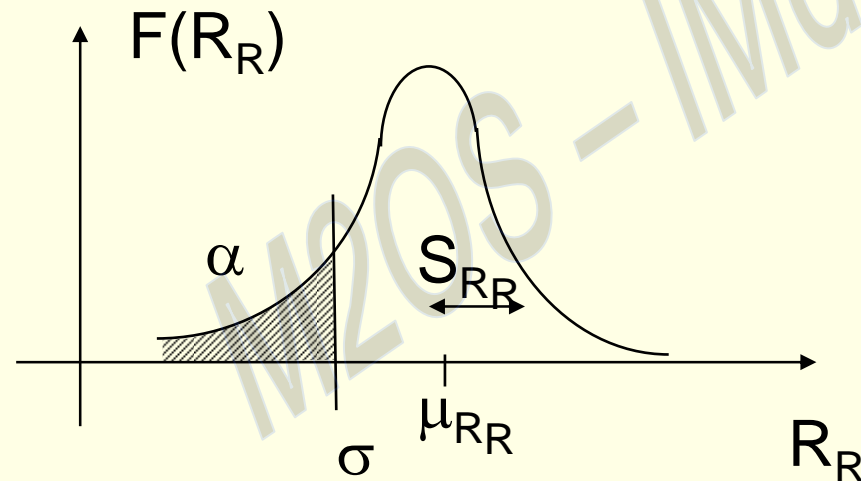
Pour  $\alpha_o = 10^{-10}$  :  $D_{lim} = 0.36$

On montre que toutes les pièces critiques répondent à cette condition

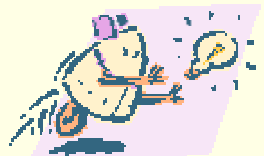


## Calculs de fiabilité mécanique politique générale de dimensionnement

A - Contraintes exceptionnelles (ex : séisme)



$$S_{RR} \approx 0,4 \mu R_R$$



## ANALYSE DES MODES DE DEFAILLANCE, DE LEURS EFFETS ET DE LEUR GRAVITE

- Définition de niveaux de gravité
  - ⇒ Défaillances mineures ou se traduisant par une immobilisation de la charge.
  - ⇒ Défaillances sans conséquences sur la sécurité, mais se traduisant par des destructions importantes de matériel.
  - ⇒ Défaillances avec mise en cause de la sécurité.
- Niveau de l'analyse
  - ⇒ Le composant élémentaire du moteur à la rondelle.



## MISE EN ŒUVRE DE L'ANALYSE

- Composant (description, repère)
  - ➔ Ex : Moto Réducteur  
Vis  
Plat d'arrêt
- Fonction
  - ➔ Ex : Assurer la liaison moufle-réducteur.
- Mode de défaillance
  - ➔ Ex : Rupture mécanique  
Desserrage
- Causes possibles
  - ➔ Ex : Vibrations  
Fatigue mécanique  
Erreur de montage  
Corrosion
- Effet sur le système
  - ➔ Ex : Desserrage → chute de la charge
- Méthodes de prévention
  - ➔ Inspection visuelle périodique



## ANALYSE DE FIABILITE MECANIQUE DES COMPOSANTS CRITIQUES

### → Expertise qualitative

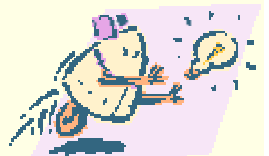
#### ➔ Mise en évidence de risques liés

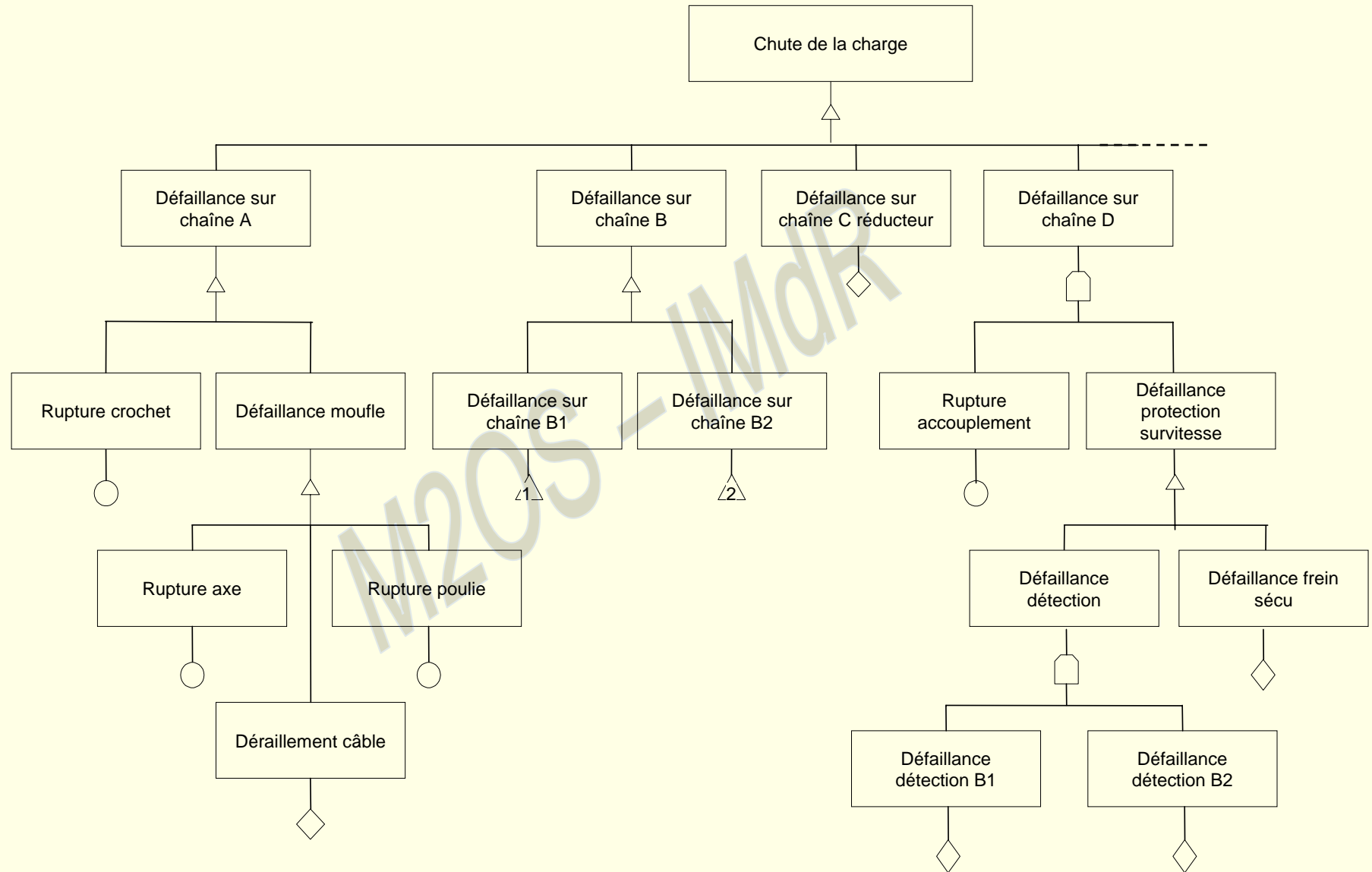
- ▣ aux matériaux employés (aptitude au forgeage, caractéristiques mécaniques)
- ▣ à la forme de la pièce (concentrations de contraintes)
- ▣ à l'aptitude aux calculs (assemblages)
- ▣ aux procédés de fabrications (soudures non visibles)
- ▣ à certains choix de conception (arrêt des assemblages boulonnés)
- ▣ aux procédures de fabrication et de contrôle
- ▣ etc...



## REMARQUES SUR CETTE APPROCHE

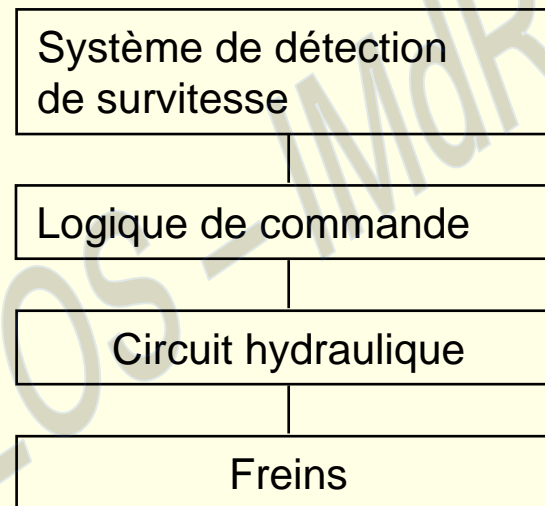
- Limite des calculs de contraintes effectués
  - ➔ Relevés «in-situ»
- Pièces supposées conformes aux plans
  - ➔ Contrôles métrologiques
- Qualité de réalisation supposée «parfaite»
  - ➔ Expertises et contrôles approfondis
- Pas de prise en compte des causes de défaillance non imputables à la pièce elle-même
  - ➔ Analyse des défaillances de mode commun
  - ➔ Approche « $\lambda$ »
  - ➔ Procédures d'utilisation et de maintenance
- Présence de points singuliers de défaillance
  - ➔ Dispositifs de sécurité
  - ➔ Contrôles périodiques





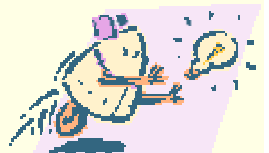
## ANALYSE COMPLEMENTAIRE : EFFICACITE DES DISPOSITIFS DE SECURITE

### → Exemple : le frein de sécurité



### → Etape 1 : Analyse de sécurité des constituants

- ➡ «Classique», par arbre de défaillance « $\lambda$ » pour composants électroniques et électromécaniques, fiabilité mécanique pour le frein
- ↔ Proba de non freinage :  $P_{nf}$





## → Étape 2 : Évaluation du risque de collision

→ Bases : la distance de freinage dépend

- ▣ de l'inertie à entraîner (point de rupture de la chaîne cinématique)
- ▣ du rayon d'enroulement du câble
- ▣ des temps de réaction (détecteurs, commande, frein,...)
- ▣ de l'effort de freinage
- ▣ de la masse manipulée
- ▣ etc...

→ Ces paramètres sont considérés comme des variables aléatoires.

→ Le problème a été traité par la technique de simulation de Monte-Carlo.



## → Principe de la méthode

$$\Rightarrow d_T = \varphi (M, I, R, t_1, t_2, t_3, W_a, \Delta C_f, \Delta t_1)$$

avec

$d_T$  : distance d'arrêt

$M$  : masse suspendue

$I$  : inertie à entraîner

$R$  : rayon d'enroulement

$t_1$  : temps réaction détecteurs

$t_2$  : temps réaction commande

$t_3$  : temps réaction frein

$W_a$  : vitesse de détection affichée

$\Delta C_f$  : incertitude sur couple de freinage

$\Delta t_1$  : erreur relative sur la période de référence

suit  $d_T = \varphi (X_1, X_2, \dots, X_n)$

chacun des paramètres est défini par sa loi de répartition

Ex : loi normale ( $\mu, \sigma$ )

loi uniforme ( $X_{\min}, X_{\max}$ )



## PROCESSUS DE CALCUL

### → Processus de calcul

- ➔ Pour chaque paramètre  $X_i$ , on génère une valeur  $X_{i,1}$  et on évalue

$$d_{T,1} = \varphi (X_{1,1}, \dots, X_{n,1})$$

- ➔ On répète le processus N fois pour obtenir un échantillon de valeurs de la distance d'arrêt

$$d_{T,1} = \varphi (X_{1,1}, \dots, X_{n,1})$$

...

$$d_{T,N} = \varphi (X_{1,N}, \dots, X_{n,N})$$

- ➔ On évalue les caractéristiques de la distribution statistique de  $d_T$

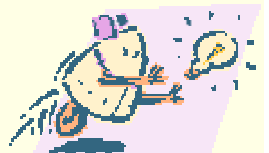
moyenne  $\mu_{dT} = \frac{1}{N} \sum_1^N d_{T,j}$

écart type  $\sigma_{dT} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_1^N (d_{T,j} - \mu_{dT})^2}$

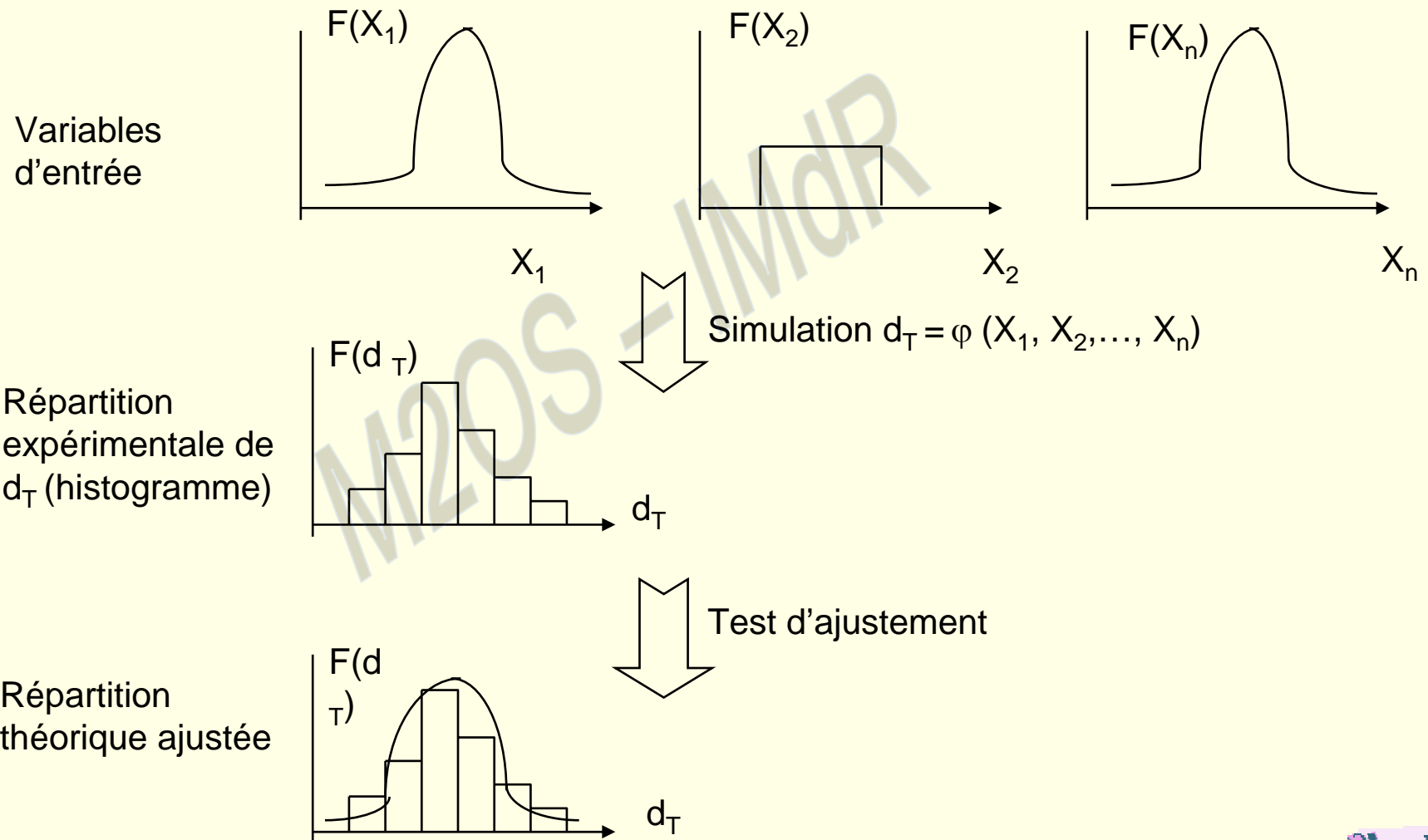
$\beta_1$

$\beta_2$

$\beta_3$



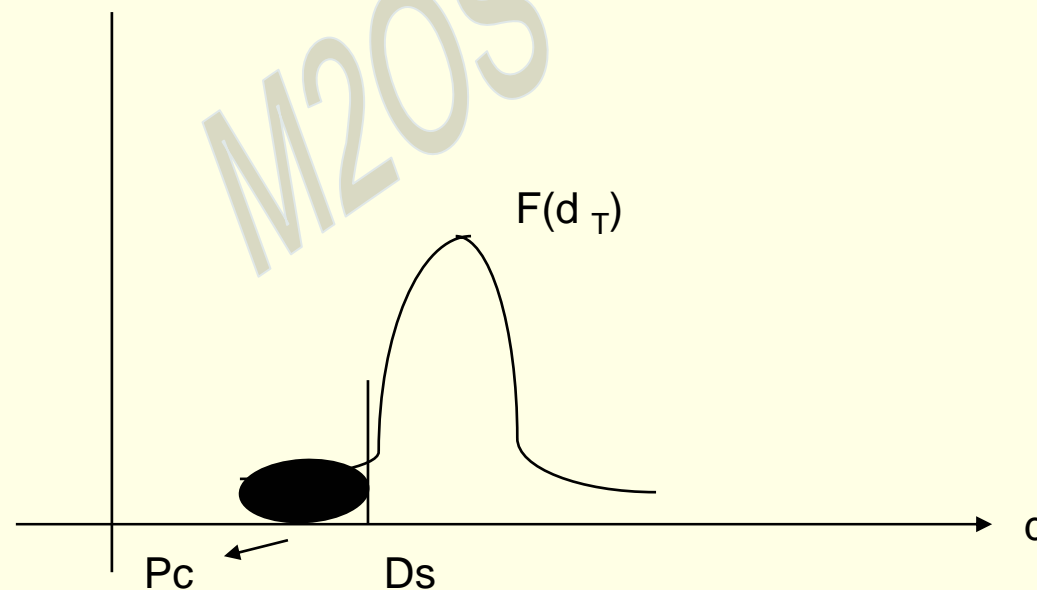
## On ajuste une loi théorique sur l'échantillon obtenu



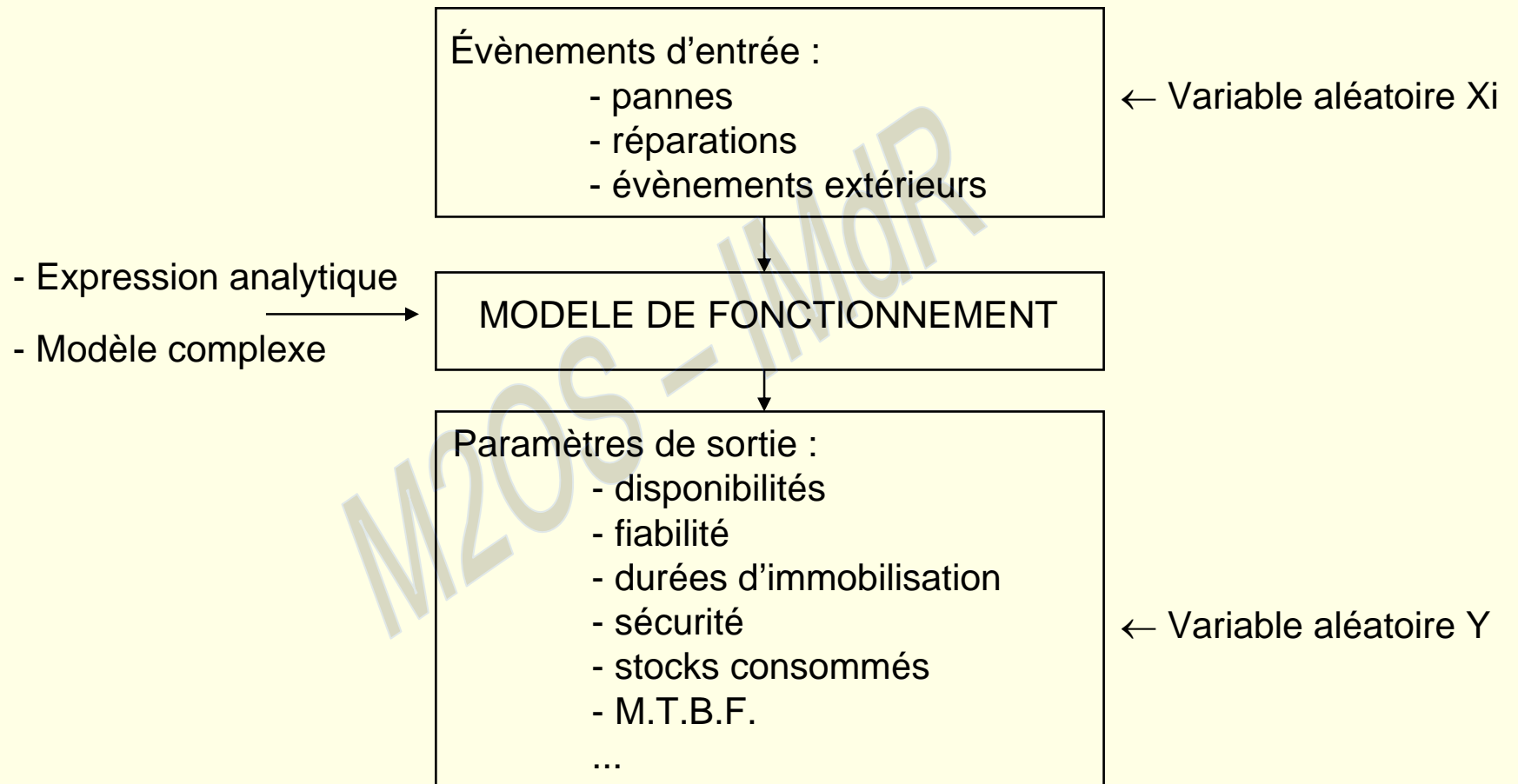
On compare la distribution ajustée à la distance de sécurité  $D_s$

On en déduit la proba de choc

$$P_c = \text{Proba} (d_T \geq D_s)$$



## PRINCIPE DE LA SIMULATION DE MONTE-CARLO

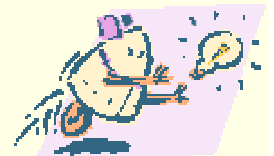
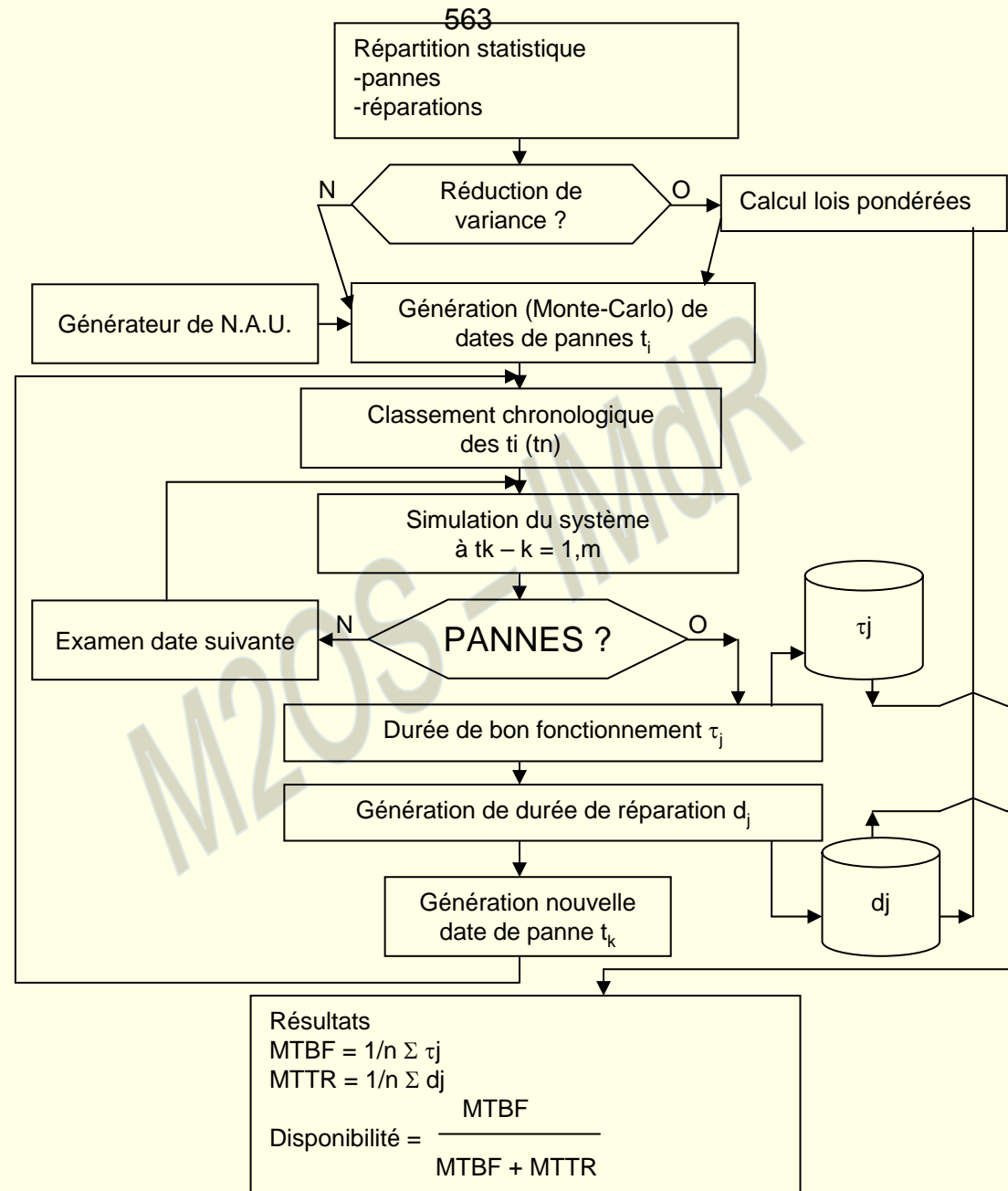


Exemple : génération de pannes  $X_i$

- type de loi de mortalité : exponentielle
- caractéristique :  $\lambda$

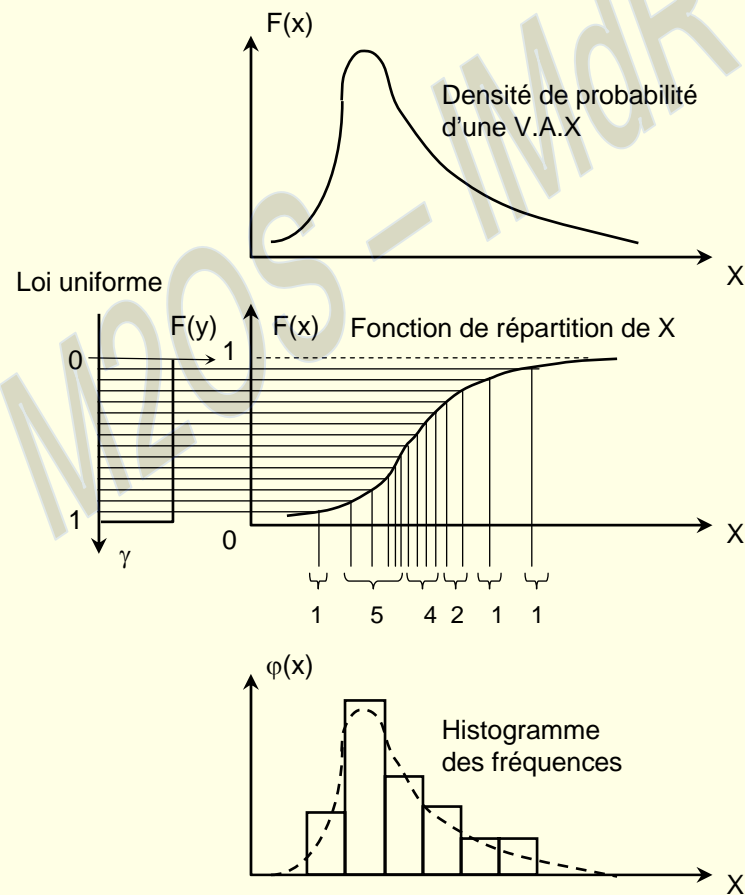
→ date de panne  $t_i$



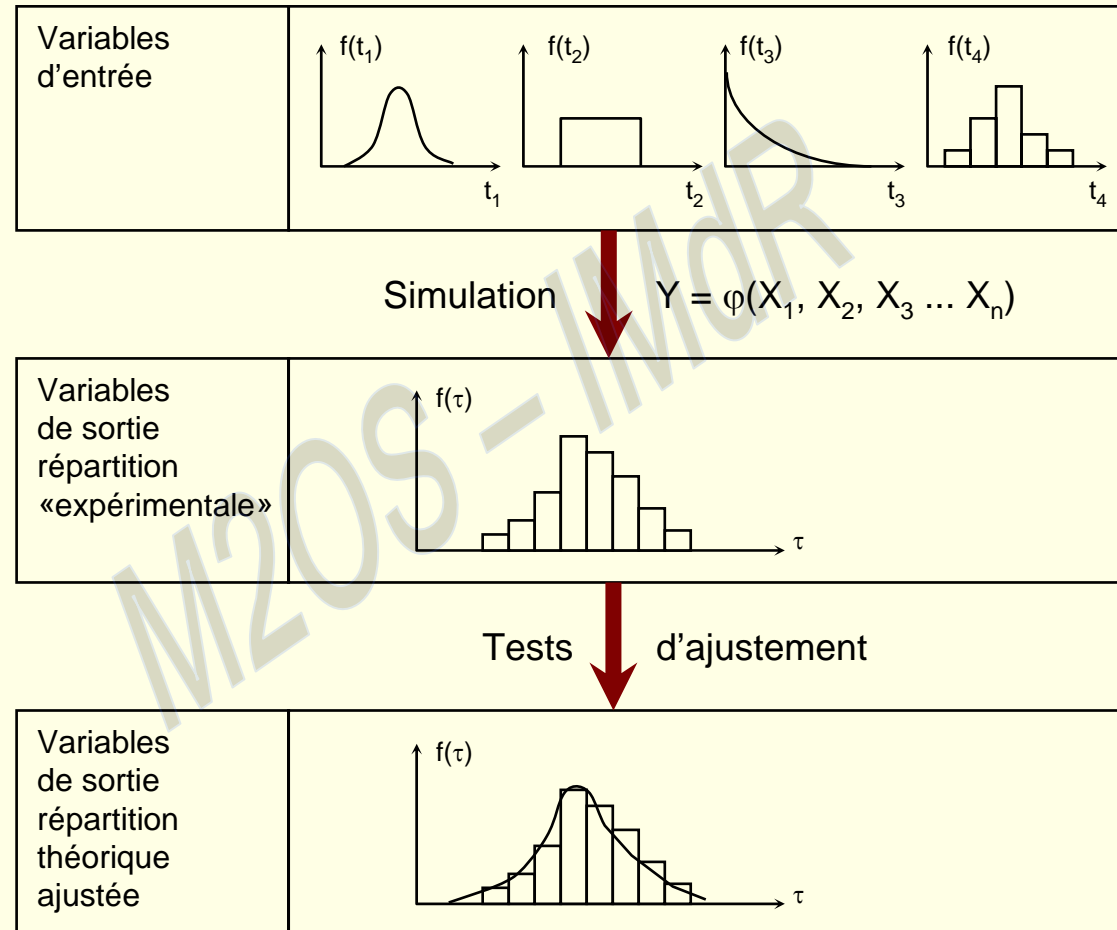


# GENERATIONS DES VARIABLES ALEATOIRES

$X = \text{V.A.}$ , fonction de répartition ( $F(x) = \text{Prob} [X \leq x] \rightarrow Z = F(X) = \text{V.A.}$  uniforme sur  $[0,1]$   
 car  $F(z) = \text{Prob} [Z \leq z] = \text{Prob} [F(X) \leq F(x)] = \text{Prob} [X \leq x] = z$   
 si  $Y = \text{V.A.}$  uniforme sur  $[0,1]$   $x_i = F^{-1}(y_i)$  suit la loi de fonction de répartition  $F$ .



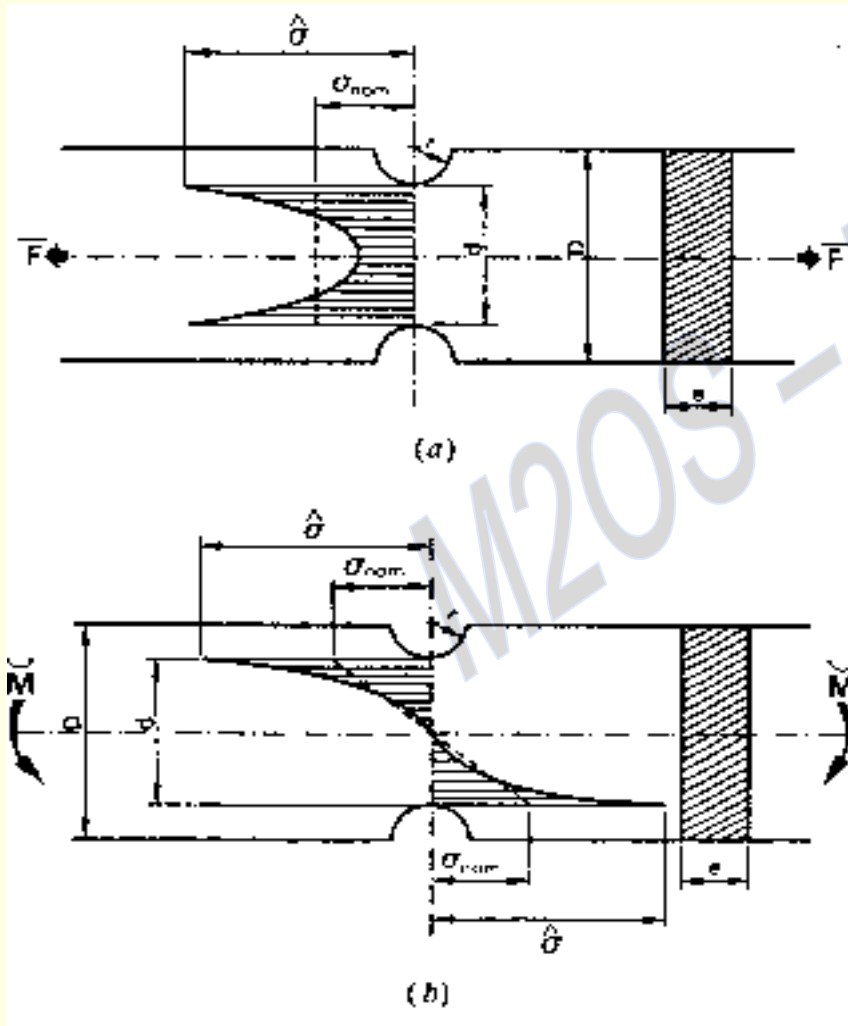




## 5. GRADIENT DE CONTRAINTE - CRITERES DE RUPTURE



## L'ENTAILLE

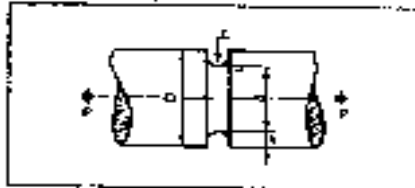


Champs de contrainte dans une poutre entaillée

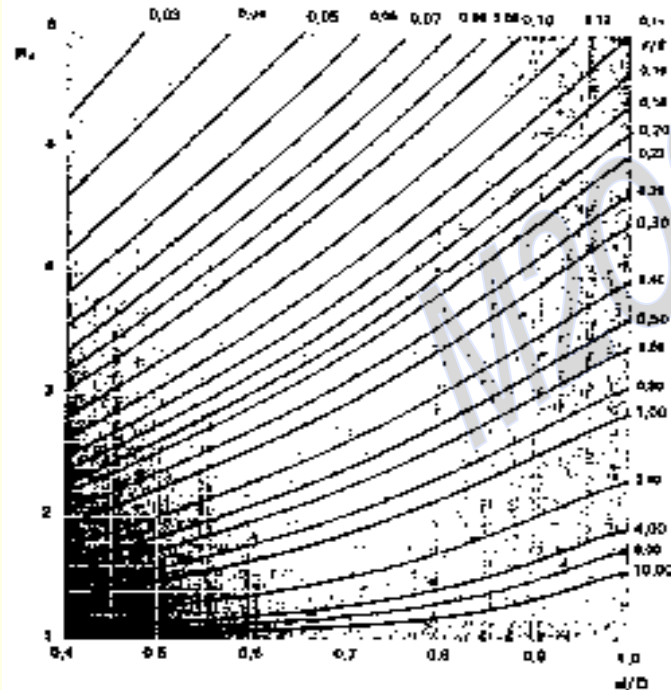
- a) poutre soumise à un effort de traction  $\bar{F}$   
 b) Poutre soumise à un moment de flexion  $\bar{M}$



# Arbre avec gorge à fond semi-circulaire



$$\sigma_{max} = \frac{4P}{\pi d^2}$$



**FORMULES** (d'après [1], [2], [3])

$$K_t = \sqrt{\left(\frac{1}{1,157 R_a}\right)^2 + \left(\frac{1}{1,871 R_b}\right)^2 - 1}$$

$$K_t = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{a}{D}} + \frac{a}{D}}$$

$$K_t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a}{D}}}$$

**TRACTION**  
ARBRE AVEC GORGE A FOND SEMI-CIRCULAIRE

(\*) La gorge à fond semi-circulaire est un cas particulier de la gorge à fond plat (Fig. 2).  
Demande: Le cas général, avec lequel aucune donnée n'est donnée, est actuellement l'objet d'une étude expérimentale au CEMM.

**EXEMPLE D'APPLICATION**

$\frac{a}{D} = 0,04$

$K_t = 2,8$

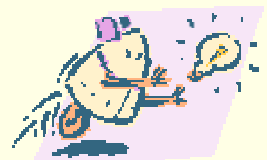
$$\sigma_{max} = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{4 \times 6400}{\pi \times 60^2} = 1,15 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{app} = K_t \times \sigma_{max} = 2,8 \times 1,15 = 3,2 \text{ daN/mm}^2$$

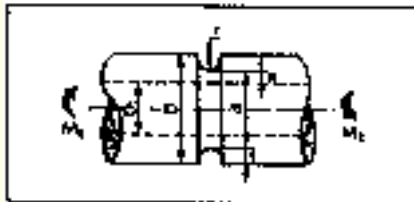
**CONSEILS PRATIQUES**

meilleur	acceptable	meilleur (*)

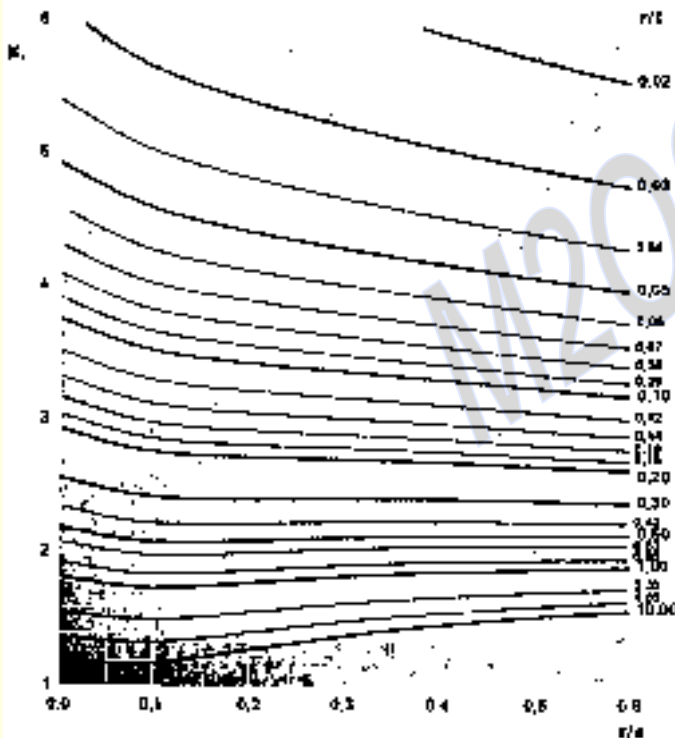
(\*) Une gorge à fond plat est préférable à une gorge à fond semi-circulaire.



# Arbre creux avec gorge extérieure à fond semi-circulaire



Cette table se rapporte au cas où  $\frac{d}{D} > 0,5$   
 et  $\frac{r}{D} < 0,25$ , c.à.s. 25.

$$\tau_{\max} = \frac{16 M_t r}{\pi (d^4 - D^4)}$$


**FORMULES (d'après [1])**

$$K_t = A + B \sqrt{r/D}$$

$$A = 1 + \frac{1}{\sqrt{16 - 17 \frac{d}{D} + 12 \frac{d^2}{D^2} - 10 \frac{d^3}{D^3} + 7 \frac{d^4}{D^4} - 10 \frac{d^5}{D^5} + 7 \frac{d^6}{D^6} - 10 \frac{d^7}{D^7} + 7 \frac{d^8}{D^8} - 10 \frac{d^9}{D^9} + 7 \frac{d^{10}}{D^{10}}}}$$

$$B = \frac{A - 1}{\sqrt{r/D}}$$

$$C = 1 - \frac{1}{\sqrt{r/D}}$$

$$D = \frac{A - 1}{\sqrt{r/D}}$$

$$E = \frac{2(1 - \frac{d}{D})}{d(1 + 2r/D)}$$

## TORSION

ARBRE CREUX  
 AVEC GORGE EXTERIEURE  
 A FOND SEMI-CIRCULAIRE

Si  $\frac{d}{D} < 0,5$   
 On est en dehors du cadre de l'arbre  
 voir K1, graphes p. 281

Si  $\frac{d}{D} > 0,5$   
 voir graphes d'après

**EXEMPLES D'APPLICATIONS**

1<sup>er</sup> cas :

$$\frac{d}{D} = \frac{22}{32} = 0,6875$$

$$\frac{r}{D} = \frac{12}{32} = 0,375$$

$\frac{d}{D} < 0,5$  → cf. graphes p. 281

$$\frac{1}{K_t} = \frac{1}{1,8} = 0,556$$

$$\frac{d}{D} = \frac{22}{32} = 0,6875$$

$$\tau_{\max} = \frac{16 M_t r}{\pi (d^4 - D^4)} = \frac{16 \times 150 \times 12}{\pi (22^4 - 32^4)} = 2,5 \text{ daN/cm}^2$$

$\tau_{\max} = \tau_0 \times K_t = 1,8 \times 2,5 = 4,5 \text{ daN/cm}^2$

2<sup>er</sup> cas :

$$\frac{d}{D} = \frac{20}{30} = 0,6667$$

$$\frac{r}{D} = \frac{15}{30} = 0,5$$

$\frac{d}{D} > 0,5$  → cf. graphes d'après

$$\frac{1}{K_t} = \frac{1}{1,8}$$

$$\frac{1}{K_t} = \frac{20}{30} = 0,6667$$

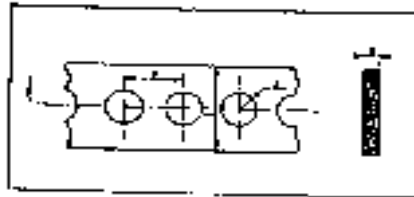
$$\frac{d}{D} = \frac{20}{30} = 0,6667$$

$$\tau_{\max} = \frac{16 M_t r}{\pi (d^4 - D^4)} = \frac{16 \times 150 \times 15}{\pi (20^4 - 30^4)} = 2,8 \text{ daN/cm}^2$$

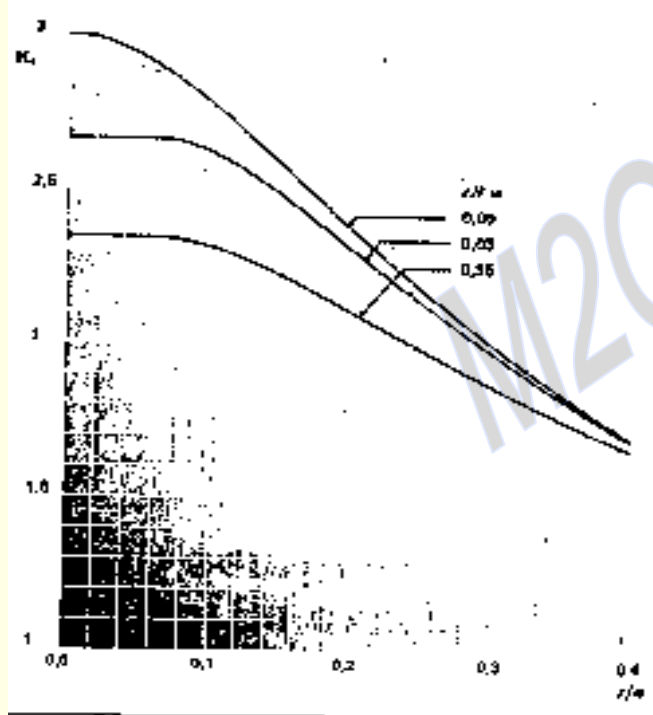
$\tau_{\max} = \tau_0 \times K_t = 1,80 \times 1,56 = 2,8 \text{ daN/cm}^2$



# Plaque percée de plusieurs trous



$$\sigma_{max} = \frac{P}{s(l - 2r)}$$



**FORMULES simplifiées [1]**

$$K_t = 1 + \frac{A \cdot B \cdot C^2}{C + \frac{D}{C}} + \left( \frac{E}{C} \cdot D + 1 \right) \cdot C^{-2.2}$$

A = 0,000      F = 1,240  
 B = 1,474      D = 28

La formule ci-dessus est la plus précise pour les séries de coefficients expérimentaux de [1] et [2]

## TRACTION PLAQUE PERCÉE DE PLUSIEURS TROUS

**EXEMPLE D'APPLICATION**

$\frac{C}{r} = \frac{28}{10} = 2,8$   
 $\frac{r}{l} = \frac{10}{60} = 0,167$

**$K_t = 2,0$**

$\sigma_{max} = \frac{P}{s \cdot (l - 2r)} = \frac{8000}{10 \cdot (60 - 20)} = 80 \text{ kg/cm}^2$   
 $\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nom} = 2,0 \cdot 40 = 80 \text{ kg/cm}^2$

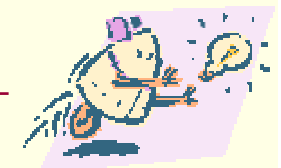
**CONSEILS PRATIQUES**

- moyen
- meilleur
- bon

**Remarque :** Les coefficients de concentration des contraintes données au paragraphe ci-dessus sont des valeurs moyennes et que les coefficients maximaux sont variables :

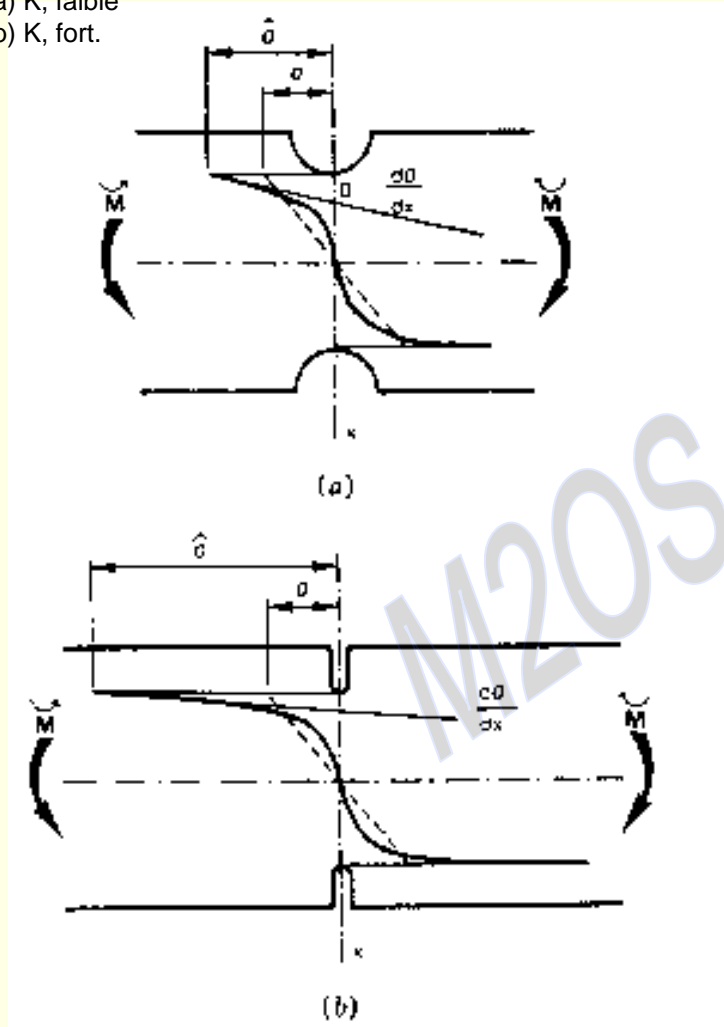
- la charge est irrégulièrement répartie sur la largeur;
- la tige peut avoir des défauts, des fissures et d'autres défauts.

En général, le coefficient de concentration des contraintes dépend de la forme des trous, qui est dépendant du mode de réalisation des trous et des défauts de réalisation.



- Évolution du champ de contrainte gradient de contrainte X pour une même contrainte nominale Y mais pour des facteurs théoriques de concentration de contraintes différents :

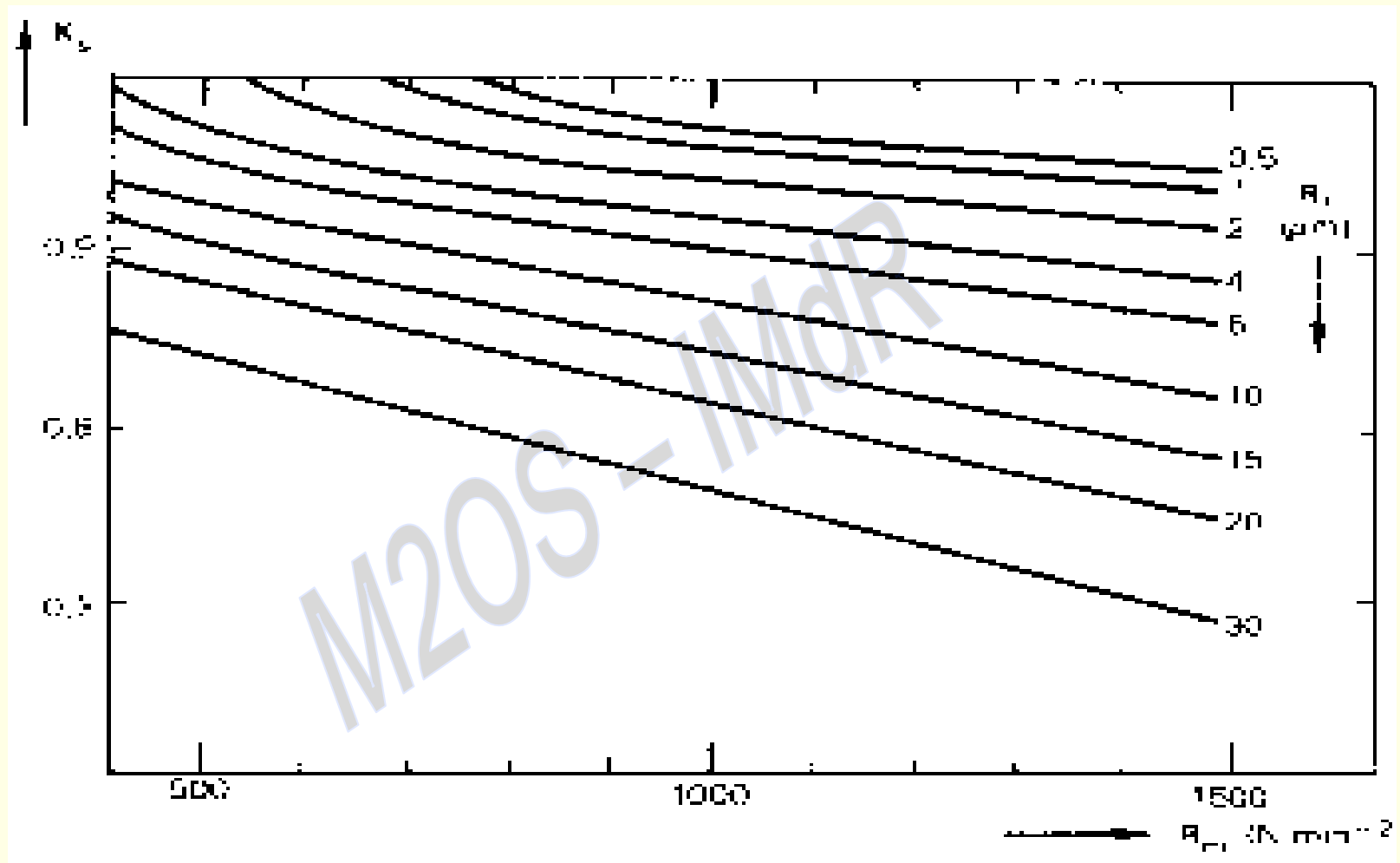
- a) K, faible
- b) K, fort.



- Formules simples permettant le calcul du gradient de contrainte X à partir de la géométrie et du type de sollicitations appliquées à la pièce.

Sollicitations	Types de pièces	$X$ ( $\text{mm}^{-1}$ )
TRACTION	Plaque	$\frac{2}{r}$
	Arbre	
FLEXION	Plaque	$\frac{2}{r} + \frac{2}{d}$
	Arbre	
TORSION	Arbre	$\frac{1}{r} + \frac{2}{d}$
	Arbre percé	
FLEXION	Arbre percé	$\frac{4}{r}$
TORSION	Arbre percé	$\frac{3}{r}$

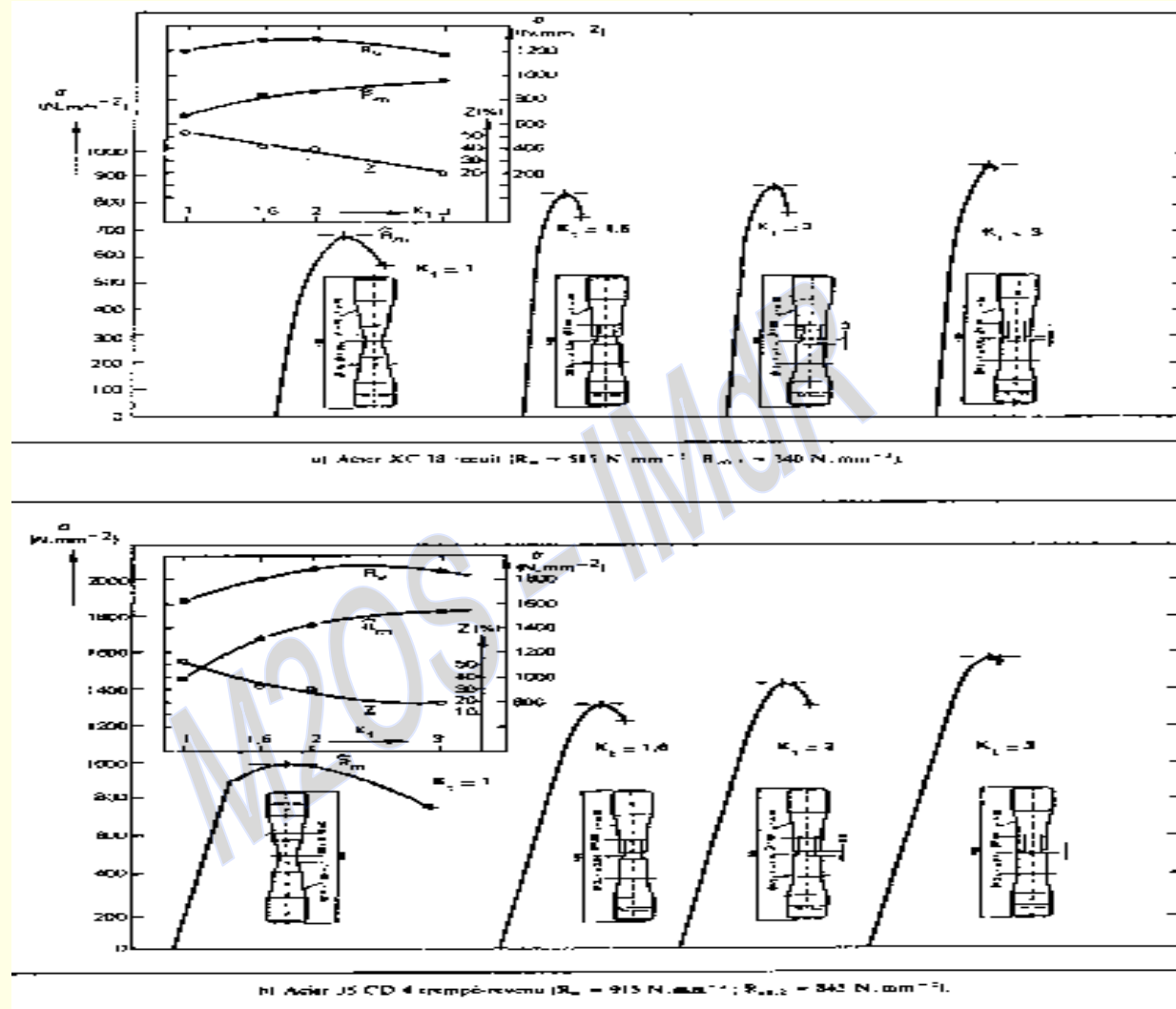




- Valeurs moyennes du facteur d'état de surface  $K_s$  en fonction de la résistance  $R_m$  et de la rugosité totale  $R_\mu$



















- Enregistrement de ruptures en traction statique d'éprouvettes diversement entaillées ( $K_t = 1, -1,6, -2, -3$ ) réalisées dans différents matériaux (XC 38 recuit, 35 CD 4 trempé-revenu, 35 CD 16 trempé-revenu).



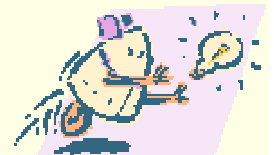
Équation générale des courbes à 90% :

$$\widehat{\sigma}_D = a \log \chi + b$$

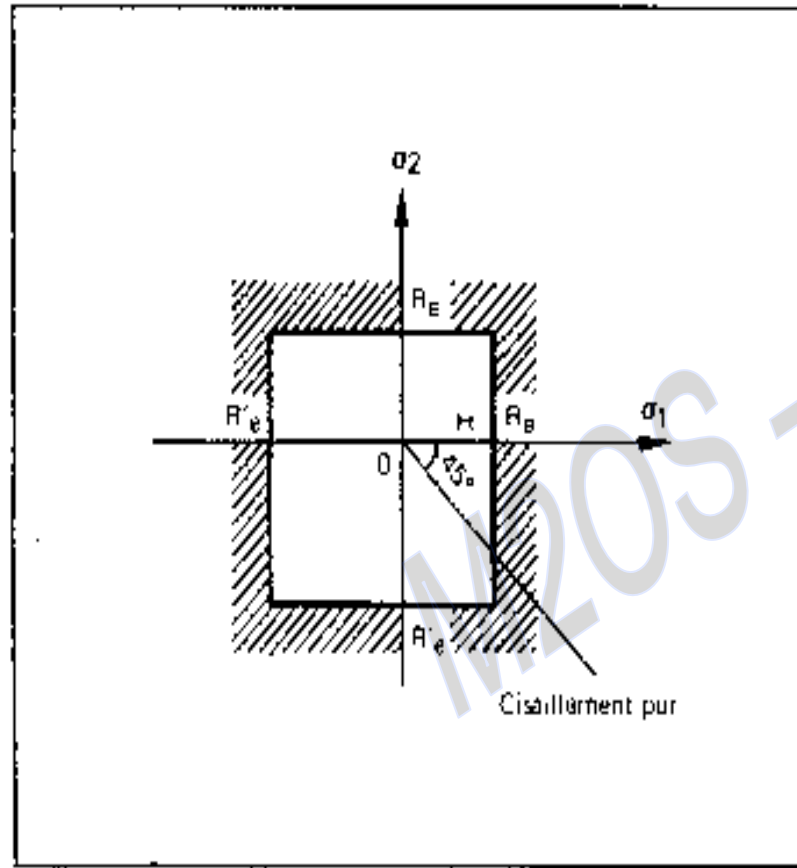
(  $\widehat{\sigma}_D$  en  $N/mm^2$  -  $\chi$  en  $mm^{-1}$  )

Réf. courbe	Classe acier ( $R_m$ en $N.mm^{-2}$ )	a	b
	$R_m \geq 1\,400$	100/3	655
	$1\,200 \leq R_m < 1\,400$	110/3	585
	$1\,000 \leq R_m < 1\,200$	120/3	520
	$900 \leq R_m < 1\,000$	130/3	465
	$800 \leq R_m < 900$	130/3	430
	$700 \leq R_m < 800$	135/3	390
	$600 \leq R_m < 700$	135/3	335
	$500 \leq R_m < 600$	140/3	295
	$400 \leq R_m < 500$	140/3	245
	$R_m < 400$	140/3	195
Réf. courbe	Classe acier ( $R_m$ en $N.mm^{-2}$ )	a	b
	$350 \leq R_m < 500$	140/3	180
	$R_m < 350$	140/3	135

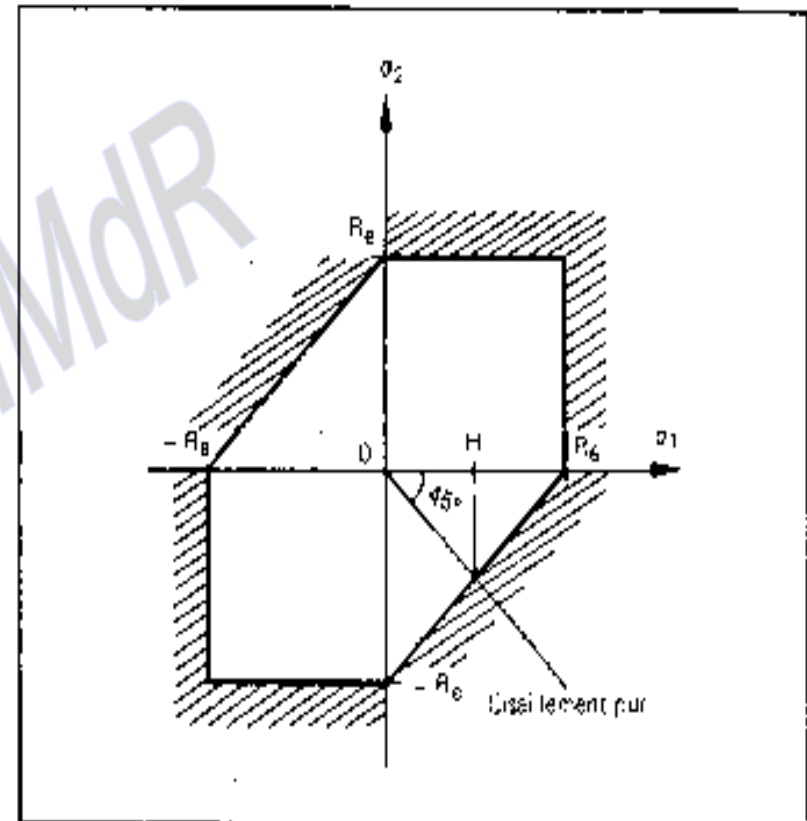
- Valeurs des coefficients a et b servant au calcul de  $\widehat{\sigma}_D$  suivant la classe utilisée.



— Représentation dans le plan  $\sigma_1$  du critère de Rankine.

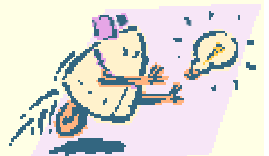


— Représentation dans le plan  $\sigma_1$  du critère de Tresca.





## 6. RAPPELS TENSEURS MECANIQUE DE LA RUPTURE



## CONTRAINTE PLANE

$$\varepsilon_{ZZ} \neq 0$$

Plaque mince

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

## DEFORMATION PLANE

$$\varepsilon_{ZZ} = 0$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



## CONDITIONS DE VALIDITE DE K1c

- État de déformation plane
- Non possibilité de relaxation par déformation plastique globale

$$R_p \leq \frac{a}{25}$$

$$R_p \leq \frac{B}{25}$$

$R_p$  = longueur de la zone plastique

$a$  = longueur de la fissure

$B$  = Épaisseur de l'éprouvette

$$R_p = 2 \cdot \frac{1}{6\pi} \left( \frac{K1c}{\sigma_y} \right)$$



## CRITERE D'ENERGIE

$$G_I = \sum \Delta W_i + \Delta W_{e1}$$

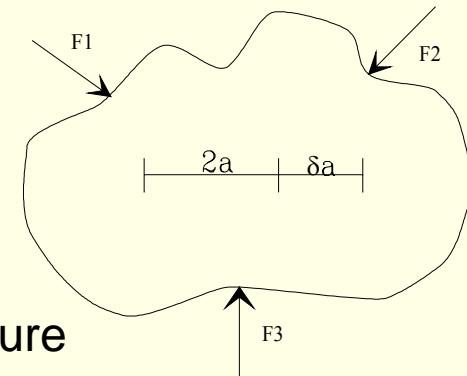
$\Delta W_i$  = travail de la force  $F_i$

$\Delta W_{e1}$  = variation d'énergie élastique du corps

$G_I$  = énergie disponible pour faire progresser la fissure

$\Gamma_{1c}$  = énergie nécessaire pour faire progresser la fissure

Propagation globale pour  $G_I \geq \Gamma_{1c}$



$$G_{Ic} = \frac{K_{Ic}^2}{E} \quad \text{Contrainte plane}$$

$$G_{Ic} = \frac{K_{Ic}^2}{E} (1 - \nu^2) \quad \text{Déformation plane}$$





## CRITERE DE GRIFFITH

Matériaux fragiles

$\gamma_s$  = Energie superficielle

$$K_{1c}^2 = EG_{1c} = 2E\gamma_s$$

$$\sigma_{\text{Critique}} = \beta \sqrt{\frac{E\gamma_s}{\pi a}}$$

## CRITERE DE GRIFFITH - OROWAN

$\gamma_p$  = Énergie de déformation plastique

$$G_{1c} = 2\gamma_s + \gamma_p$$



## INTEGRALE J DE RICE

$$J = \int_{\Gamma} W dy - \vec{T} \cdot \frac{\delta \vec{u}}{\delta \vec{x}} ds$$

$\Gamma$  = Contour entourant l'extrémité de la fissure.

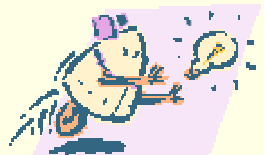
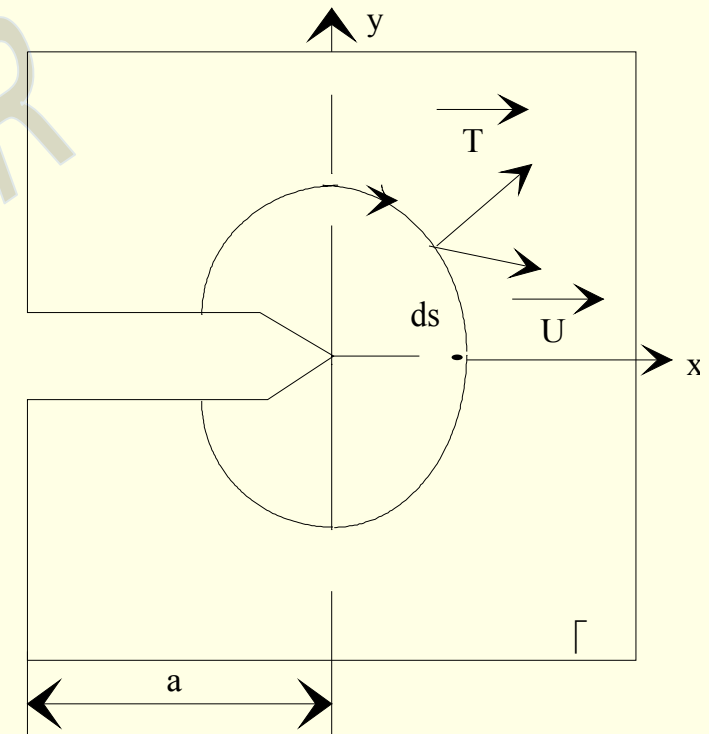
$W$  = Densité d'énergie de déformation  $\int W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$

$x, y$  = Coordonnées des points

$\vec{T}$  = Vecteur force superficielle

$\vec{U}$  = Déplacement du vecteur force

$a$  = Abscisse curviligne d'un point sur  $\Gamma$



## PROPRIETES

- Indépendance du contour.
- Dans le cas d'un corps parfaitement élastique - faible déformation plastique.

$$J = G = \frac{dP}{da}$$

P = énergie potentielle du corps fissuré par unité d'épaisseur  
- dans le cas de forte déformation plastiques.

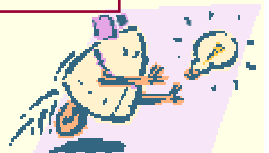
$$J = d \frac{(P + Dab)}{da} \neq G$$

## POUR LE MODE 1

$$J_I = \frac{1 - \nu^2 k_I^2}{E} \text{ Déformations planes}$$

$$J_I = \frac{1}{E} K_I^2 \text{ Contraintes planes}$$

**AUTRE METHODE CONCEPT DE L'ENERGIE  
EQUIVALENTE METHODE DES COURBES R**



## DEFAULTS DANS LES STRUCTURES

$$P(N_p < N_o) = 1 - \pi_{K=1}^c [1 - P_k(N_p < N_o)]$$

D = deuxième de l'inclusion

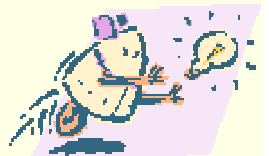
S = Surface du composant

V = Volume

$$P_k(N_p < N_o) = \underbrace{\left[ 1 - \left( 1 - \frac{DKS}{\gamma} \right)^{N_{kv}} \right]}_{p'K} \left[ 1 - \left( \frac{d}{Dk} \right) \right]$$

P'K = Probabilité pour une inclusion de classe K d'être sur la surface S.

On suppose que l'amorçage est immédiat.



# 7. TRAVAUX ESA



# PROBABILISTIC APPROACH TO STRUCTURAL FACTORS OF SAFETY IN AEROSPACE

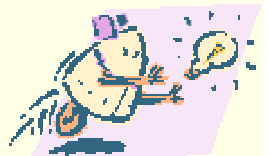
M. Klein<sup>1</sup>, G.I. Schuëller<sup>2</sup>, P. Deymarie<sup>3</sup>, M. Macke<sup>2</sup>, P. Courrian<sup>3</sup> and R.S. Capitanio<sup>1</sup>

<sup>1</sup>European Space Research and Technologie Centre (ESTEC), Noordwijk, The Netherlands

<sup>2</sup>Institute of Engineering Mechanics, University of Innsbruck, Austria

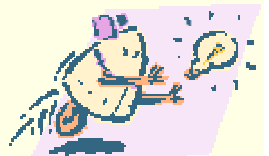
<sup>3</sup>Aerospatiale, Aquitaine, France

- STATEMENT OF THE PROBLEM
- PROBABILISTIC TIME INVARIANT FACTORS OF SAFETY (FOS) FOR SPACECRAFTS
- COMPLEMENTS TO FOS FOR SPACECRAFTS
  - TIME INVARIANT ASPECTS
  - TIME VARIANT ASPECTS :
    - ▣ FRACTURE
    - ▣ FATIGUE
  - TIME DEPENDENT FOS
- STANDARD ON FOS FOR SPACECRAFTS
- ADVANCED FACTORS OF SAFETY : PARTIAL SAFETY FACTOR (PSF) CONCEPT
- NUMERICAL EXAMPLES
- CONCLUSIONS AND OUTLOOK



## STATEMENT OF PROBLEM

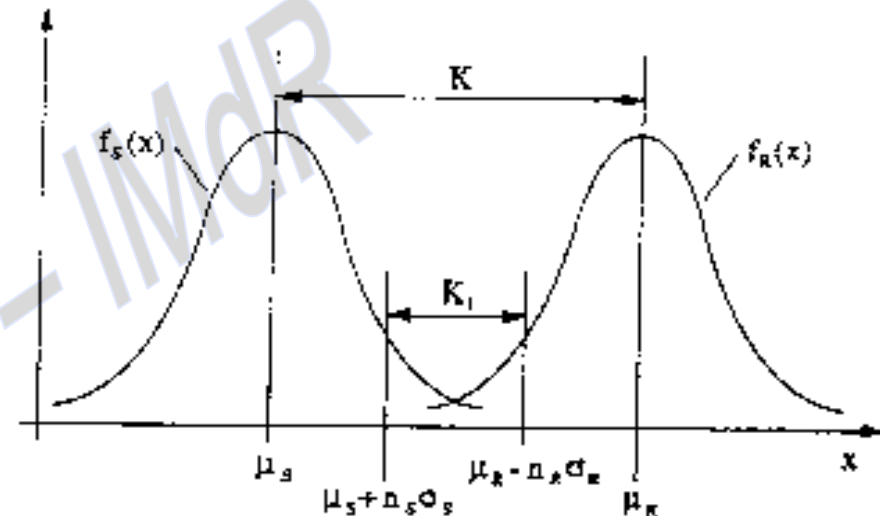
- RATIONALIZE FACTOR OF SAFETY (FOS) CONCEPT BY ANALYZING STATISTICAL UNCERTAINTIES OF INPUT PARAMETERS
- INCLUDE TIME VARIANT PROPERTIES
  - ⇒ CRACK PROPAGATION (FACTURE)
  - ⇒ DAMAGE ACCUMULATION (FATIGUE)
- RELATE UNCERTAINTIES DIRECTLY TO SAFETY FACTORS
  - ⇒ PARTIAL SAFETY FACTORS (PSF)



## PROBABILISTIC TIME INVARIANT FACTOR OF SAFETY (FOS)

Definition of failure probability  $\rho_f$

$$\rho_f = \int_0^{\infty} F_R(x) f_s(x) dx$$



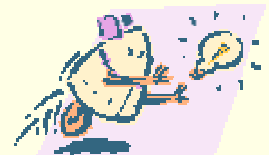
Where

$f_s(x)$  ... Probability Density Function (PDF) of the load  $S$

$f_R(x)$  ... PDF of the resistance  $R$

$F_R(x)$  ... Cumulative Distribution Function (CDF) of the resistance  $R$

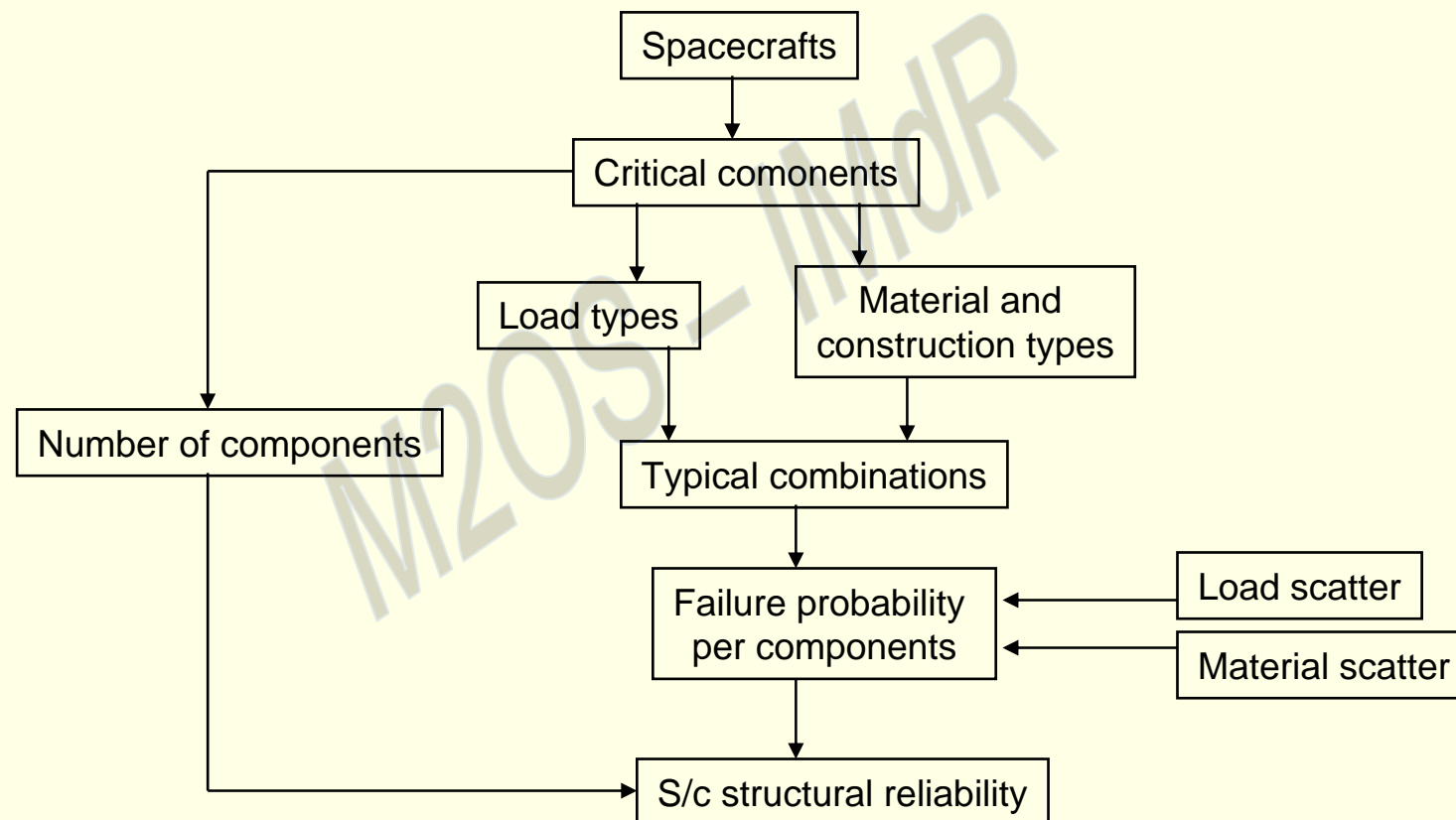
$K, K_1$  ... Safety Factors



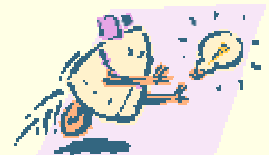


## PROBABILISTIC FOS (cont.)

→ DERIVATION OF THE SPACECRAFT FACTORS OF SAFETY



Schematic Sketch of Procedure of Failure Analysis



## PROBABILISTIC FOS (cont.)

### → LOADS AND MATERIAL CLASSES 1<sup>ST</sup> APPROACH

	Metallic Material ( $\sigma/\mu = 8\%$ )	Metallic Material : Yield Strength When R/Yield = 1.2 ( $\sigma/\mu = 15\%$ )	Buckling Strength of Conical or Cylindrical Metallic Shells( $\sigma/\mu = 14\%$ )	Carbon Fiber Composites ( $\sigma/\mu = 10\%$ )	Junction by Screw, Rivet Welding ( $\sigma/\mu = 8\%$ )	Bonding Structural Insert (Axial Loading), ( $\sigma/\mu = 12\%$ )	Honeycomb : Tension ( $\sigma/\mu = 16\%$ )	Honeycomb : Shear, Compression ( $\sigma/\mu = 10\%$ )	Honeycomb : Face Wrinkling ( $\sigma/\mu = 8\%$ )	Equipment Insert (in Honeycomb Axial Loading), ( $\sigma/\mu = 16\%$ )
Launch Vehicle Thrust ( $\sigma/\mu = 5\%$ )	1.29	2.24	1.98	1.42	1.29	1.64	2.60	1.42	1.29	2.60
Launch Vehicle Other Static Loads ( $\sigma/\mu = 30\%$ )	1.45	1.98	1.82	1.51	1.45	1.62	2.21	1.51	1.45	2.21
Transient Loads ( $\sigma/\mu = 50\%$ )	1.59	2.00	1.87	1.62	1.59	1.71	2.19	1.62	1.59	2.19
Thermal Loads (correlated) ( $\sigma/\mu = 7.5\%$ )	1.29	2.17	1.93	1.41	1.29	1.61	2.51	1.41	1.29	2.51
Deployment Shock ( $\sigma/\mu = 10\%$ )	1.29	2.11	1.89	1.41	1.29	1.58	2.45	1.41	1.29	2.45
Thruster Loads ( $\sigma/\mu = 2\%$ )	1.31	2.34	2.07	1.48	1.31	1.71	2.73	1.48	1.31	2.73
Acoustic Loads ( $\sigma/\mu = 40\%$ )	1.53	1.98	1.84	1.57	1.53	1.67	2.19	1.57	1.53	2.19
Vibration Loads – Thermal Loads (uncorrelated) ( $\sigma/\mu = 20\%$ )	1.37	2.01	1.82	1.45	1.37	1.59	2.28	1.45	1.37	2.28

Failure probability =  $10^{-6} \rightarrow K_1 = \frac{\text{minimum guaranteed strength (2}\sigma \text{ value)}}{\text{Limit Load (2}\sigma \text{ value)}} : (1.29 < K_1 < 2.73).$

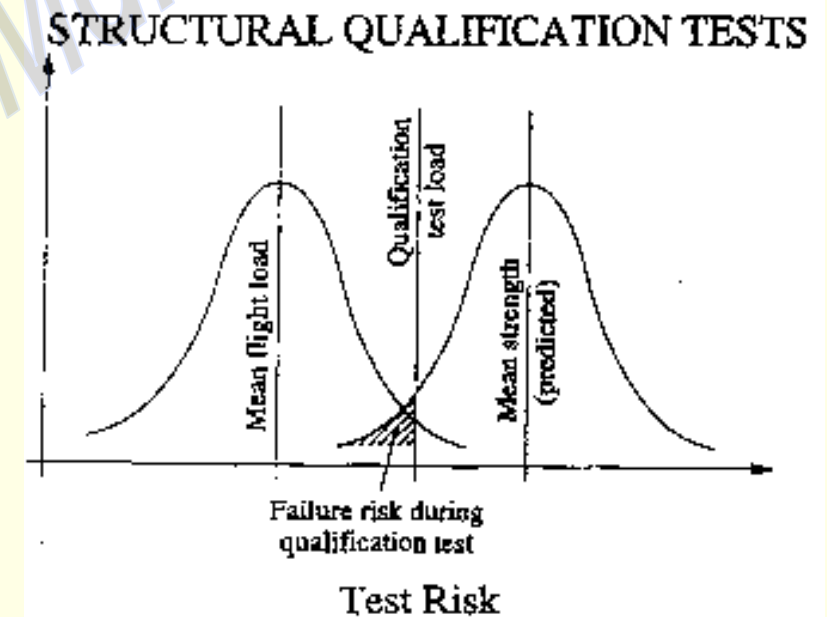
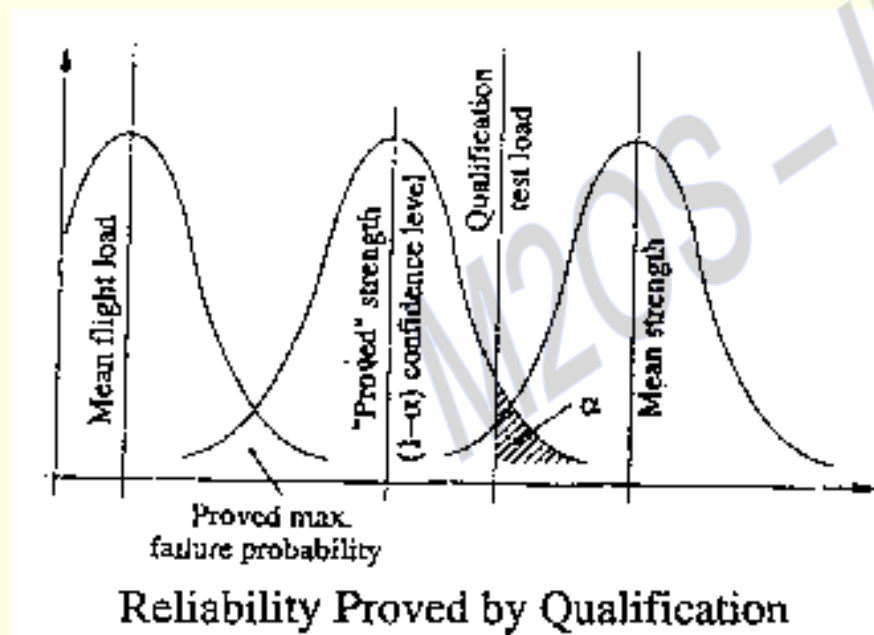
### → AMOUNT OF CLASSES NEEDS TO BE REDUCED FOR PRACTICAL APPLICATION



## PROBABILISTIC FOS (cont.)

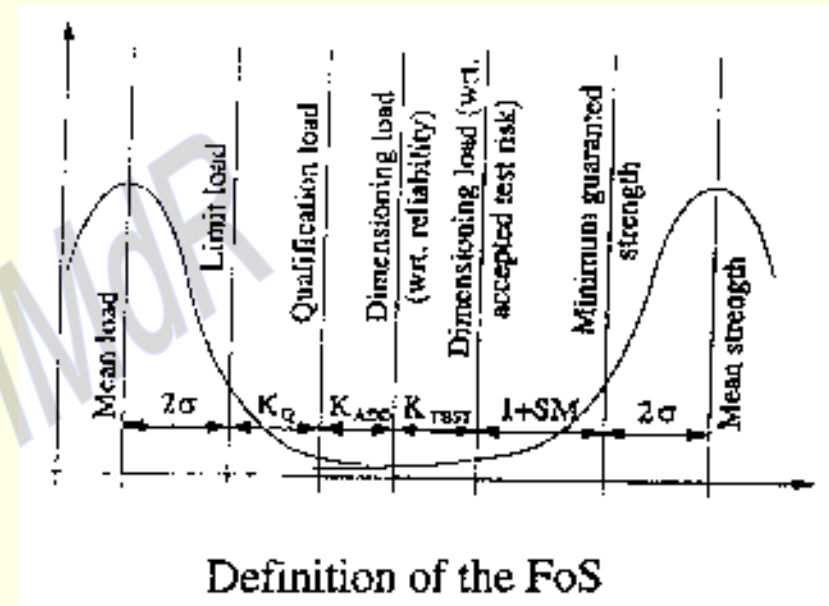
→ REDUCTION OF THE CLASSES BASED ON FOLLOWING ASPECTS :

↻ Structural qualification test



## PROBABILISTIC FOS (cont.)

→ Definition of practical FOS



Where

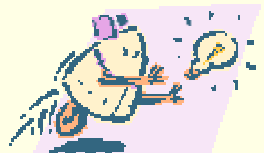
$K_Q$  ... Qualification Test Factor

$$K_1 = K_Q \cdot K_{ADD} \cdot K_{TEST} \cdot (1 + SM)$$

$K_{ADD}$  ... Additional Material/Construction Factor

$K_{TEST}$  ... Hardware Philosophy/Test Factor

$SM$  ... Safety Margin  
(average value 0.1, to be verified posteriori)



## PROBABILISTIC FOS (cont.)

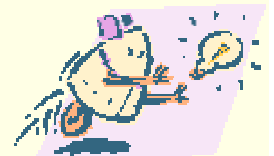
### → THE PROPOSED FOS

Loading conditions	$K_Q$
For all static loads, thermal loads, vibration loads and development shocks	1.5
For transient and acoustic loads	1.58

Qualification Factor  $K_Q$  (for Reliability Proved by Test)

Material	$K_{ADD}$
Matellic materials, screw, rivet, welding, face wrinkling of honeycomb	1.0
Carbon fiber, honeycomb (shear compression)	1.0
Bonding, structural insert (axial loading)	1.1
Buckling strength	1.3
Honeycomb in tension, equipment insert in honeycomb (axial loading)	1.65 if specific tests to verify the margin 3.60 if not
Metallic material ( $R/yield > 1.2$ ) yield strength	1.45 if specific tests to verify the margin 2.45 if not

Additional Factor  $K_{ADD}$  (for the Reliability)

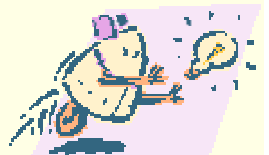


## PROBABILISTIC FOS (cont.)

### → THE PROPOSED FOS (cont.)

Test	Individual Subsystem Test (Risk 10%)	Individual Subsystem Test (Risk 1%)	Test at system Level, No Test at Subsystem Level (Risk 10%)	Test at system Level, No Test at Subsystem Level (Risk 1%)
Static Test	1.05	1.10	-	-
Vibration Test	1.05	1.10	1.10	1.20
Transient Test	-	-	1.10	1.20
Acoustic	1.00	1.05	1.00	1.10
Thermal Test	1.00	1.05	1.00	1.10
Deployment Test	1.05	1.15	-	-
Orbital Loads Test	1.00	1.10	-	-
Pressure, Initial Tension Test	1.00	1.10	-	-

Additional Factor  $K_{TEST}$  (for an Accepted Test Risk)



## COMPLEMENTS TO PROBABILISTIC FOS FOR SPACRAFTS

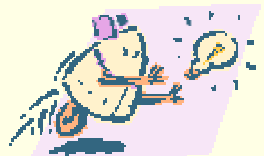
- Time invariant aspects
- Time variant aspects
  - ➔ Fatigue
  - ➔ Fracture analysis

M2OS - IMdR



## COMPLEMENTS TO FOS (cont.) TIME INVARIANT ASPECTS

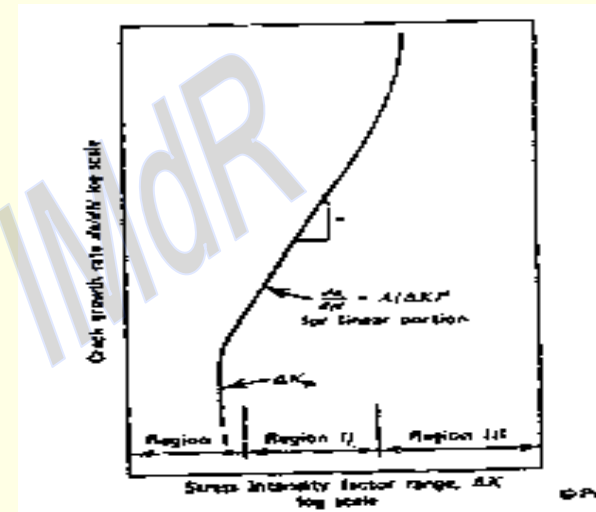
- Impact of statistical aspects
  - ➔ Type of laws
  - ➔ Redundancies
- Other materials
  - ➔ Brittle (glass, ...), Invar, etc.
- Other structural parts
  - ➔ Vessels, Piping, etc.
- Complements wrt. Loads
  - ➔ Launch Flight Data Analysis wrt.
  - ➔ Low Frequency Dynamics
  - ➔ Acoustics
  - ➔ Preloads, Alignment, Tolerances, ...
  - ➔ Load Combination Rules
- Structural non-linear behavior
- Project/model factors
- Integrated analysis & FMECA approaches





## COMPLEMENTS TO FOS (cont.) TIME VARIANT ASPECTS : FRACTURE ANALYSIS

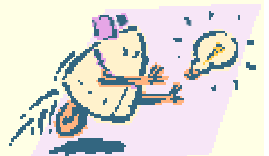
### → Fracture analysis



Schematic Sketch of fatigue crack growth rate vs.  $\Delta K$

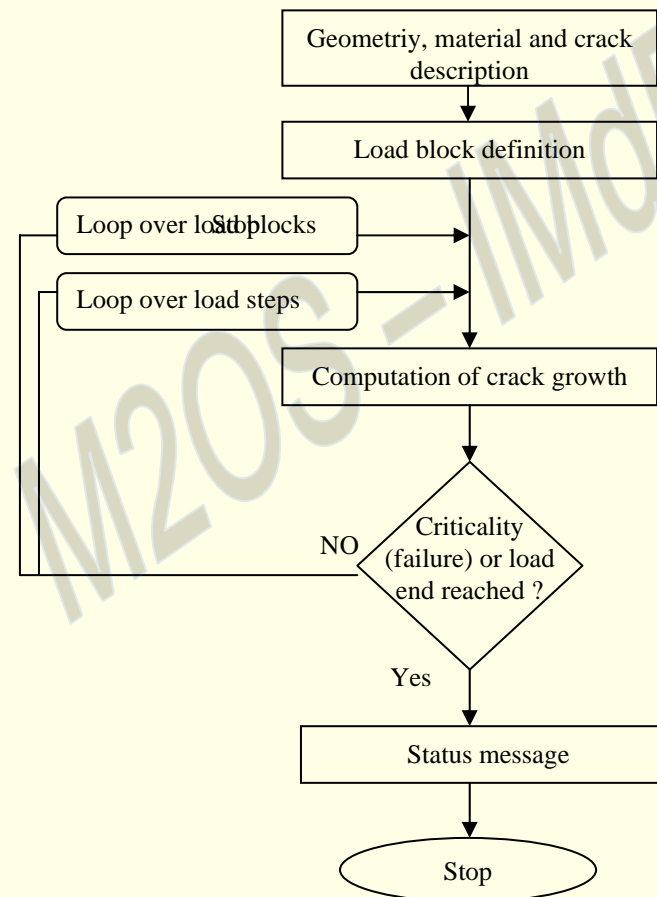
→ «Extended» forman equation : 
$$\frac{da}{dN} = \frac{C(1-R)^m \Delta K^n (\Delta K - \Delta K_{th})^p}{[(1-R)K_c - \Delta K]^q}$$

→ Threshold  $\Delta K_{th}$  : 
$$\Delta K_{th} = (1 - C_o R)^d \Delta K_o$$

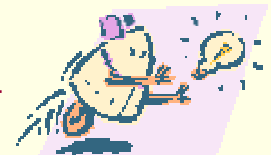


## COMPLEMENTS TO FOS (cont.) TIME VARIANT ASPECTS : FRACTURE ANALYSIS

### → Deterministic Fracture Analysis Process ESACRACK V2.0



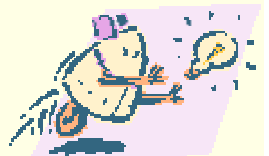
Output : Failure Reached, YES/NO answer



## COMPLEMENTS TO FOS (cont.) TIME VARIANT ASPECTS : FRACTURE ANALYSIS

### → Probabilistic Fracture Analysis Process

- ⇒ Monte-Carlo Method used
- ⇒ Variance Reduction Methods used
- ⇒ The ESACRACK Failure Equations are programmed as «Limit State Functions»
- ⇒ Coupling ESACRACK to ISPUD
- ⇒ Modification of ESACRACK :
  - ▣ Rwo-Criteria Approach : R6 - Criterion (*Burdekin/Stone*)

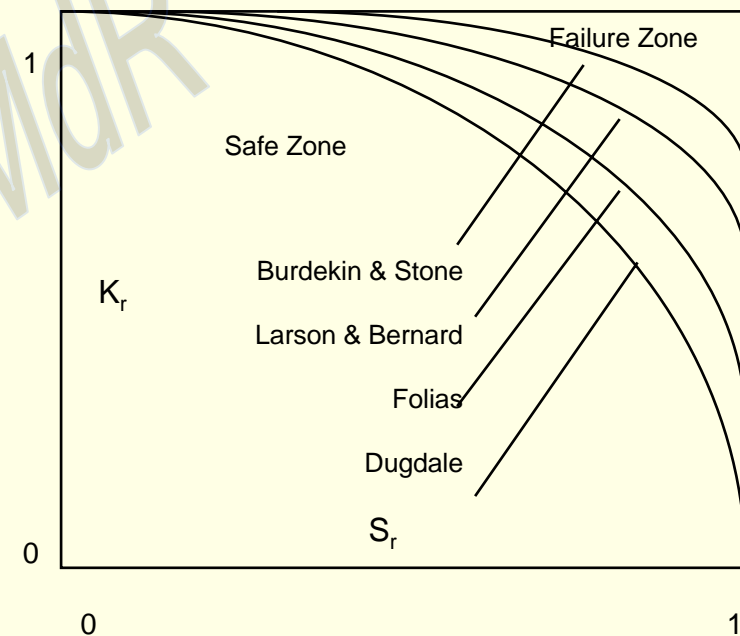


## COMPLEMENTS TO FOS (cont.) TIME VARIANT ASPECTS : FRACTURE ANALYSIS

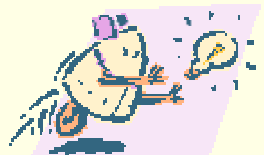
→ Two-Criteria approach :

*BURDEKIN & STONE* EQUATION :

$$K_r = S_r \left\{ \frac{8}{\Pi^2} \ln \left[ \sec \left[ \frac{\Pi S_r}{2} \right] \right] \right\}^{-1/2}$$



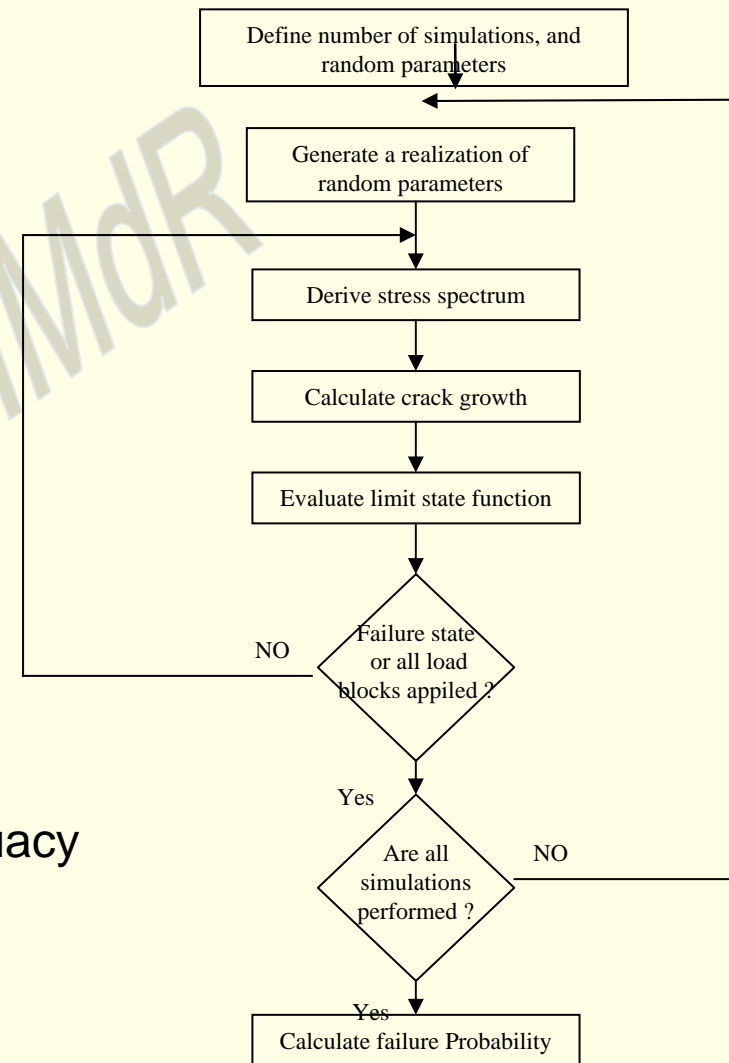
Brittle and ductile failure



## COMPLEMENTS TO FOS (cont.)

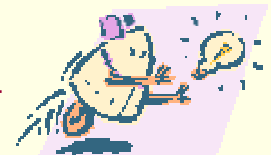
### TIME VARIANT ASPECTS : FRACTURE ANALYSIS

→ ESACRACK.PROB V1.0



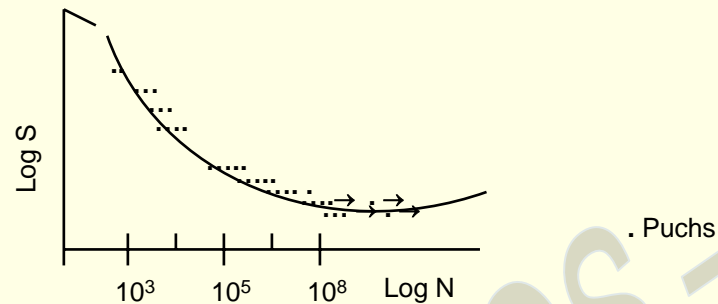
Output : Failure Probability  $P_f$

⇒ Quantitative Evaluation of Adequacy of Factor on Life



## COMPLEMENTS TO FOS (cont.) TIME VARIANT ASPECTS : FATIGUE

### → Fatigue Analysis



### → Number of cycles to failure :

$$\text{Log}[N] = A - B \cdot \log[S_{\text{eq}} - C]$$

### Linear Damage accumulation :

$$D = \sum_i \Delta D_i = \sum_i \frac{n_i}{N_i}$$

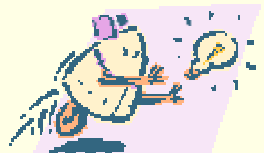
### → Equivalent Stress Amplitude :

$$S_{\text{eq}} = K_f S_{\text{max}} (1 - R)^p - K$$

with  $R = S_{\text{min}}/S_{\text{max}}$

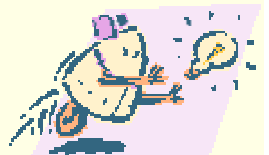
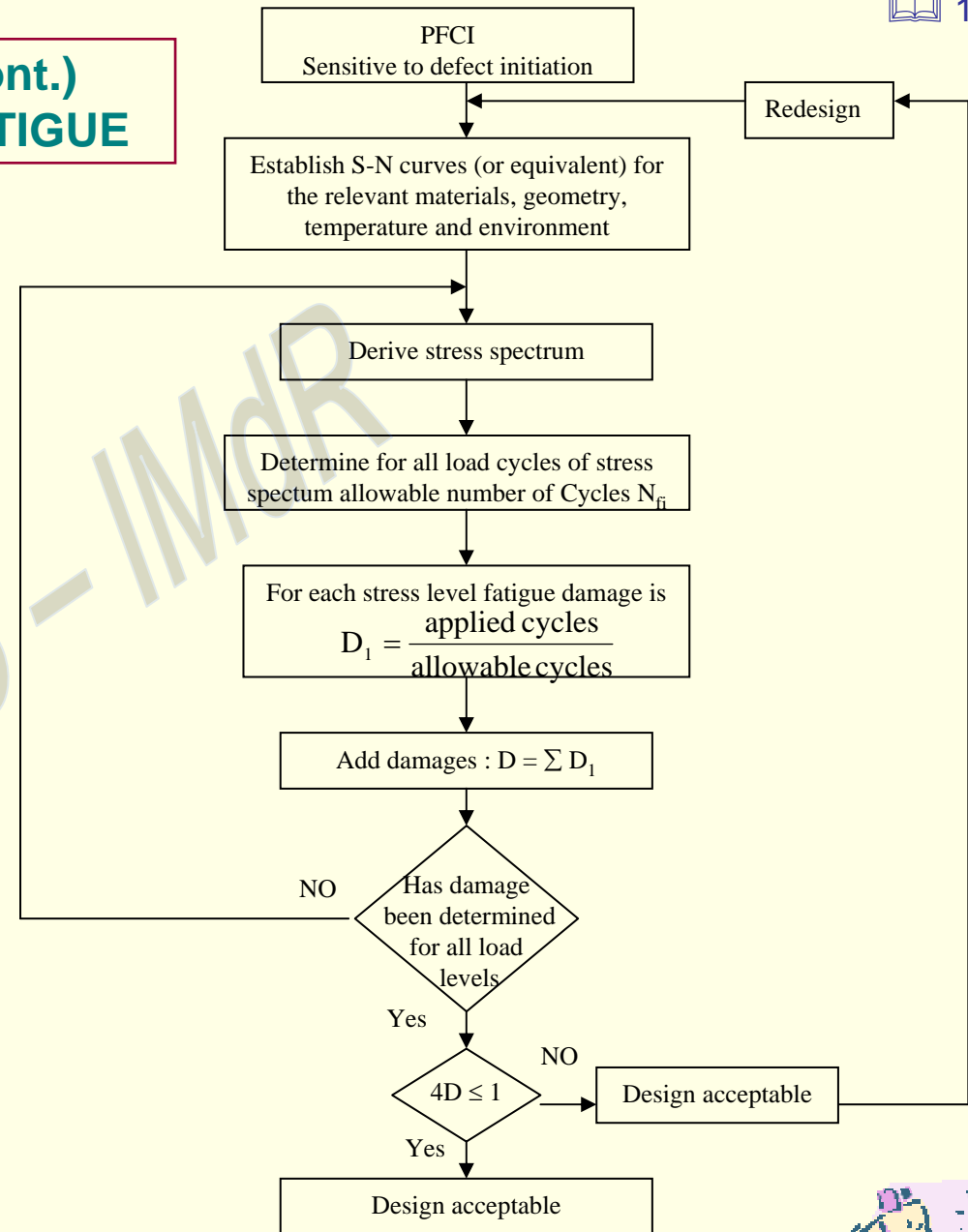
### Partial Damage (endurance limit) :

$$\Delta D_i = \begin{cases} 0 & \text{if } S_{\text{max}} < L \\ \frac{n_i}{N_i} & \text{Else} \end{cases}$$



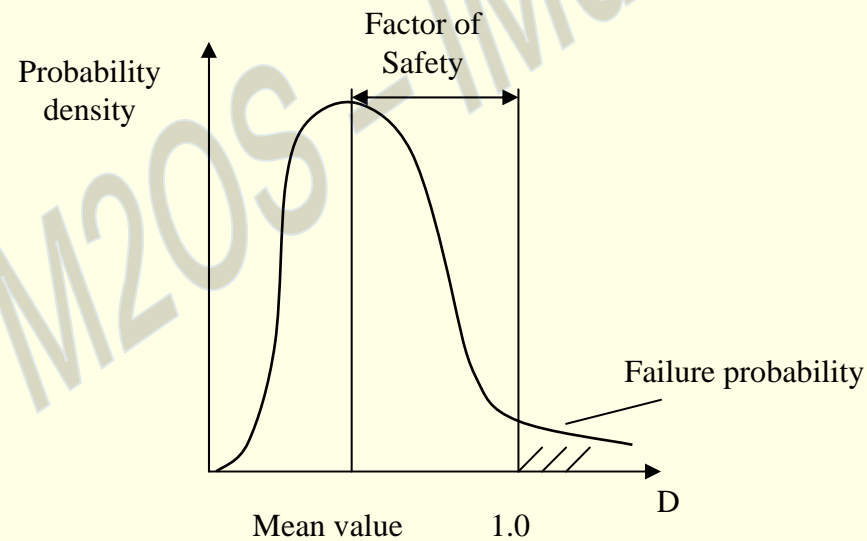
## COMPLEMENTS TO FOS (cont.) TIME VARIANT ASPECTS : FATIGUE

→ Deterministic Fatigue Process  
ESAFATIGUE V2.0

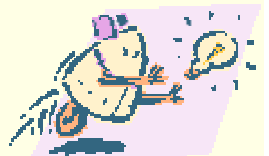


## COMPLEMENTS TO FOS (cont.) TIME VARIANT ASPECTS : FATIGUE

- Probabilistic Fatigue Analysis Process
- Monte Carlo Method used for Statistical Evaluation



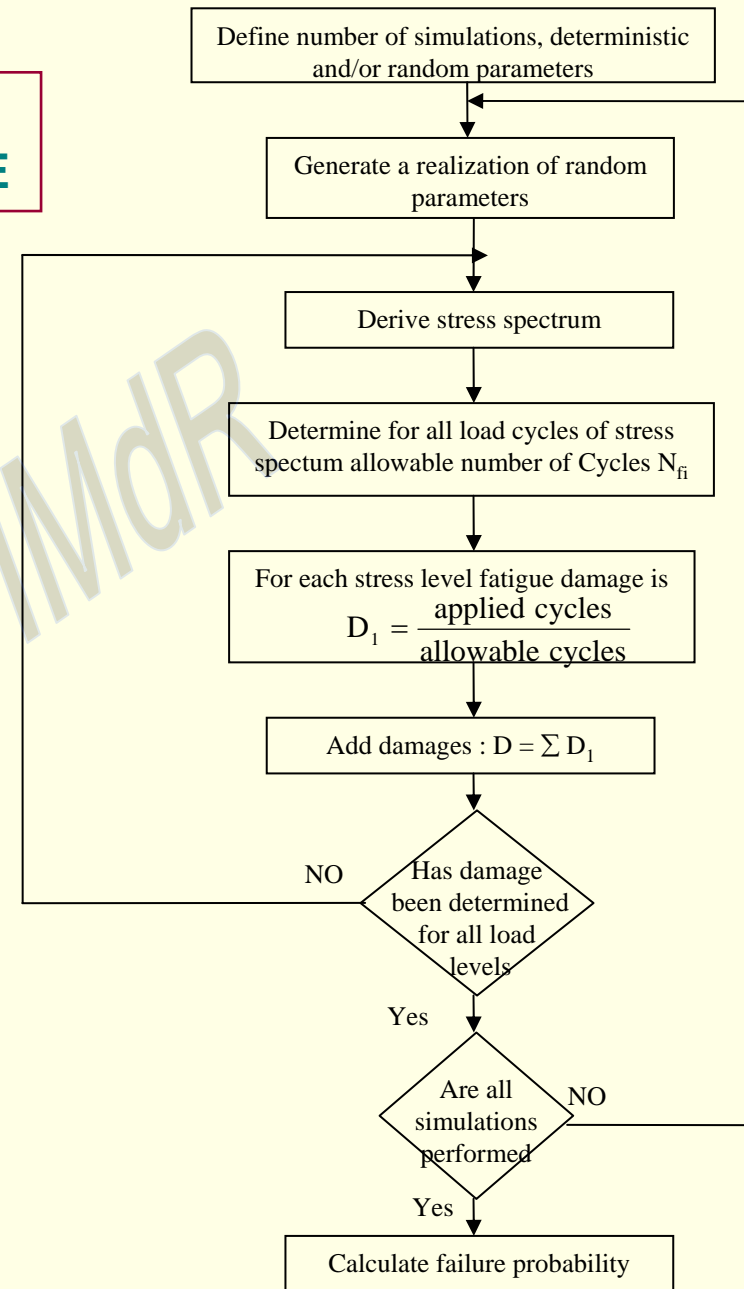
- Coupling ESAFATIGUE to ISPUD





## COMPLEMENTS TO FOS (cont.) TIME VARIANT ASPECTS : FATIGUE

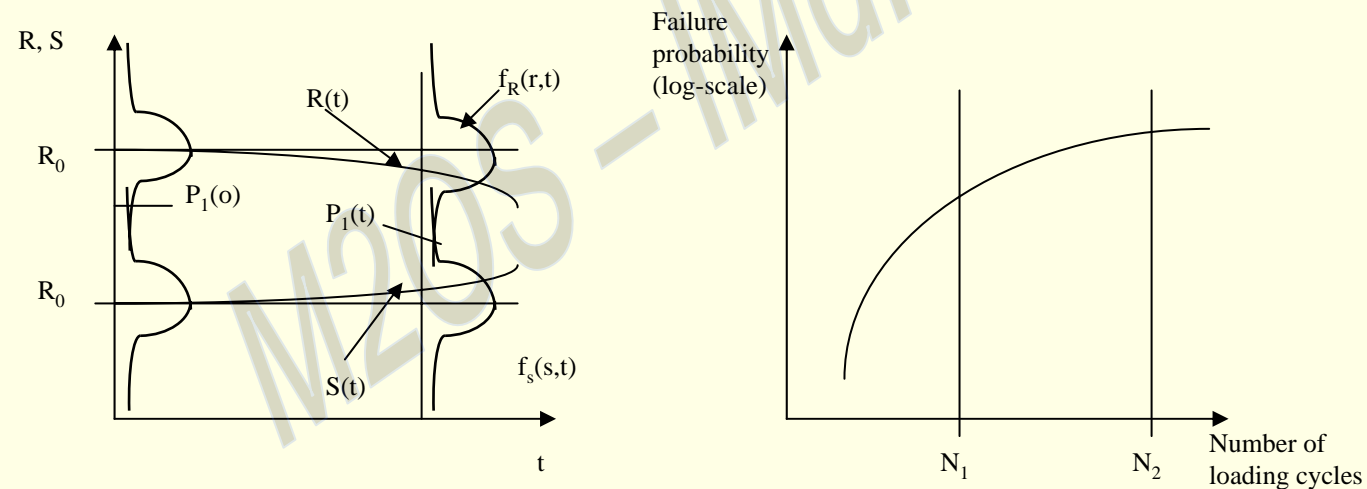
→ ESAFATIGUE.PROB V1.0



## COMPLEMENTS TO FOS (cont.) TIME VARIANT ASPECTS : FATIGUE

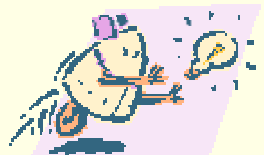
### → TIME-DEPENDENT FOS :

⇒ Dégradation Effect



⇒ Proposed FoS time dependency :

$$K(\text{life } F) = K(\text{time invariant}) * f(\text{life } F)$$



## STANDARD ON FOS FOR SPACECRAFTS

- PROBABILISTIC FOS STUDY COMPLETED
- COMPLEMENT TO FOS STUDY IN PROGRESS
- OBJECTIVES :
  - ⇒ Issue a Standard for the Agency's Spacecraft Factors of Safety
  - ⇒ Fixing Rules by which FoS could be Custom-Tailored where needed
- DRAFT TO BE RELEASED FOR DISCUSSION  
NOVEMBER 1994

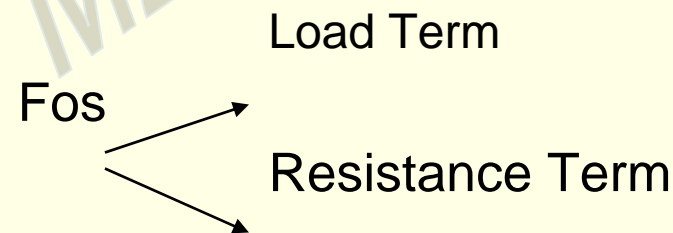


## ADVANCED FOS : THE PARTIAL SAFETY FACTOR (PSF) CONCEPT

### → PRINCIPLE

- ➔ Each major source of uncertainty in design is represented by an individual safety factor, denoted as partial safety factor

### → CONSIDERING THE SIMPLE 2 VARIABLES STRESS-STRENGTH METHOD, IT CAN BE ILLUSTRATED AS FOLLOWS



## THE PSF CONCEPT (cont.)

$R_p = \min R =$  Fractile of Loadings

$S_q = \max S =$  Fractile of Resistance

$$R_p = m_R - k_R \sigma_R$$

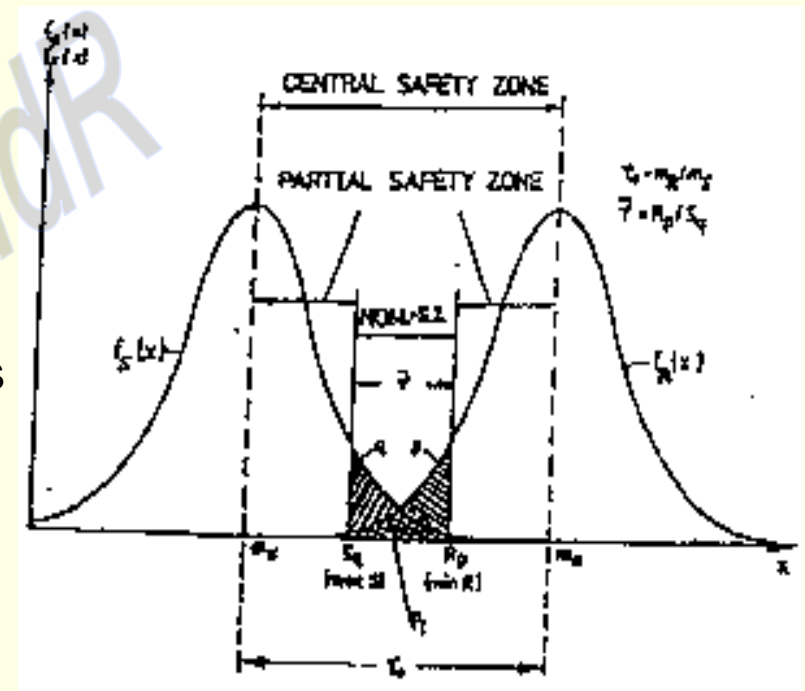
Safety Factor  $v = R_p / S_q$

$$S_q = m_s - k_s \sigma_s$$

Finally Safety with Respect to Fractiles yields

$$\bar{v} = \frac{(1 + \beta \alpha_s v_s)(1 - k_R V_R)}{(1 + k_s V_s)(1 - \beta \alpha_R V_R)} = \gamma_s \gamma_R$$

Partial Safety Factors  $\gamma_s, \gamma_r$

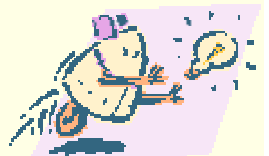


## THE PSF CONCEPT (cont.)

→ GENERAL DESIGN FORM (for a given target failure probability)

$$\frac{R_p}{\gamma_R} \geq \gamma_s S_q$$

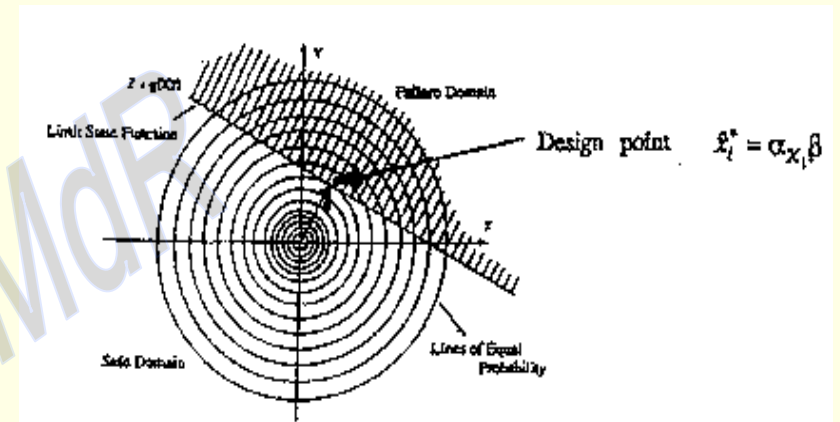
- ⇒ Simple
- ⇒ Practically applicable
- ⇒ Calibrated to target failure probability



## THE PSF CONCEPT (cont.)

### → GENERAL APPLICATION

$$Z = R - S, \quad Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

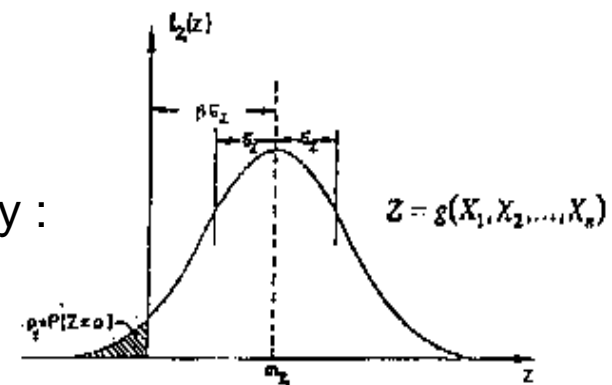


⇒ Coordinate transformation

⇒ Reliability index and failure probability :

$$\beta_Z = \frac{m_Z}{\sigma_Z}$$

$$P_f = \Phi(-\beta_Z)$$



## THE PSF CONCEPT (cont.)

→ By a similar but more complex process one can derive :

⇒ Partial safety factor :

$$\gamma_i = \frac{\chi_{\text{char}}}{F_{X_i}^{-1}(\Phi(\alpha_i \beta))}$$

⇒ Sensitivity factor :

$$\alpha_i \approx \frac{\partial \Phi^{-1}(P_f)}{\partial \mu_i} \quad - \quad \alpha_i^2 \Phi^{-1}(P_f) \approx \frac{\partial \Phi^{-1}(P_f)}{\partial \sigma_i}$$

→ The principle is applicable to time variant approach, E.G. applied to fatigue/Fracture analysis :

$$\log[N_i] = \begin{cases} \infty & \text{if } S_{\text{max}} < \gamma_L L \\ \gamma_A A - \gamma_B B \log[\gamma_{K_f} K_f S_{\text{max}} (1-R)^P - \gamma_K K - \gamma_C C] & \text{else} \end{cases}$$





## NUMERICAL EXAMPLES

### → Fracture analysis :

#### ➔ Loading :

📄 Block loading with :

- Load range :  $S_a = S_{\max} - S_{\min} = \text{Rayleigh (30MPa, 20MPa)}$
- Mean load :  $S_m = (S_{\max} + S_{\min}) / 2 = 150 \text{ MPa}$

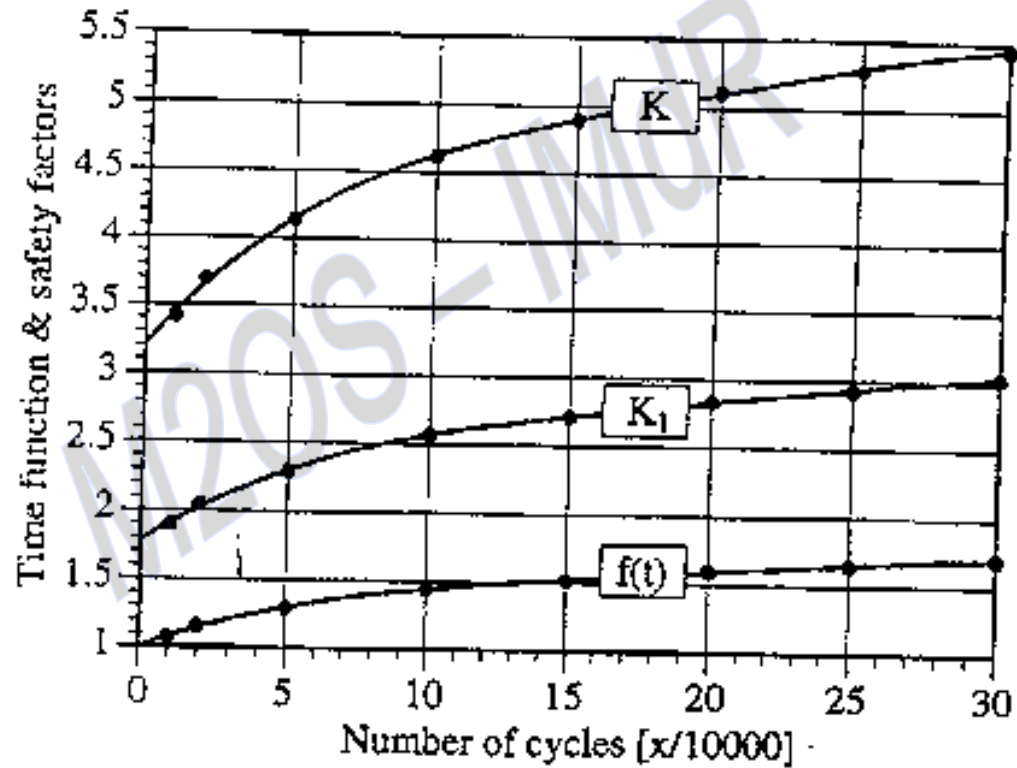
#### ➔ Definition of uncertain parameters :

	<b>DISTRIBUTION</b>	<b>Mean value</b>	<b>Coeff. Var. [%]</b>
$a_o$	Exponential	3.50 [mm]	20.0
$S_y$	Lognormal	427.50 [Mpa]	5.0
$K_{ic}$	Rayleigh	903.40 [Mpa.mm <sup>0.5</sup> ]	5.0
C	Lognormal	$1.07 \cdot 10^{-13}$ [Mpa <sup>-3.643</sup> .mm <sup>0.5</sup> ]	10.0
$\Delta K_o$	Gamma	86.87 [Mpa.mm <sup>0.5</sup> ]	5.0
$f_{sif}$	Normal	1.00 [-]	5.0

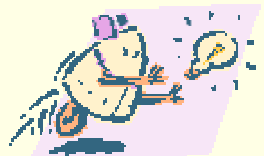


## NUMERICAL EXAMPLES (cont.)

→ Results :



Time function  $f(t)$  and time variant factors  $K$  and  $K_1$



## NUMERICAL EXAMPLES (cont.)

### → Fatigue analysis :

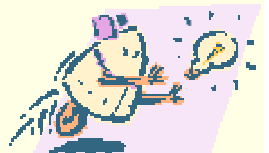
#### ➔ Loading :

##### 📄 Block loading with :

- Load range :  $S_a = S_{\max} - S_{\min} = \text{Rayleigh} (30\text{MPa}, 20\text{MPa})$
- Mean load :  $S_m = (S_{\max} + S_{\min}) / 2 = 150 \text{ MPa}$

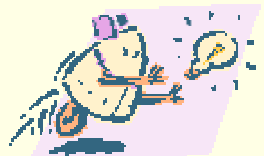
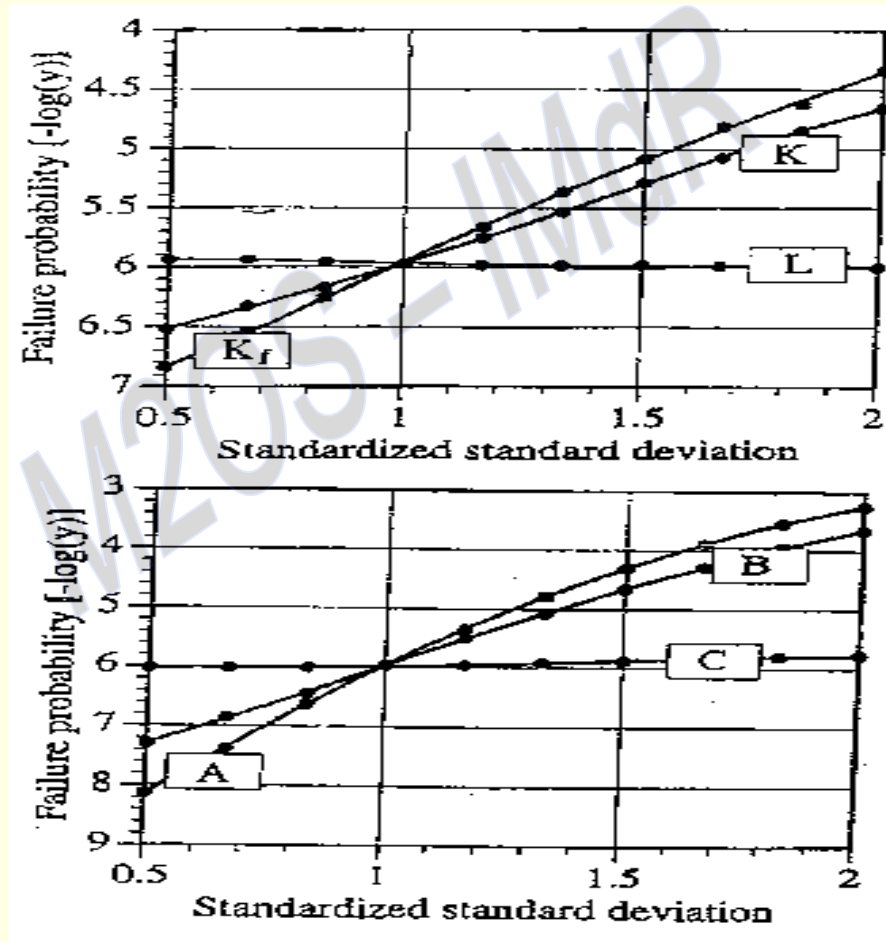
#### ➔ Definition of fatigue analysis parameters :

	<b>Distribution</b>	<b>Mean</b>	<b>St. Dev.</b>
$K_f [-]$	Normal	2.5	0.12
$P [-]$	Fixed	0.6	-
$K [\text{MPa}]$	Normal	0.0	5.00
$A [-]$	Lognormal	27.0	0.40
$B [\log[\text{MPa}]^{-1}]$	Lognormal	9.0	0.13
$C [\text{MPa}]$	Rayleigh	125.0	5.00
$L [\text{MPa}]$	Rayleigh	172.0	17.20



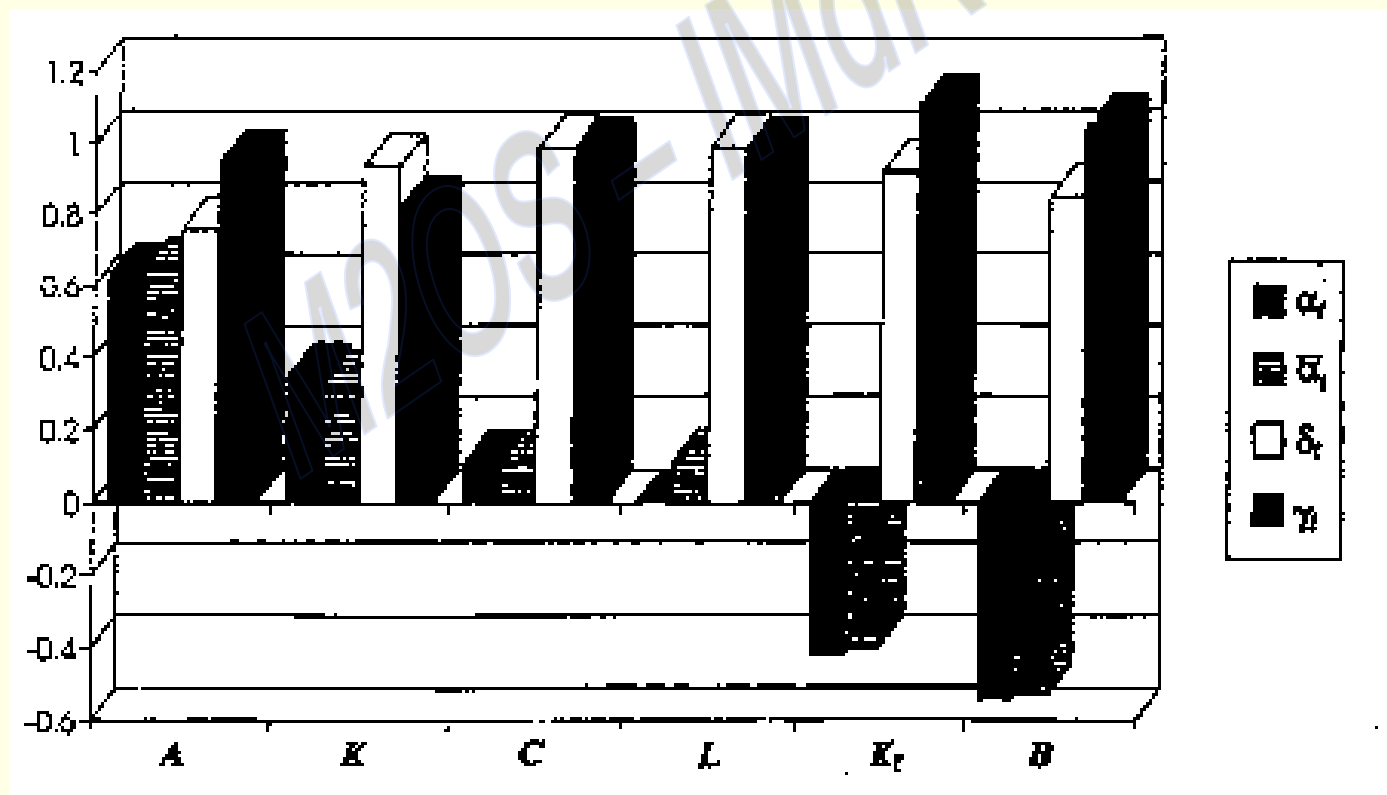
## NUMERICAL EXAMPLES

→ Sensitivity analysis



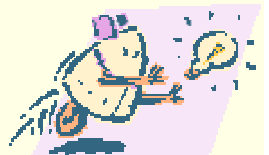
## NUMERICAL EXAMPLES

→ Sensitivity factors  $\alpha_i$ , omission sensitivity factors  $\delta_i$ , and partial safety factors  $\gamma_i$  :

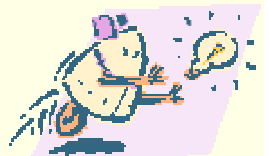


## CONCLUSIONS

- The probabilistic factor of safety concept is a very powerful concept :
  - ➔ To define FOS's,
  - ➔ To provide means tailor FOS's where required.
- The FOS-concept can be expanded to take into account time variant effects (fatigue, fracture). However experimental data are highly needed.
- The first provisional draft standard on structural FOS will be issued around november 1994 for discussion with industry.
- An extension to a PSF-concept is feasible. Preliminary results are promising. More work is required.
- Additional experimental data are urgently needed in order to increase the accuracy of the quantified PSF's.
- The agency intends to pursue the above rationalization effort in the future.



# 8. TRAVAUX CEA RUPTURE DE CUVES



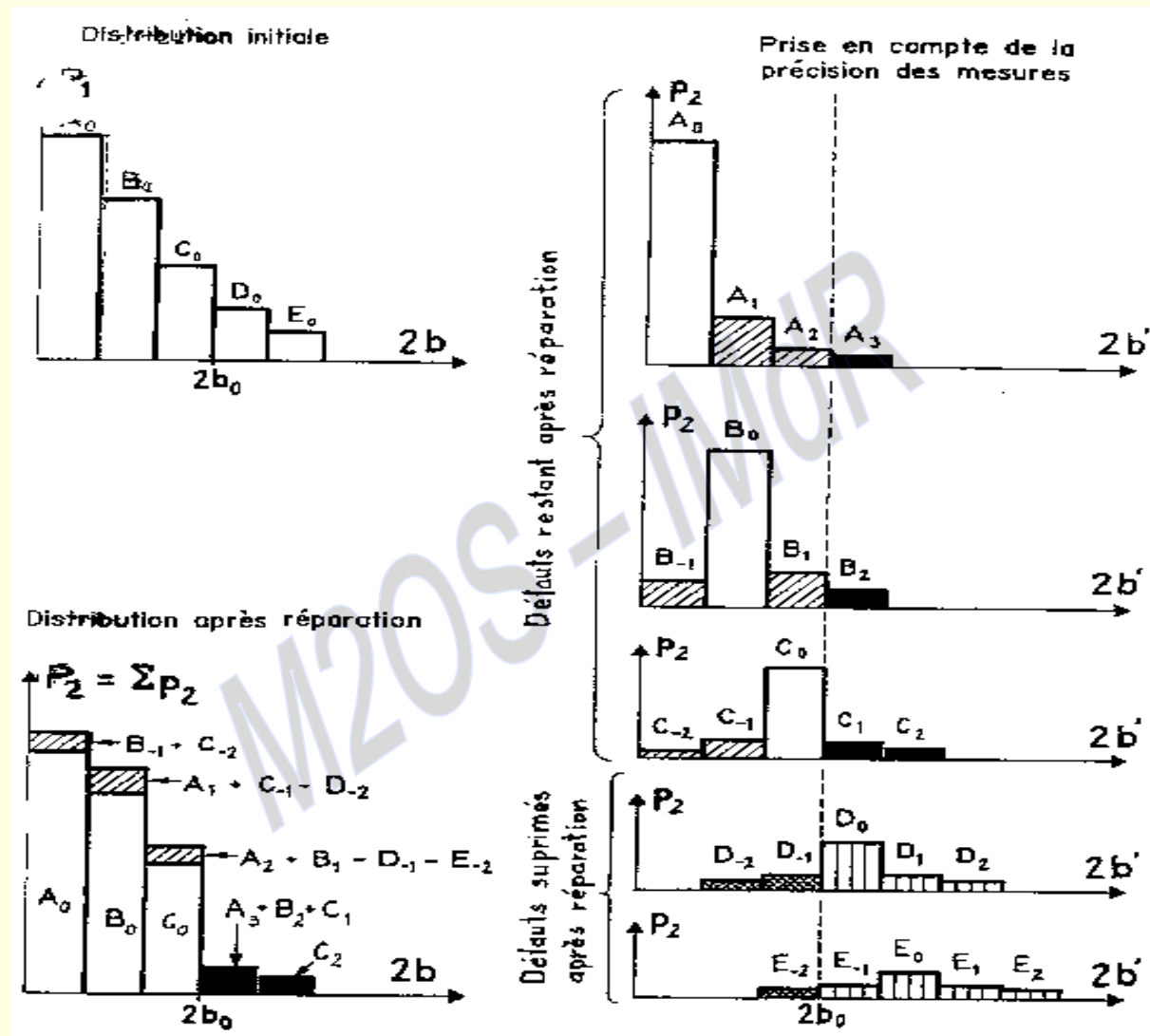


Fig.1 - Modélisation de la prise en compte de la précision des mesures et des critères de réparation





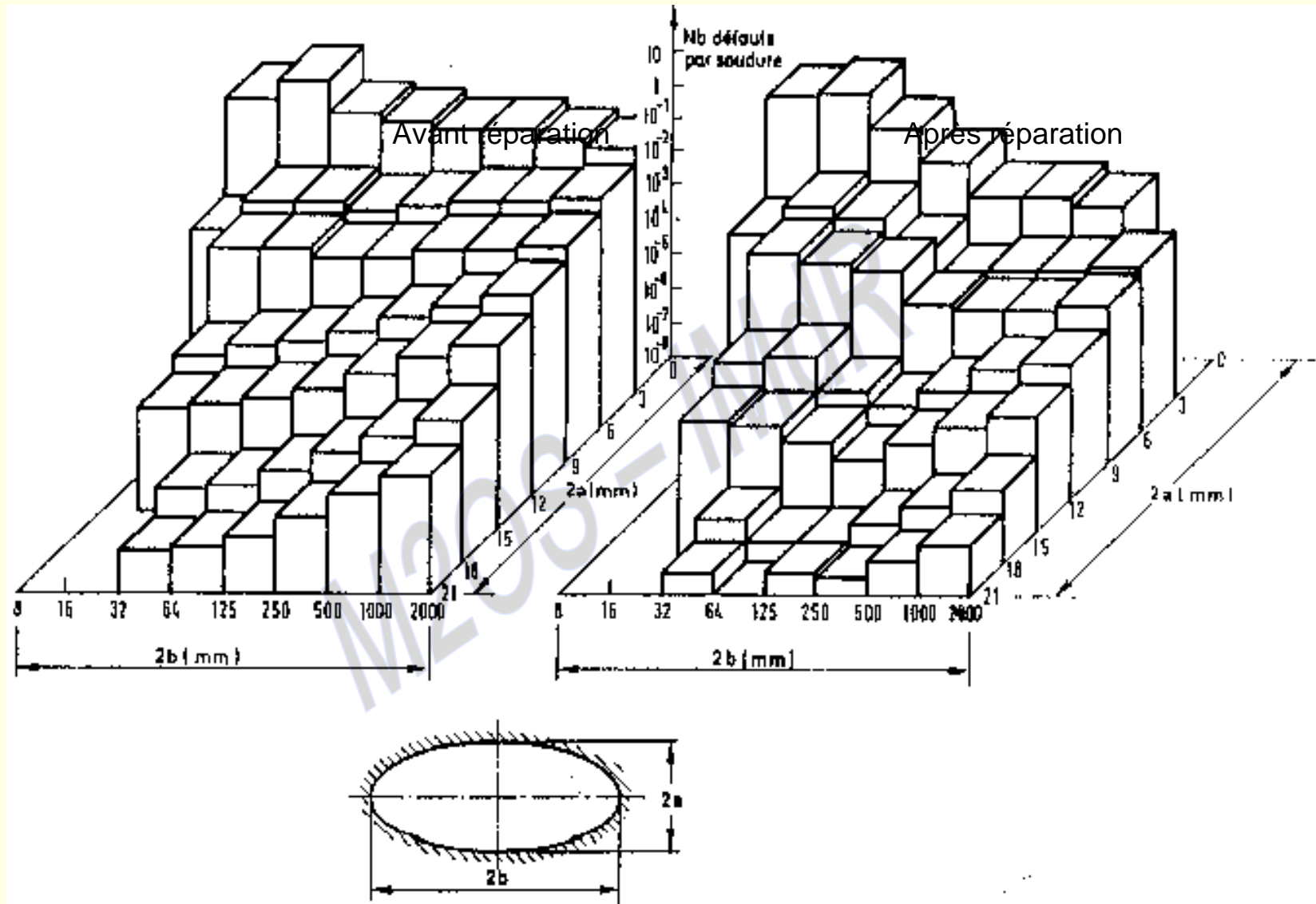


Fig.2 - Distribution des défauts en largeur et longueur par soudure



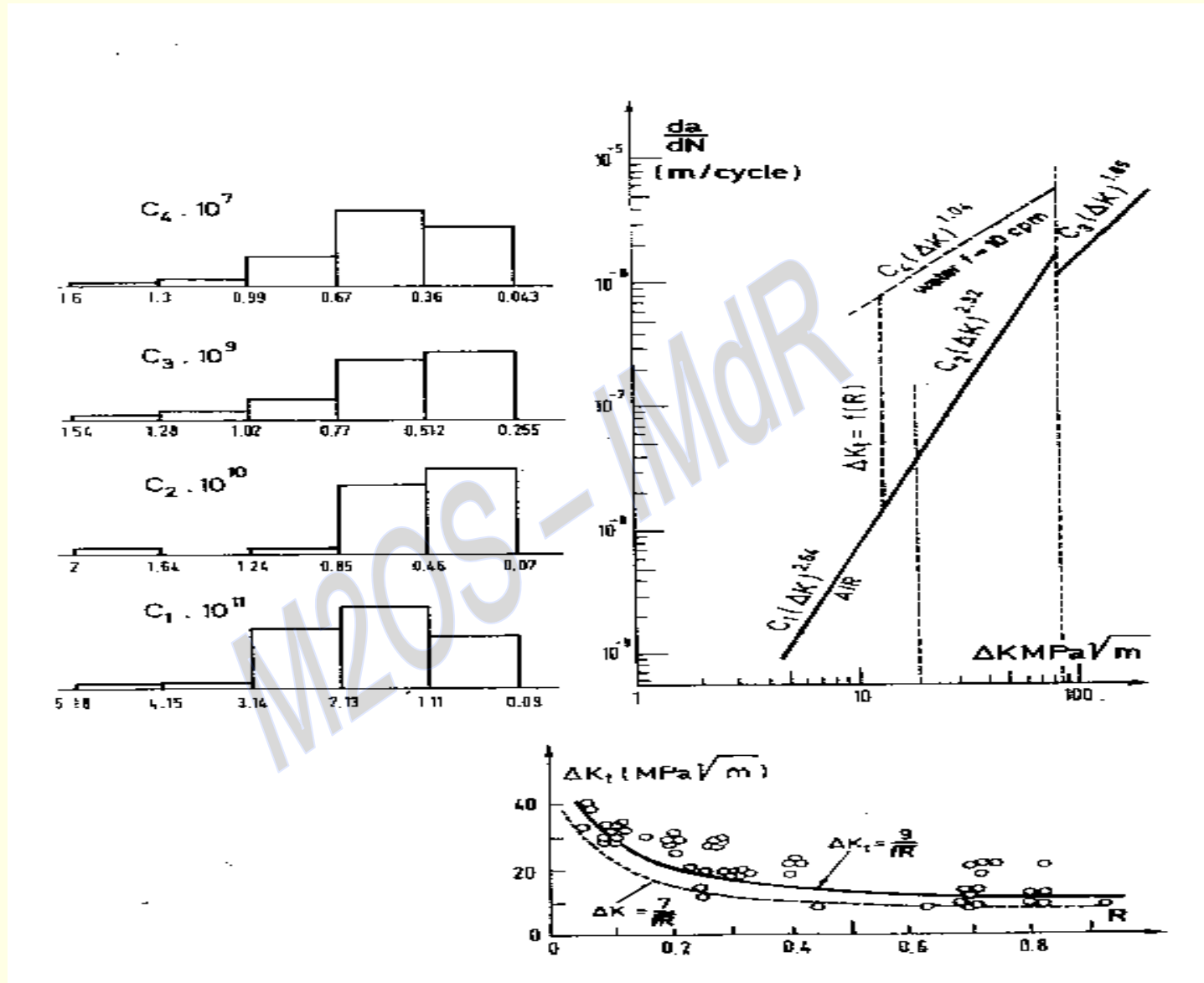


Fig. 3 - Présentation de la loi de Paris



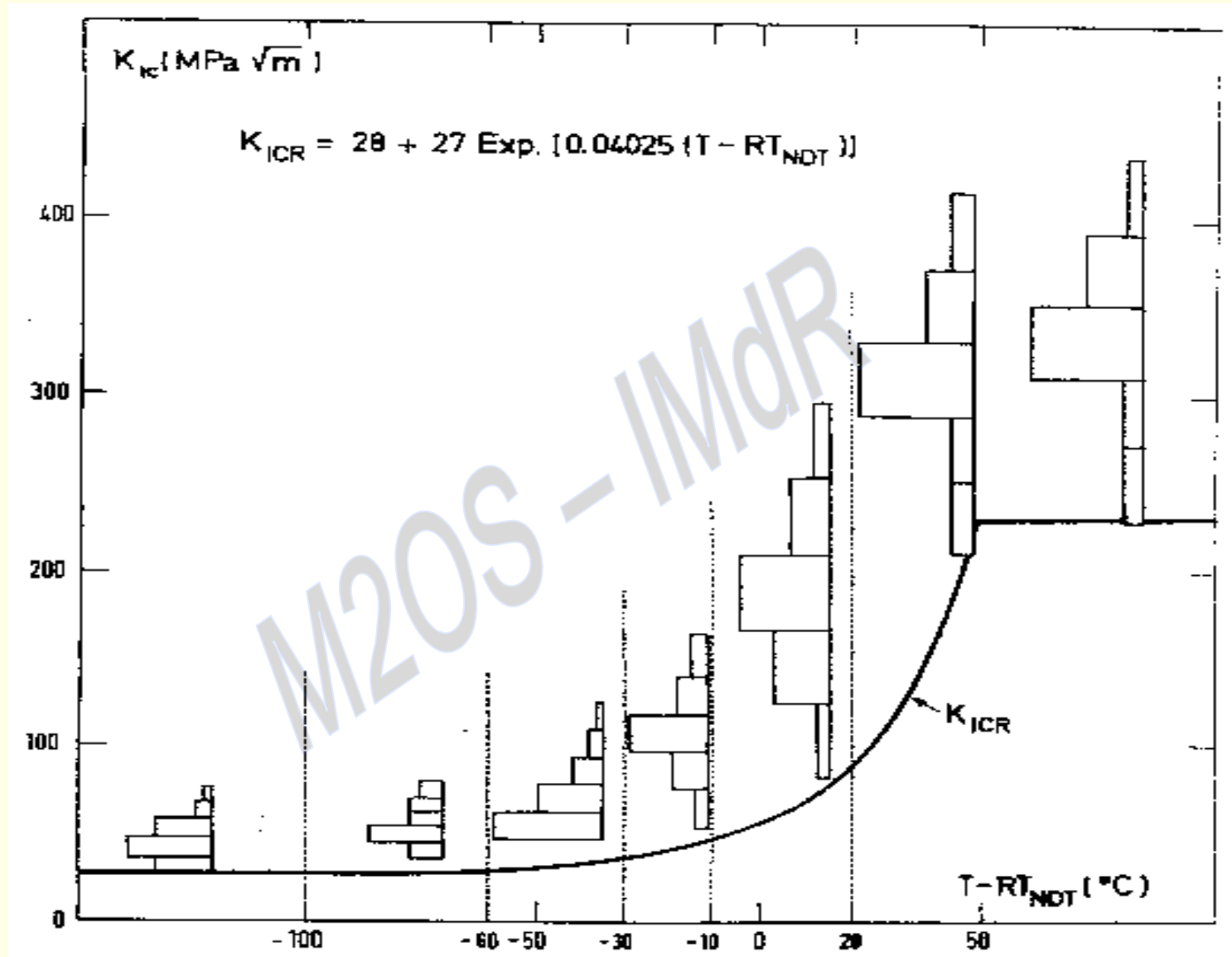


Fig.4 - Modélisation de la ténacité



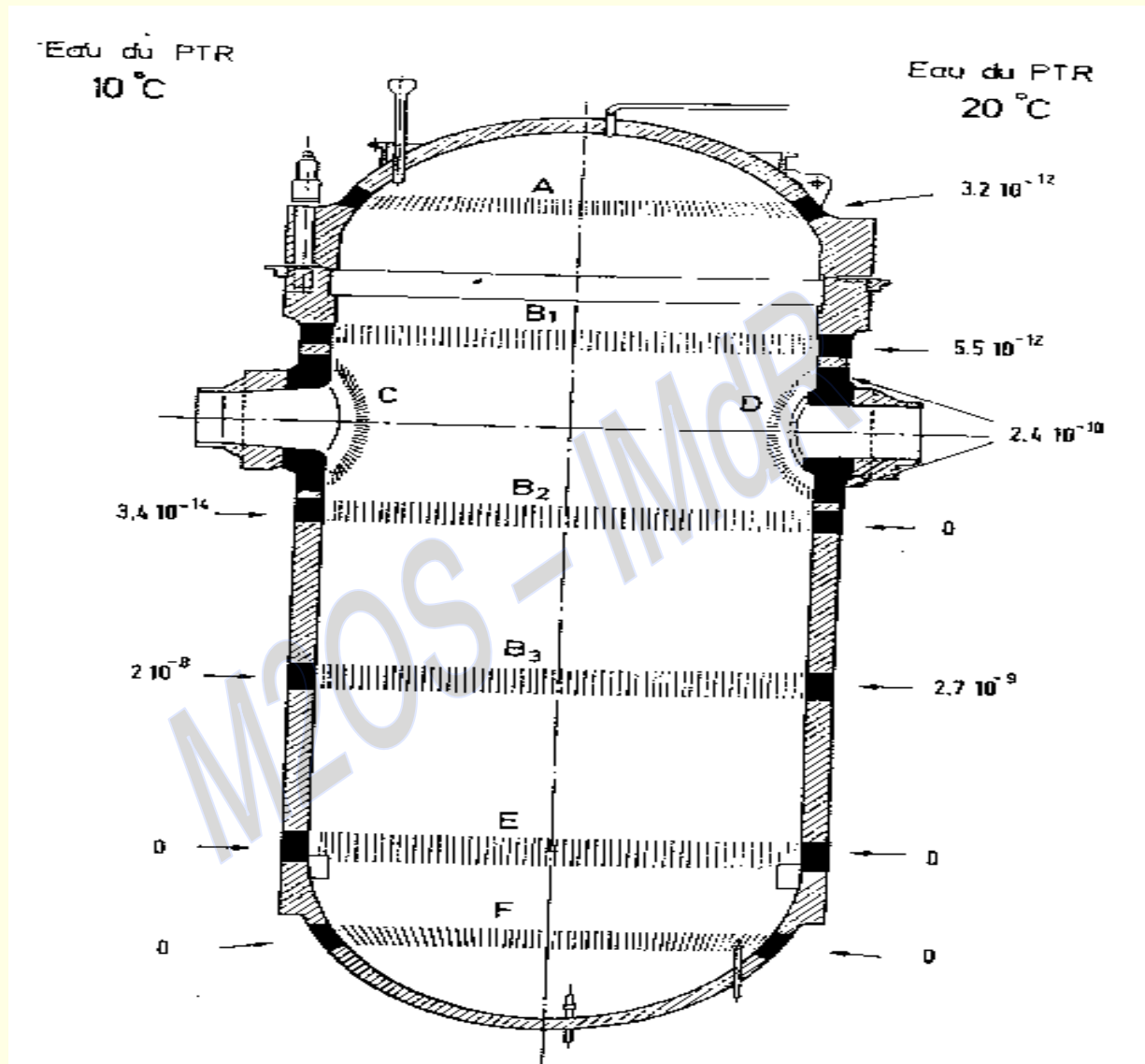


Fig. 5 - Probabilité de Rupture des différentes parties de la cuve après 40 ans de service, pour 2 températures d'eau du PTR



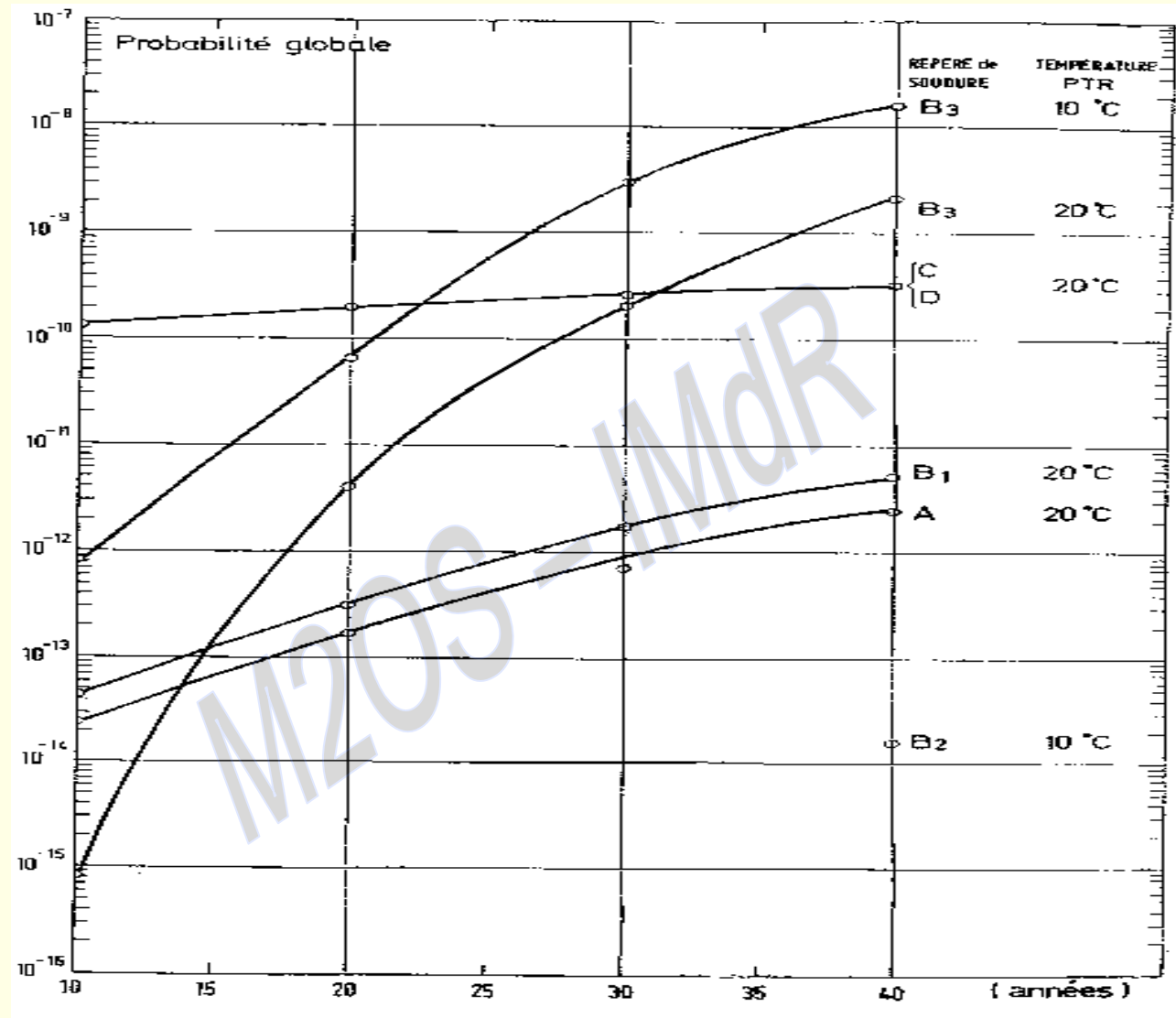
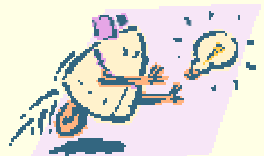


Fig. 6 - Probabilité de Rupture des soudures de cuve en fonction de la température d'eau du PTR



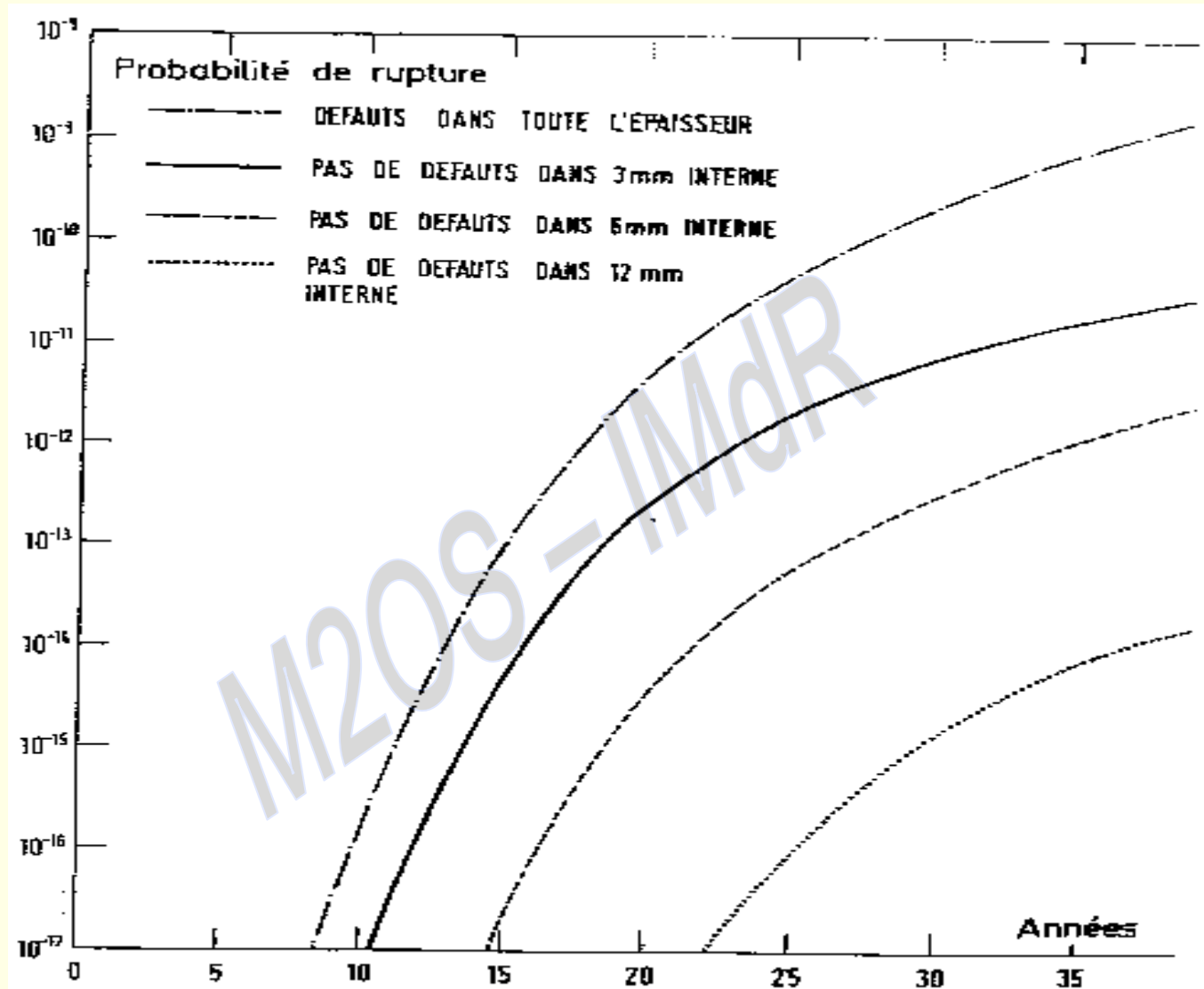
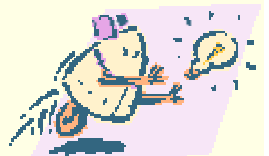


Fig. 7 - Probabilité de rupture de la soudure de virole en fonction des temps selon différentes hypothèses de réparation parfaite



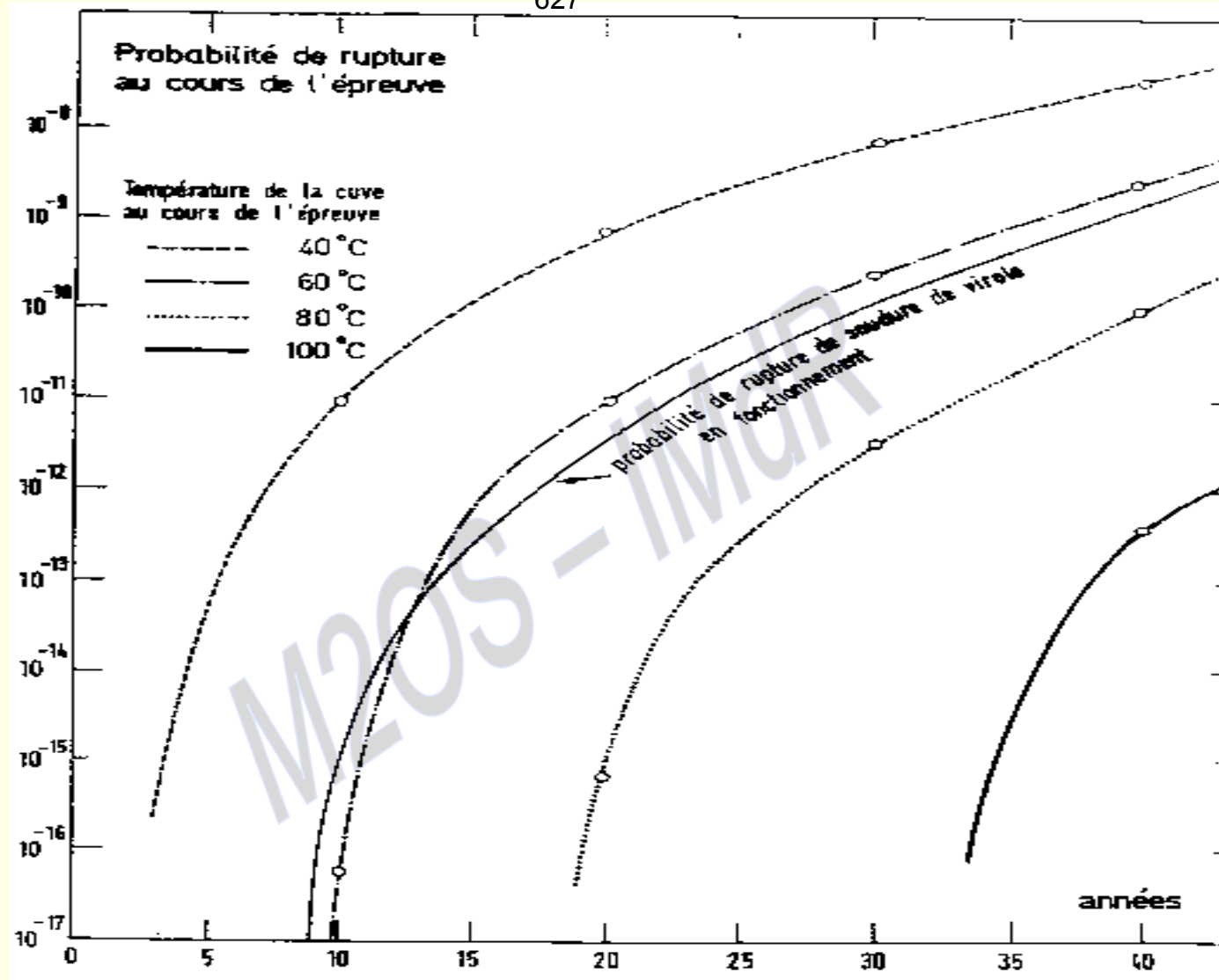
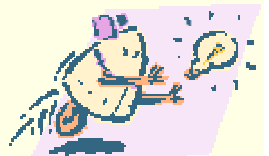
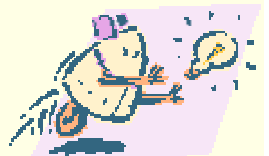


Fig. 8 - Probabilité de rupture de la soudure de virole B3 au cours d'une épreuve hydraulique à 206 bars pour différentes températures d'épreuves



# 9. FIABILITE SYSTEME FORM-SORM





## CALCUL DE FIABILITE-SYSTEME

*Représentation formelle des systèmes structuraux.*

On considère qu'un système structural est un ensemble d'éléments de rupture :  
 $S = \{ E_1, E_2, \dots, E_i, \dots, E_m \}$  (40)

On introduit les variables d'état  $e_i$  :

$$\forall i \in \{1, m\} \quad e_i - \begin{cases} 1 \text{ si l'élément } E_i \text{ est intact} \\ 0 \text{ si l'élément } E_i \text{ est ruiné} \end{cases} \quad (41)$$

L'état du système S est donc entièrement défini par le vecteur e :

$$e = \{ e_1, e_2, \dots, e_i, \dots, e_m \} \quad (42)$$

De la même manière on définit la variable d'état du système global :

$$s - \begin{cases} 1 \text{ si l'élément } E_i \text{ n'est pas ruiné} \\ 0 \text{ si l'élément } E_i \text{ est ruiné} \end{cases} \quad (43)$$



## CALCUL DE FIABILITE-SYSTEME (suite)

Il faut noter que  $s = 1$  ne signifie pas que le système est dans son état intact. La connaissance du système sera complète lorsque l'on pourra définir la fonction  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} \varphi : R^m &\rightarrow R \\ e &\rightarrow s - \varphi(e) \end{aligned} \quad (44)$$

Ce formalisme permet d'introduire 2 types de systèmes :

### *Système en série*

C'est un système qui atteint la ruine dès que l'un quelconque de ses composants est ruiné. Dans le cas des structures, cela correspond aux structures isostatiques. Sa fonction d'état a pour expression :

$$S_S - \varphi_S(e) - \prod_{i=1}^m e_i \quad (45)$$

La représentation conventionnelle d'un tel système est donnée sur la figure ci-dessous :

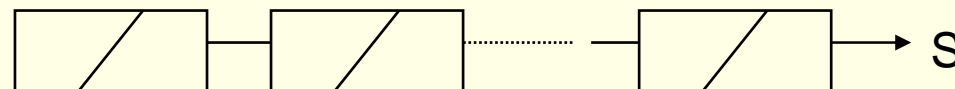
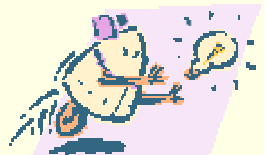


Figure 14 : système en série



## CALCUL DE FIABILITE-SYSTEME (suite)

### *Système en parallèle*

C'est un système qui n'atteint la ruine que lorsque tous ses composants sont ruinés. Sa fonction d'état a pour expression :

$$S_p = \varphi_p(e) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - e_i) \quad (46)$$

La représentation conventionnelle d'un tel système est donnée sur la figure ci-dessous :

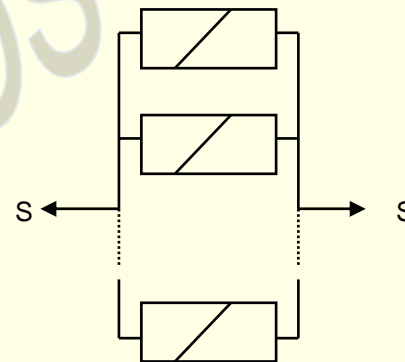
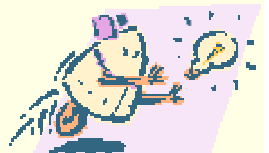


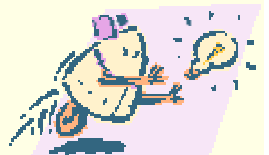
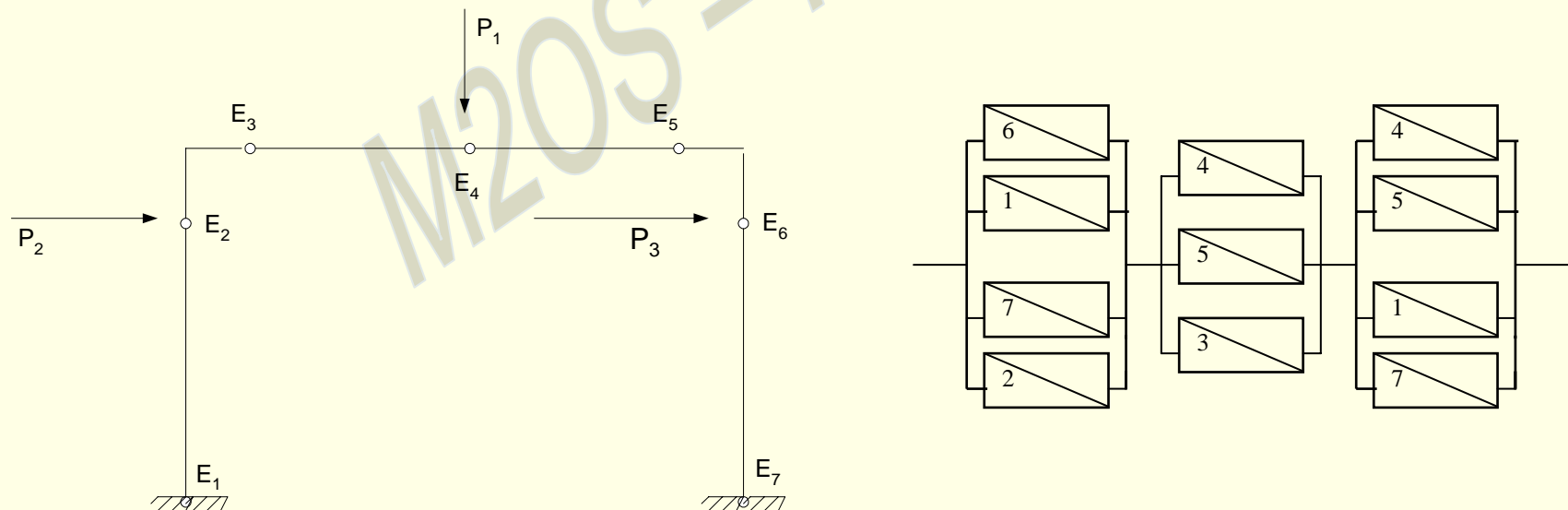
Figure 15 : système en parallèle



## CALCUL DE FIABILITE-SYSTEME (suite)

*Cas d'un système quelconque :*

Considérons la structure de la figure suivante et son chargement. Dans le cas où le seul mode de ruine considéré est la plastification par formation de rotules plastiques, on peut identifier 7 éléments de rupture correspondant à 7 rotules plastiques potentielles. Sur la même figure, on montre 3 mécanismes de ruine de la structure (il en existe d'autres bien évidemment). On montre également la représentation conventionnelle correspondant à ces trois mécanismes de ruine :



## CALCUL DE FIABILITE-SYSTEME (suite)

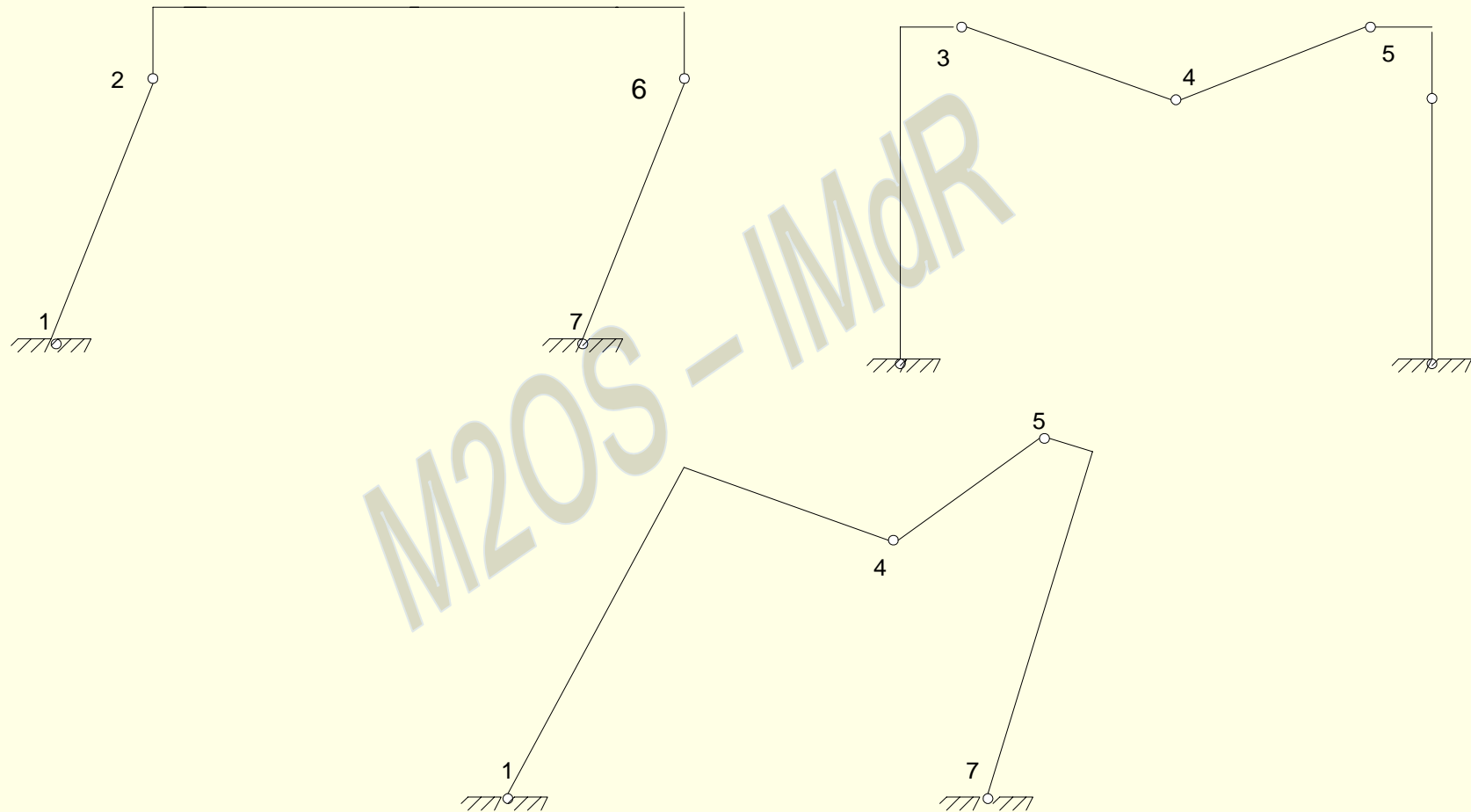
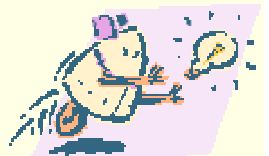


Figure 16 : Représentation formelle d'une structure quelconque



## CALCUL DE FIABILITE-SYSTEME (suite)

On remarque sur cet exemple que :

- ➔ il suffit de retirer l'une quelconque des rotules plastiques constituant l'un quelconque des mécanismes identifiés ci-dessus pour que celui-ci cesse d'être un mécanisme de ruine ;
- ➔ Il suffit qu'un seul de ces mécanismes se produise pour que la structure soit ruinée.

Ces considérations permettent de traduire le comportement physique de la structure par une modélisation en termes de système (voir aussi figure ci-dessus) :

- ➔ chaque mécanisme de ruine peut être considéré comme un système en parallèle ;
- ➔ la structure peut être représentée comme un système en série, chaque élément de ce système étant un mécanisme de ruine, c'est-à-dire un sous-système en parallèle.

On retient alors cette représentation pour toute structure dans les calculs de fiabilité système. La fonction d'état du système est :

$$(47) \quad S = \prod_{i=1}^{N_p} \left[ 1 - \prod_{j=1}^{N_i} (1 - e_j^i) \right]$$

où  $N_p$  est le nombre de système en parallèle ;  
 $N_i$  est le nombre d'éléments du système en parallèle numéro  $i$  ;  
 $e_j$  est la variable d'état du  $j$ -ème élément du système en parallèle numéro  $i$ .



## PROBABILITE DE RUINE ET INDICE DE FIABILITE-SYSTEME

### *Systeme en serie*

Considérons un système en série constitué de  $m$  éléments, chacun d'entre eux pouvant être associé à une marge linéaire dans l'espace standard :

$$M_j = \beta_j - \{\alpha\}_j^T \{U\} ; \|\alpha_j\| = 1, \quad j = 1, m \quad (48)$$

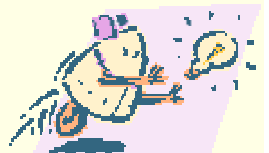
On montre que la probabilité qu'au moins un des éléments atteigne la ruine (union des probabilités = système en série) a pour expression :

$$P_{f_s} = 1 - \Phi_m(\beta, [\rho]) \quad (49)$$

où  $\beta$  = vecteur des indices de fiabilité des  $m$  éléments ;  
 $[\rho]$  = matrice de corrélations entre marges de sécurité ;  
 $\Phi_m$  = loi multinormale.

Les variables  $U_i$  étant normales, centrées, réduites et indépendantes on a :

$$[\rho] = [\rho_{ij}] = \left[ \{\alpha_i\}^T \{\alpha_j\} \right] \quad (50)$$



## PROBABILITE DE RUINE ET INDICE DE FIABILITE-SYSTEME (suite)

L'indice de fiabilité généralisé du système en série est défini par :

$$\beta_s = -\Phi^{-1}(P_{f_s}) = -\Phi^{-1}(1 - \Phi_m(\beta, [\rho])) \quad (51)$$

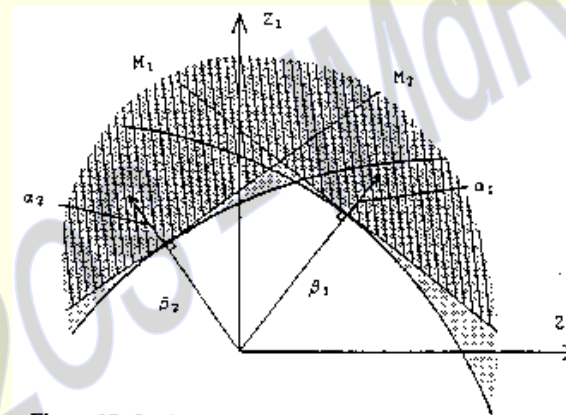
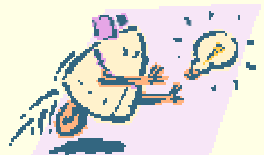


Figure 17: Système en série. La probabilité de ruine (aire grisée) est approximée par l'aire hachurée.

L'expression générale de la loi multinormale est :

$$\Phi_m(\{X\}, [\rho]) = \int_{-\infty}^{X_1} \dots \int_{-\infty}^{X_m} (2\pi)^{-m/2} \cdot (\det[\rho])^{-1/2} \cdot \exp\left[-1/2\{u\}^T [\rho]^{-1} \{u\}\right] du_1 \dots du_m \quad (52)$$

Où  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}^T$ .





## PROBABILITE DE RUINE ET INDICE DE FIABILITE-SYSTEME (suite)

Dans le cadre de la fiabilité appliquée à des structures réelles, il n'est pas envisageable de calculer explicitement cette intégrale en raison du grand nombre de variables aléatoires mises en jeu. On utilise donc une approximation de cette intégrale issue de techniques numériques. **ARPEJ-1.0** utilise la technique de Dunnet-Sobel existant dans la librairie **SYSREL**.

*Système en parallèle :*

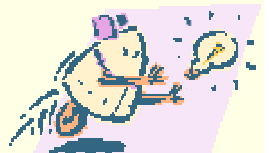
De la même manière, on montre que la probabilité pour que tous les éléments d'un système en parallèle atteignent la ruine (définition de la ruine d'un système en parallèle) a pour expression :

$$P_{f_p} = \Phi_m(-\beta, [\rho]) \quad (53)$$

et que l'indice de fiabilité généralisé associé au système en parallèle est :

$$\beta_p = -\Phi^{-1}(P_{f_p}) = -\Phi^{-1}(\Phi_m(-\beta, [\rho])) \quad (54)$$

Où  $m$  est le nombre d'éléments du système en parallèle.



## PROBABILITE DE RUINE ET INDICE DE FIABILITE-SYSTEME (suite)

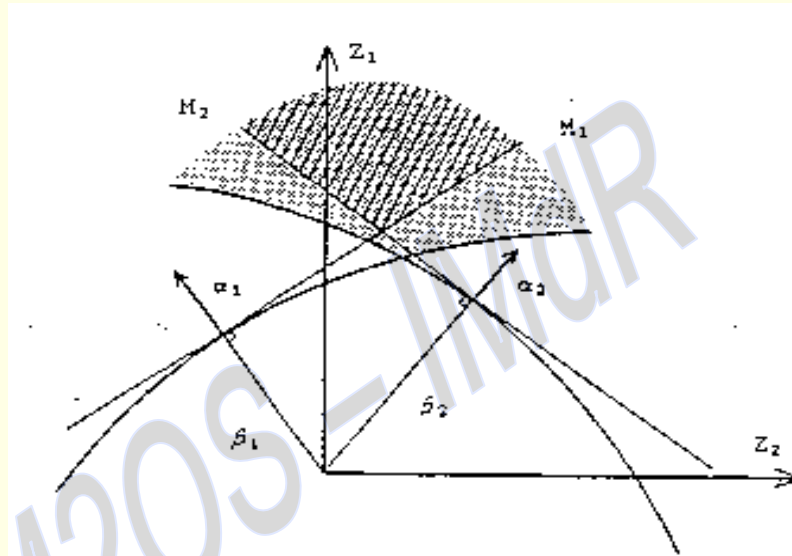
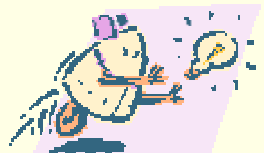


Figure 18 : système en parallèle. La probabilité de ruine (aire grisée) est approximée par l'aire hachurée

Étant capable de calculer l'indice de fiabilité et la marge de sécurité pour chaque élément de rupture (eq. (36)-(38)), on peut, en appliquant la relation (54), calculer l'indice de fiabilité associé à chaque mécanisme, puis, par application de (51), et après identification de tous les mécanismes possibles, calculer la probabilité de ruine globale de la structure.



## PROBABILITE DE RUINE ET INDICE DE FIABILITE-SYSTEME (suite)

Cette dernière opération nécessite cependant la connaissance des corrélations entre les mécanismes de ruine. Pour cela, on utilise la technique de l'hyperplan équivalent (ou de la marge de sécurité équivalente). Cette technique, utilisée par la librairie SYSREL, consiste à approximer le domaine de ruine associé à une séquence (système en parallèle) par une marge linéaire unique. Les relations suivantes sont valables pour le système en parallèle :

$$M^{eq} = \beta^{eq} - \{\alpha^{eq}\}^T \{U\}$$

avec  $\beta^{eq} = \beta_p$  par l'équation (54) et

$$\alpha_j^{eq} = \frac{\left. \frac{\partial \beta_p}{\partial u_j} \right|_o}{\left[ \sum_{i=1}^m \left( \left. \frac{\partial \beta_p}{\partial u_i} \right|_o \right)^2 \right]^{1/2}}, \quad j = 1, m$$



## PROBABILITE DE RUINE ET INDICE DE FIABILITE-SYSTEME (suite)

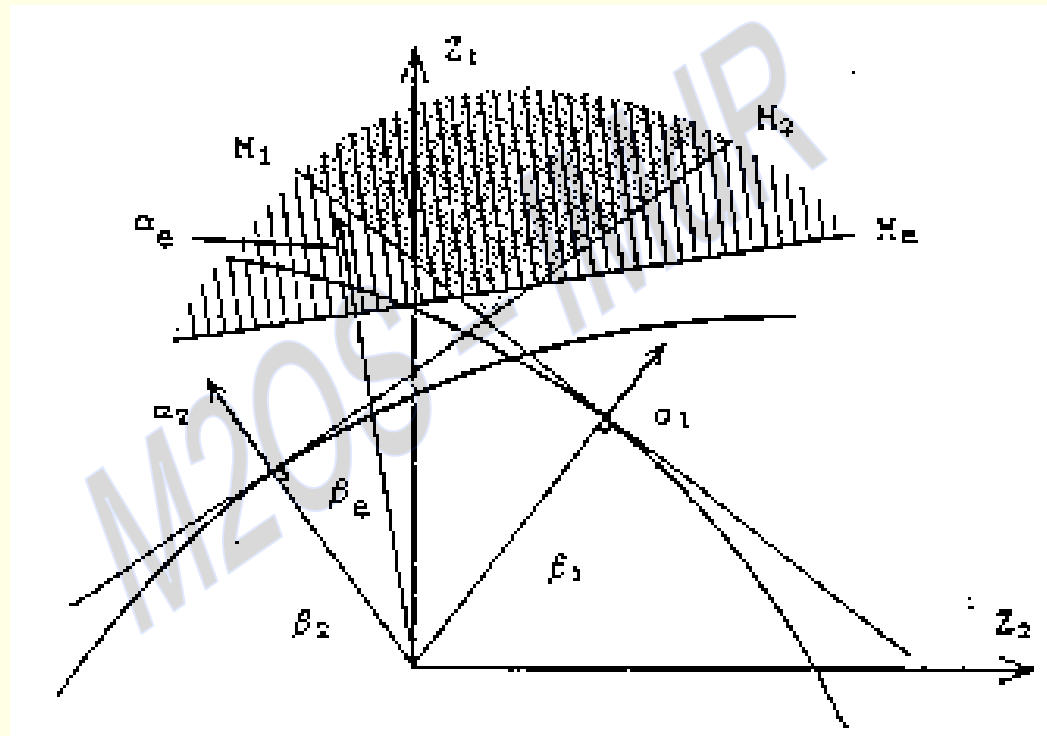


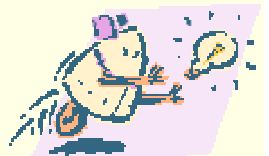
Figure 19 : Concept de l'hyperplan (ou marge) équivalent(e). La probabilité de ruine (aire grisée) est approximée par l'aire hachurée



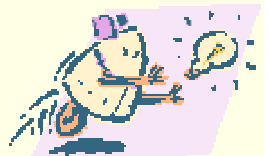
## METHODOLOGIE D'EXPLORATION DE CHEMINS DE RUINE

Il est évident que les calculs de fiabilité pour tout le mécanisme de ruine d'une structure ne peut pas être envisageable. Une structure même de petite taille, présente un nombre de mécanismes de ruine très élevé. Par exemple, si l'on ne considère que le mode de ruine par formation de rotules plastiques, une structure qui présente  $k$  rotules potentielles et qui a un degré de redondance  $s$  présente  $k(k-1)(k-2)\dots(k-s)$  mécanismes de ruine.

Cependant, dans la plupart des cas, la probabilité de ruine de la structure, est en quasi-totalité «contenue» dans un petit nombre de mécanismes. Par conséquent, il est utile d'adopter une stratégie permettant d'inclure dans la représentation formelle de la structure ceux parmi les mécanismes possibles qui sont dominants.



# 10. EXEMPLE SUR COMPOSITES



GAMI - ISMCM  
Journée d'étude 10 - 11 décembre 1991

# FIABILITE DES MATERIAUX COMPOSITES

**J. MENDEZ**

Responsable du service de Sûreté de Fonctionnement  
AEROSPATIALE, Établissement d'Aquitaine  
BP 11 - 33165 Saint-Médard-en-Jalles Cedex



## RESUME

- Cet article présente une méthodologie permettant de déterminer la fiabilité prévisionnelle de structures en matériaux composites. L'étude qui a été menée a permis de faire, sur un cas concret, une analyse comparative de différents critères de rupture utilisés en mécanique des matériaux composites.
- Cette démarche permet de prendre en compte l'aspect fiabilité dès la phase de conception du produit, en collaboration avec le bureau d'études.

## ABSTRACT

- This article presents a methodology which can determine the estimated reliability of composite material structures. The study which was carried out enabled, using a real case, a comparative analysis of different fracture criteria that are used in the mechanics of composite materials.
- This method takes into account the reliability aspect from the conception phase of a product in collaboration with the design department.





## INTRODUCTION

- L'objectif de l'étude est de déterminer les niveaux de fiabilité prévisionnelle obtenus en utilisant différents critères de défaillance et d'analyser la validité et la cohérence de ces résultats.
- Nous avons tout d'abord effectué une synthèse des différents critères de dimensionnement utilisés en conception de structure en matériaux composites, puis nous avons élaboré une méthode de calcul de fiabilité qui prend en compte les moyens de calcul actuels avec l'utilisation des éléments finis.

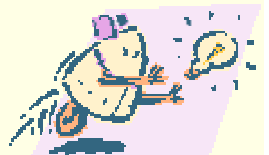


## PRESENTATION DE L'ETUDE

- L'étude présentée permet de déterminer la probabilité théorique de défaillance d'une structure en matériaux composites. Elle ne prend pas en compte les anomalies dues à une élaboration incorrecte de la structure. Ce point fait l'objet d'une démarche parallèle conduisant à évaluer la probabilité de non conformité par rapport à la définition (notée aussi probabilité pratique de défaillance). La présentation de Monsieur DE MOLLERAT décrit en détail cette approche.
  
- La fiabilité globale est alors donnée par l'expression :

$$R = \prod_{f_i} R_{f_i} \quad \text{avec} \quad R_{f_i} = (1 - P_{NC}) R_{f_iTH}$$

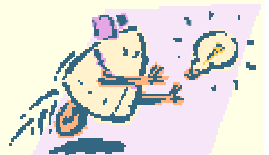
$F_i$  ( $i = 1$  à  $n$ ) : Fonctions principales de la structure  
 $P_{NC}$  : Probabilité pratique de défaillance (ou probabilité de non conformité)  
 $R_{f_iTH}$  : Fiabilité théorique pour la fonction  $F_i$   
 $R_{f_i}$  : Fiabilité vis à vis de la fonction  $F_i$   
 $R$  : Fiabilité globale de la structure



## PRESENTATION DE L'ETUDE (suite)

- L'objet de notre étude porte donc sur  $R_{f_{iTH}}$ . L'approche globale <sup>(1)</sup> développée par l'AEROSPATIALE sous contrat de l'Agence Spatiale Européenne est présentée dans le document en référence 4.
- La méthode consiste à analyser fonctionnellement la structure puis à adopter un critère de dimensionnement, étape très importante de la phase de conception. Ce choix a une influence considérable sur les étapes suivantes de l'étude, il impose en particulier le calcul d'un certain nombre de paramètres contraintes (contraintes fil, de cisaillement plan, inter laminaire, ...) à partir de la modélisation aux éléments finis de la structure, et la connaissance des caractéristiques des matériaux utilisés (résistance à la compression, à la traction, au cisaillement...) qui peut conduire à des essais de caractérisation sur des éprouvettes spécifiques.

(1) Aujourd'hui, pour l'évaluation de la fiabilité de composants non électroniques, nous adoptons cette démarche qui permet d'associer très tôt, aux études de SDF, la conception mais aussi la réalisation et le contrôle.



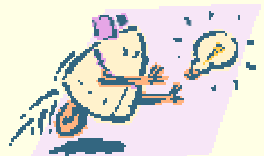
## PRESENTATION DE L'ETUDE (suite)

- La phase suivante consiste à définir, en collaboration avec le bureau d'études, les paramètres importants pour lesquels il est intéressant d'effectuer un calcul de sensibilité. Cela impose de connaître avec précision les caractéristiques de ces paramètres (modules d'élasticité, de cisaillement, épaisseur, ...) c'est-à-dire leur valeur moyenne et leur dispersion. Ces caractéristiques sont déterminées par une exploitation statistique de résultats d'essais ou de contrôle. On note, à ce niveau, la collaboration entre les fiabilistes et les personnes du laboratoire et du contrôle.
- Dans le but de diminuer les coûts de calculs informatiques liés à l'utilisation d'un modèle aux éléments finis, nous avons utilisé la méthode de calcul des dérivées partielles qui permet, en faisant varier à chaque cas de calcul un paramètre et un seul, de déterminer les coefficients de sensibilité. Ces différents cas de calcul et le cas nominal permettent de déterminer la valeur moyenne atteinte par le critère ainsi que sa dispersion, la probabilité de défaillance étant évaluée en calculant la probabilité pour que le critère soit vérifié (application de la méthode généralisant la théorie de la résistance et de la contrainte).



## PRESENTATION DE L'ETUDE (suite)

- Après avoir défini cette méthodologie sur un plan général, nous avons considéré un cas concret et nous avons mené, avec le bureau d'études, une analyse comparative de différents critères. Il est en effet intéressant de comparer les niveaux prévisionnels de fiabilité obtenus avec ces critères sur une même structure. Les résultats obtenus sont très intéressants et montrent clairement que la première étape qui consiste à fixer le critère de défaillance est très importante, car les niveaux de fiabilité sont nettement différents suivant le critère utilisé.



## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE

- Cette partie présente les étapes de la méthodologie utilisée pour déterminer la fiabilité d'une structure en matériaux composites. Elle est adaptée à la méthode de calcul par éléments finis.

Nota : afin d'éviter les risques de confusion, nous adoptons les notations suivantes :

$\sigma$  : contrainte

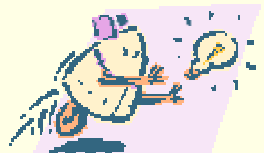
$\varsigma_j$  : écart-type de la variable  $x_j$

### Définition du critère de défaillance $f$ pour le mode de sollicitation retenu

Le critère a pour expression :

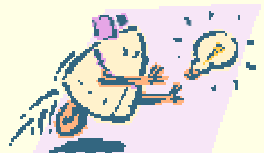
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0 \quad (1)$$

- $f$  désigne une modélisation faisant intervenir des variables d'entrée  $x_j$  dont on cherche à évaluer l'influence des fluctuations statistiques. Les paramètres  $x_j$  seront supposés suivre des lois normales dont on sait estimer les paramètres  $\bar{x}_j$  et  $\varsigma_j$  respectivement moyenne et écart-type.



## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

- Ces paramètres peuvent être classés en trois catégories :
  - ➔ paramètres caractérisant le comportement des matériaux constituant la structure (caractéristiques d'élasticité, résistance à la rupture) ;
  - ➔ paramètres caractérisant la définition géométrique de la structure (cotes, nombre de couches, ...) ;
  - ➔ paramètres caractérisant la charge (contrainte appliquée, pression interne, flux de compression, champ de température) vue par la structure lors de la phase de vie du profil de mission, faisant l'objet de l'étude.
  
- Détermination des paramètres d'entrée :
  - ➔ La détermination des moyennes et écarts types  $\bar{x}_i$  et  $\varsigma_i$  des paramètres d'entrée identifiés est effectuée à partir d'éléments disponibles, tels que résultats d'essais de caractérisation de matériaux, tolérances ou relevés statistiques de cotes, spécifications techniques définissant les cas de charge.



## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

### Recherche d'une approximation linéaire de f autour du point moyen

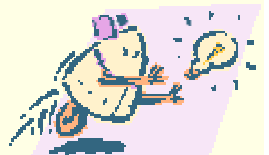
→ En général, les coefficients de variation  $cv_i = \frac{\zeta_i}{\bar{x}_i}$  des paramètres  $x_i$  sont

petits devant l'unité ( $cvi < .15$ ). Dans cette hypothèse, la loi statistiques suivie par f est normale et sa moyenne est déterminée par la relation :

$$\bar{f} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad (2)$$

Pour calculer l'écart-type  $\zeta_f$ , on recherche une approximation linéaire de f au voisinage de f sous la forme :

$$\frac{(f - \bar{f})}{\bar{f}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{(X_i - \bar{X}_i)}{\bar{X}_i} \quad (3)$$





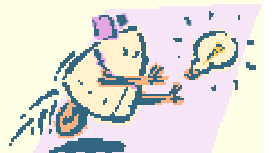
## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

- Pour déterminer les valeurs de  $\bar{f}$  : et des coefficients  $\lambda_i$ , on effectue  $n + 1$  cas de calcul au moyen de la modélisation de  $f$  :
- 1 cas de calcul correspondant au calcul du point moyen (voir relation (2))
  - $n$  cas de calcul en faisant varier un paramètre et un seul, les autres ayant pour valeur leur valeur nominale. On obtient ainsi  $n$  valeur  $f_i$  définies par :

$$i = 1 \text{ à } n \quad \bar{f}_i = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_i + \Delta_i, \dots, \bar{X}_n) \quad (4)$$

- Nous avons choisi comme incrément  $\Delta_i$  une valeur absolue égale à  $2\zeta_i$ . Le signe a été déterminé de manière à rendre  $f$  le plus faible, ce qui est pénalisant.
- Les coefficients  $\lambda_i$  sont ensuite déterminés à partir de la relation :

$$\lambda_i = \frac{(\bar{f}_i - \bar{f})x_i}{\bar{f}\Delta_i} \quad (5)$$



## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

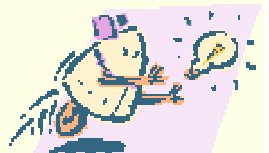
- L'écart-type  $\zeta_f$  sur  $f$  est déterminé en élevant au carré les 2 membres de la relation (3) et en passant aux espérances mathématiques. On obtient l'expression suivante :

$$\left(\frac{\zeta_f}{\bar{f}}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{\zeta_i}{x_i}\right)^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{\lambda_i \lambda_j \rho_{ij} \zeta_i \zeta_j}{x_i x_j} \quad (6)$$

$\rho_{ij}$  : coefficient de corrélation des variables  $x_i$  et  $x_j$ .

- Lorsque les variables sont indépendantes deux à deux, les coefficients  $\rho_{ij}$  sont nuls et on obtient la relation :

$$\left(\frac{\zeta_f}{\bar{f}}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{\zeta_i}{x_i}\right)^2 \quad (7)$$



## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

- Le rapport  $S_i$ , exprimé en % mesure dans ce cas la part de variable  $X_i$  (ou la sensibilité de  $X_j$ ) sur la fluctuation statistique globale de  $f$ .

$$S_i \text{ \%} = 100 \times \left( \frac{\lambda_i \zeta_i \bar{f}}{\zeta_f X_i} \right)^2 \quad (8)$$

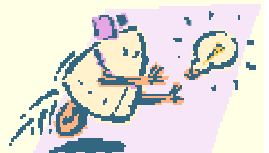
### Calcul de la probabilité de défaillance pour le mode de sollicitation retenu

- Connaissant la moyenne  $\bar{f}$  et l'écart-type  $\zeta_f$  de la variable aléatoire normale  $f$ , on calcule la probabilité de défaillance par la relation :

$$D = \text{Prob} [f < 0] = \text{Prob} \left[ \frac{f - \bar{f}}{\zeta_f} < \frac{-\bar{f}}{\zeta_f} \right] = \Phi \left[ \frac{-\bar{f}}{\zeta_f} \right] \quad (9)$$

$$\text{où } \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{t^2}{2}}$$

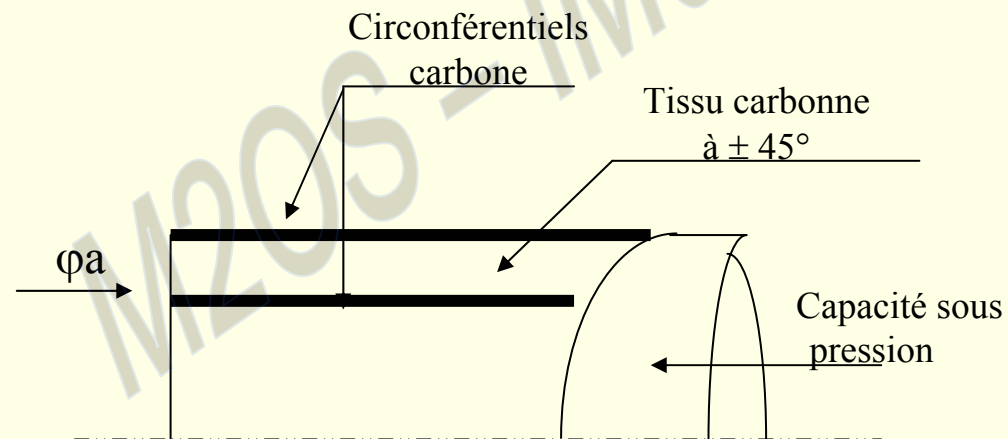
dt est la fonction de répartition de la loi normale réduite



## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

Application de la méthode à un cas concret :

- Le cas concret que nous avons retenu est une structure cylindrique constituée de circonférentiels carbone drapés à  $\pm 45^\circ$ , soumise à un effort de pression interne et à un flux de compression appliqué à l'extrémité de la structure.



La partie courante de la structure est constituée par l'empilement de couches de tissus à  $\pm 45^\circ$ .



## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

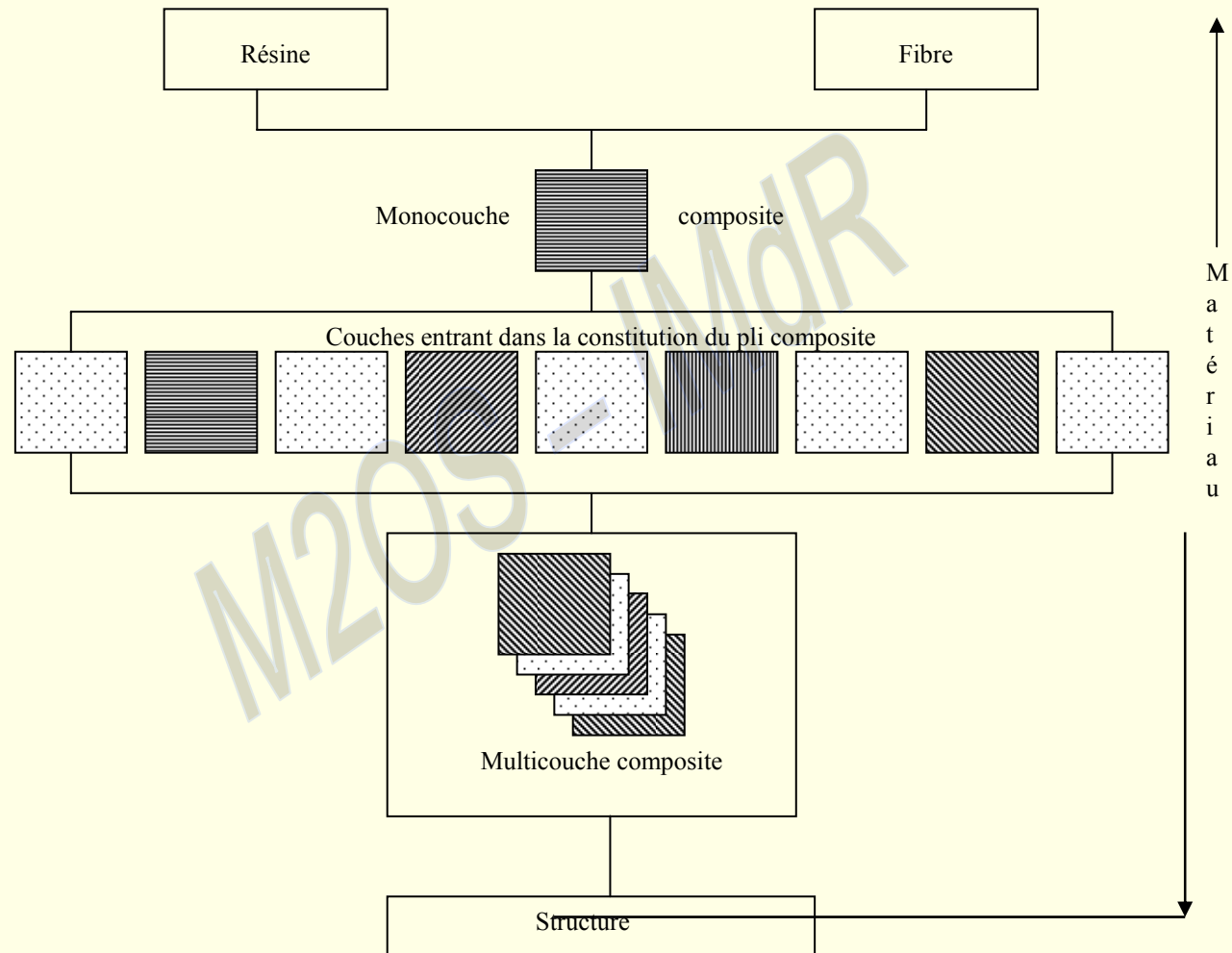


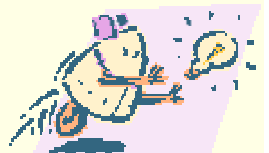
Figure 2 - Schéma de conception de la partie courante



## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

### Définition des critères de défaillance et identifications des paramètres

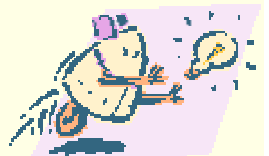
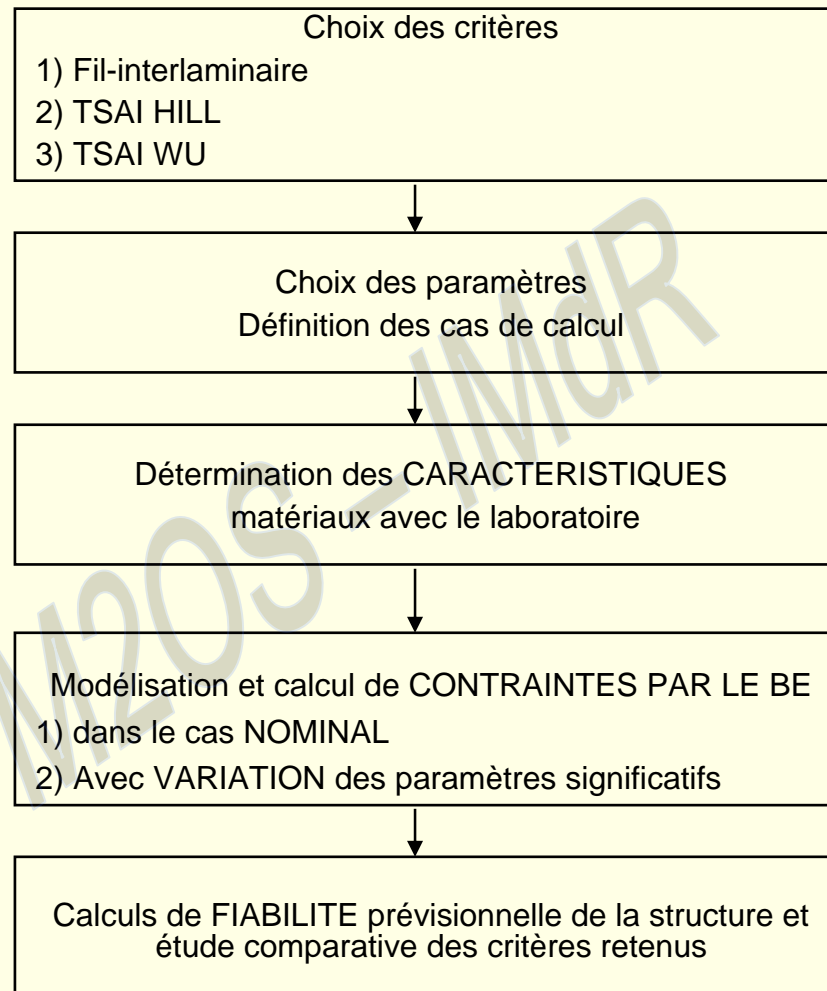
- L'étude de la tenue en statique a été menée avec différents critères. Nous avons tout d'abord effectué un travail de synthèse des critères utilisés pour la conception des matériaux composites. A l'issue de cette recherche, ceux que nous avons retenus pour l'étude sont :
  - ➔ Critère de contrainte maximale :
    - fil.
    - Interlaminaire.
  - ➔ Critère de TSAI HILL.
  - ➔ Critère de TSAI WU.
  - ➔ Critère 3D (3 dimensions)
- Les expressions de ces critères figurent dans les pages suivantes.
- Après analyse, nous n'avons pas mené l'étude avec le critère 3D, car il nécessite la détermination de nombreuses caractéristiques du matériaux et impose donc une investigation expérimentale, pour déterminer toutes ces caractéristiques, qui dépasse le cadre de notre étude. Un tel critère s'avère lourd d'utilisation, aussi bien sur le plan expérimental que calcul.



## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

- Les trois autres critères sont calculés pour chaque couche de la structure schématisée dans sa partie courante figure 2.
- La démarche retenue pour l'étude statique est rappelée ci-après.







## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

→ Les critères ont pour expression :

→ sens fil :  $C = \frac{\sigma_{11}}{X}$

avec  $\sigma_{11}$  : contrainte maximale sens fil  
 $X$  : résistance à la rupture en traction ou en compression suivant la ligne de la contrainte

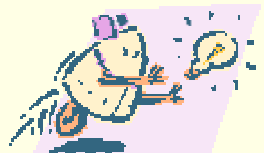
→ interlaminaire :

$$C = \frac{\sigma_{n\varphi}}{X_{n\varphi}}$$

avec  $\sigma_{n\varphi}$  : contrainte maximale interlaminaire  
 $X_{n\varphi}$  : résistance à la rupture interlaminaire

Il y a défaillance si :

$$C > 1 \quad 1 - C < 0 \quad \text{on a donc } f = 1 - C$$



## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

- Les fils dans le tissu sont dirigés suivant deux directions perpendiculaires 1 et 2 orientées à  $\pm 45^\circ$  par rapport aux axes longitudinal et transversal  $\varphi$  et  $\theta$  (voir figure 3).

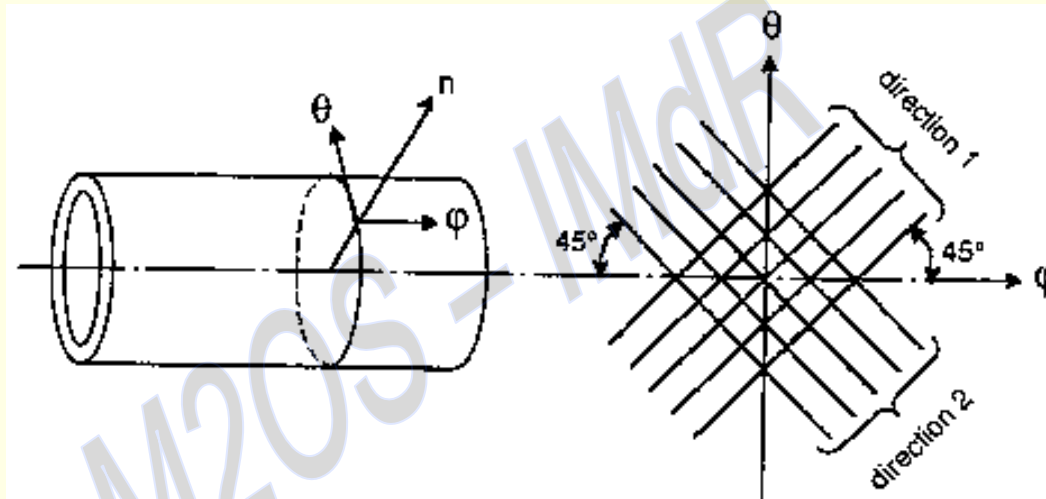
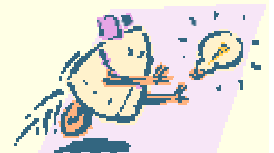


Figure 3

Les paramètres  $X$  et  $X_{n\varphi}$  sont déterminés à partir d'essais sur éprouvettes. Les valeurs des contraintes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{n\varphi}$  sont obtenues par calcul aux éléments finis. Les paramètres intervenant dans le calcul de  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{n\varphi}$  dont on étudie l'influence des fluctuations statistiques sont les suivants :



## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

- ⇒ E : module d'élasticité du tissu carbone.
- ⇒ G : module de cisaillement du tissu carbone.
- ⇒ e : épaisseur du tissu carbone.
- ⇒ P : effort dû à la pression.
- ⇒  $\varphi_a$  : flux de compression.

→ Les paramètres  $X_i$  retenus pour le calcul sont :

- ⇒  $X_1 = E$
- ⇒  $X_2 = G$
- ⇒  $X_3 = e$
- ⇒  $X_4 = (P, \varphi_a)$
- ⇒  $X_5 = X$



## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

### Critère de TSAI HILL

→ Le critère de TSAI HILL a pour expression :

$$C = \left[ \left( \frac{\sigma_{11}}{X} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{22}}{Y} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}}{S} \right)^2 - \frac{\sigma_{11} * \sigma_{22}}{X^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

$\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  : contraintes dans les directions 1 et 2 des fils

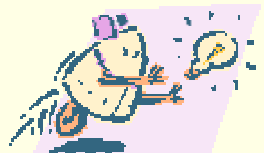
$\sigma_{12}$  : contraintes dans le plan de drapage

X : résistance (traction ou compression) sens fil

S : résistance au cisaillement.

→ Pour des raisons de symétrie (voir figure 3), on a  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  ce qui conduit à la forme simplifiée du critère.

$$C = \left[ \left( \frac{\sigma_{11}}{X} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}}{S} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$



## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

→ Il y a défaillance si la valeur admissible pour le critère est dépassée :

$$C > 1 \text{ on a donc } f = 1 - C$$

→ Les paramètres  $X$  et  $S$  sont déterminés à partir des résultats d'essais sur éprouvettes. Les valeurs des contraintes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{12}$  sont obtenues par calcul aux éléments finis.

→ Par rapport au critère de contrainte maximale, le critère de TSAI HILL fait intervenir le comportement du pli en cisaillement dans le plan de drapage.

→ Les paramètres  $X_i$  retenus pour ce critère sont :

↪  $X_1 = E$

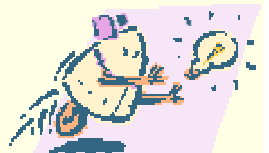
↪  $X_2 = G$

↪  $X_3 = e$

↪  $X_4 = (P, \varphi_a)$

↪  $X_5 = X$

↪  $X_6 = S$



## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

### Critère de TSAI WU

→ Le critère de TSAI WU a pour expression :

$$C = \left[ \frac{X_c + X_t}{X_c X_t} \sigma_{11} - \frac{\sigma_{11}^2}{X_c X_t} + \left( \frac{\sigma_{12}}{S} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

$\sigma_{11}$  : contrainte sens fil

$\sigma_{12}$  : contrainte de cisaillement dans le plan drapage

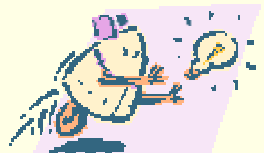
$X_c$  : résistance à la compression sens fil

$X_t$  : résistance à la traction sens fil

$S$  : résistance au cisaillement

Il y a défaillance si :

$$C > 1 \text{ on a donc } f = 1 - C$$



## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

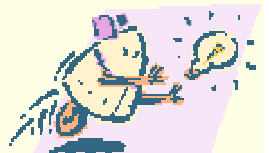
- Ce critère diffère du précédent par l'adjonction d'un terme linéaire, et permet de dissocier le comportement en traction et en compression de la fibre. Il suppose, ainsi que le critère de TSAI HILL, un comportement symétrique en cisaillement plan.
- Les paramètres  $X_i$  retenus pour ce critère sont :
  - ⇒  $X_1 = E$
  - ⇒  $X_2 = G$
  - ⇒  $X_3 = e$
  - ⇒  $X_4 = (P, \varphi_a)$
  - ⇒  $X_5 = X_c$
  - ⇒  $X_6 = X_t$
  - ⇒  $X_7 = S$



## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

### RESULTATS OBTENUS

- L'application de la méthode nous a permis de comparer les niveaux de fiabilité prévisionnelle obtenus avec chacun des critères.
- On constate que les résultats sont très différents:
  - ➔ de l'ordre de  $10^{-6}$  pour le critère fil, et inférieur à  $10^{-10}$  pour le critère interlaminaire.
  - ➔ de l'ordre de  $10^{-1}$  pour les critères de TSAI HILL et TSAI WU, qui donnent des résultats tout à fait comparables dans ce cas.
- Il ressort de ces calculs que les deux derniers critères conduisent à des probabilités de défaillance prévisionnelles très supérieures à celle obtenue avec le critère de contrainte maximale sens fil. Cela montre l'importance du modèle et des hypothèses que l'on est amené à faire pour un calcul prévisionnel.





## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

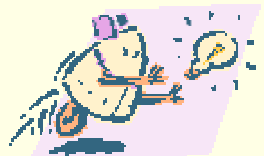
- Dans le cas étudié, une analyse de la définition et des résultats de calculs, élément par élément, du modèle aux éléments finis, nous a permis de conclure, pour ce type de structure, que les critères de TSAI HILL et de TSAI WU sont trop pessimistes, et qu'ils correspondent à une dégradation ponctuelle de la résine qui n'engendre pas une cinématique de rupture, du fait de l'agencement des différentes couches de composites avec en particulier le rôle important des circonférentiels de carbone, situés sur les diamètres interne et externes, qui reprennent les efforts en sollicitation statique. Cela a été confirmé par un calcul supplémentaire que nous avons effectué en supposant une dégradation de la résine pour chacune des couches à  $\pm 45^\circ$ . Les résultats obtenus montrent que les contraintes dans le sens fil restent très inférieures à rupture.
- Il n'est donc pas nécessaire de modifier la définition pour atteindre un objectif de fiabilité de  $10^{-3}$  par exemple, au sens d'un critère tel que TSAI HILL. Cela conduirait à sur dimensionner la structure, ce qui va à l'encontre des gains de masse et donc de performance qu'apportent les matériaux composites.



## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

### Conclusion

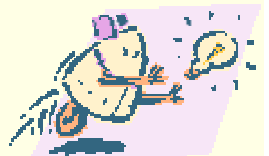
- La méthode générale dont nous avons présenté les principales étapes et que nous avons utilisée pour notre étude comparative des critères, est applicable dès la phase de conception des structures en matériaux composites en collaboration avec le bureau d'études. Cette méthode est utilisée pour les structures réalisées en circonférentiels, en tissu drapé et peut être appliquée à des études de structures de définition différente.
- Elle montre l'implication du fiabiliste aussi bien vis à vis des concepteurs que des responsables de la caractérisation des matériaux. Ce dernier point est très important car il est nécessaire pour ce type de démarche de bien connaître les caractéristiques des matériaux utilisés et leurs évolutions en vieillissement et sous l'effet de la température. Un effort important doit être fait dans ce domaine car la validité de tels calculs, aujourd'hui sophistiqués avec l'utilisation des éléments finis, implique une maîtrise de ces données d'entrée que sont les caractéristiques des matériaux.



## METHODE DU CALCUL DE FIABILITE (suite)

### REFERENCES.

- 1 - Calcul à la rupture des matériaux composites multicouches.  
D. LE NIZERY.  
Extrait de Sciences et Techniques de l'armement- 2 fascicules  
1978.
- 2 - Les matériaux composites - Tome 2.  
Jean WEISS - Claude BORD.
- 3 - Matériaux composites  
Daniel GAY  
Ed. HERMES.
- 4 - Reliability modelling of non electronic system. Volume 1 - Final  
report.  
T. DE MOLLERAT  
Doc n°710.CA/QT/M



# 11. THEORIE DE LIENS



## Effet des variables de conception, gradients de température, vitesse sur la vie et la fiabilité d'un disque rotatif

J.C. LIGERON

→ Théorie du lien le plus faible

$$\text{Log} \frac{1}{S} = \sigma^c L^e V$$

- ⇒ S = probabilité de survie
- ⇒  $\sigma$  = contrainte
- ⇒ V = volume contraint
- ⇒ L = durée de vie en cycles
- ⇒ e = paramètre de weibull  $\beta$

$$L = A \sigma^{-c}$$



→ A et C = Constantes

$$L_b = L_a \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_b} \right)^C$$

Fonction d'un état de référence a

$$\frac{\text{Log}S}{\text{Log}S_0} = \left( \frac{L}{L_0} \right)^e$$

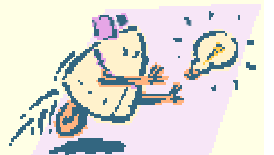
$$S_\phi = S_a^{V_b/V_a}$$

→ Influence du volume sur la probabilité de survie

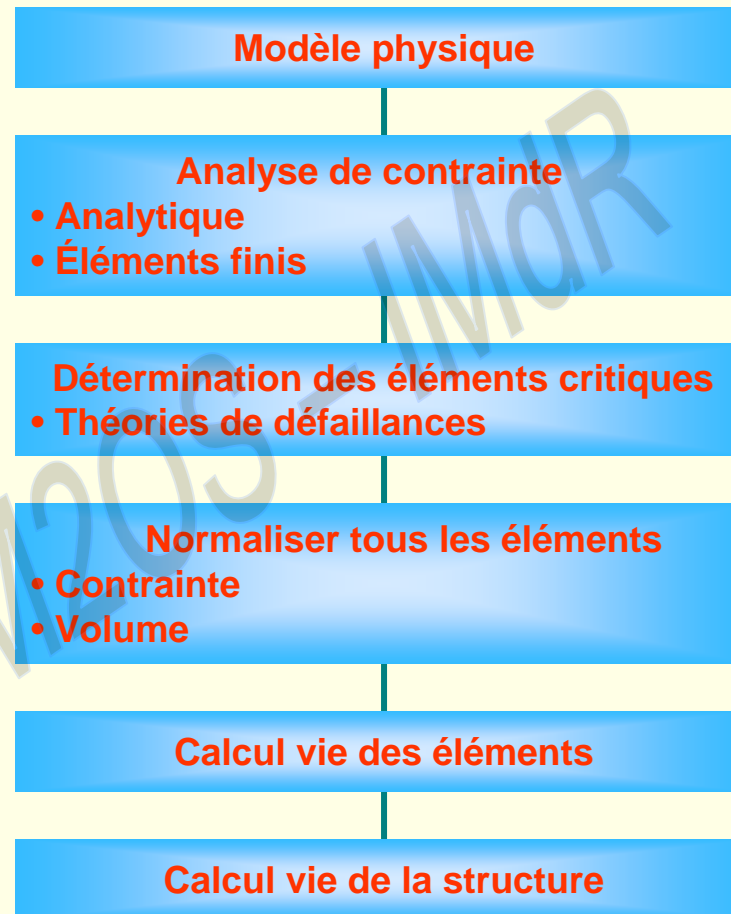
$$L_b = L_a \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_b} \right)^C \left( \frac{V_a}{V_b} \right)^{1/e}$$

$$\text{Pour } n \text{ composants } \left( \frac{1}{L_s} \right)^e = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{L_i} \right)^e$$

→  $L_s$  = Durée de vie système



# Méthodologie



## → Effet dimension du disque

### → Diamètre :

$$L10 = \left( \frac{KD}{D} \right)^{20}$$

■ D = diamètre du disque

■ KD = 0.61m (24 inches)

### → Épaisseur

$$L10 = \left( \frac{Kt}{t} \right)$$

■ t = épaisseur

■ Kt = 0.0254m (1 inches)

### → Effet vitesse

$$L10 = \left( \frac{KN}{N} \right)^{14.3}$$

■ N = vitesse du disque

■ KN = 9000 tours/minute





➔ Effet contraire

$$L10 = \left( \frac{\varphi}{C} \right)^{0.606}$$

- ▣ Contrainte de cisaillement

$$L10 = \exp(KL\tau L)$$

- ▣  $KL = 4.02 \times 10^{-8} \text{m}^2/\text{N}$

➔ Effet de la température

$$L10 = \left( \frac{KT}{\Delta T} \right)^{0.52}$$

- ▣  $\Delta T =$  gradient de température en °K.
- ▣  $KT = 0.50 \text{ K}$ .

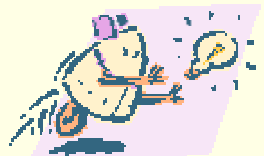


→ FORMULE GLOBALE

$$L_{10} = \left[ \left( \frac{KD}{D} \right)^{20} \left( \frac{Kt}{T} \right) \left( \frac{KN}{N} \right)^{14.3} \left( \frac{\phi}{C} \right)^{0.606} \left( \frac{KT}{\Delta T} \right)^{0.52} \exp(KL\tau L) \right]$$

→ FORMULE GLOBALE

- ➔ A = Matériau
- ➔ No = Vitesse produisant une vie de  $10^6$  cycles.  
Nombre de trous pour vis.



# 12. METHODES MODERNES

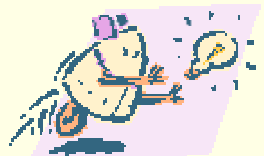


## CALCULS DE FISSURATIONS

### Types d'approche

#### J.C. LIGERON

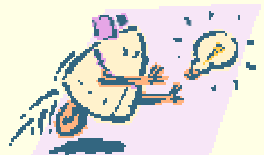
- Approche globale :
  - ➔ Utilise les variables de fissuration  $K1$ ,  $J$  ou  $G$ .
- Approche locale :
  - ➔ Prise en compte des problèmes type :
    - ▣ Fissure courte,
    - ▣ Plastification d'ensemble,
    - ▣ Fissuration par fluage.
  - ➔ Détermination aussi précise que possible des contraintes, déformations plastiques et variables décrivant la détérioration dans la zone en amont du front de fissure; en tenant compte des redistributions des contraintes engendrées par l'écoulement plastique et l'endommagement.



# ALGORITHMES D'OPTIMISATION

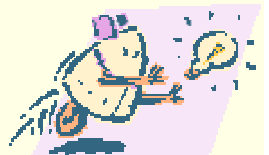
**J.-C. LIGERON**

- Gradient projeté
- Pénalités
- Lagrangien
- Programmation séquentielle quadratique
- Méthode HL - RF
  - ⇒ HL = Hasofer and Lind,
  - ⇒ RF = Rackwitz and Fiessler.

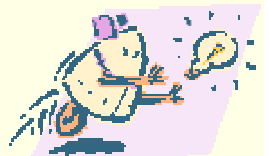


## REPARTITION STATISTIQUE DES PARAMETRES

Masse de passagers	$M_p$	Loi log-normal	Moyenne : $\mu \ln M = 3700\text{kg}$ Écart-type : $\sigma \ln M = 4100\text{kg}$
Vitesse du vent	A	Histogramme	
Dispositif de freinage	Poussée du ressort	$F_r$	Loi normale Moyenne : $\mu_{fr} = 1000 \text{ daN}$ Ecart-type : $\sigma_{fr} = 20 \text{ daN}$
	Rendement de la timonerie	$\eta_t$	Loi uniforme Minimum : $\eta_m = 0,85$ Maximum : $\eta_M = 0,95$
	Coeff. De frottement sur plaquettes	$\varphi_f$	Proba ( $\varphi = \varphi_h$ ) = 0,11 (pluie) Proba ( $\varphi = \varphi_s$ ) = 0,89
	Résistance au roulement	$F'r$	Loi uniforme Minimum : $F'_{rm} = 140 \text{ daN}$ Maximum : $F'_{rM} = 240 \text{ daN}$



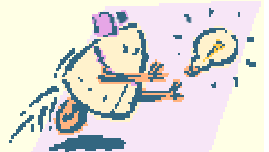
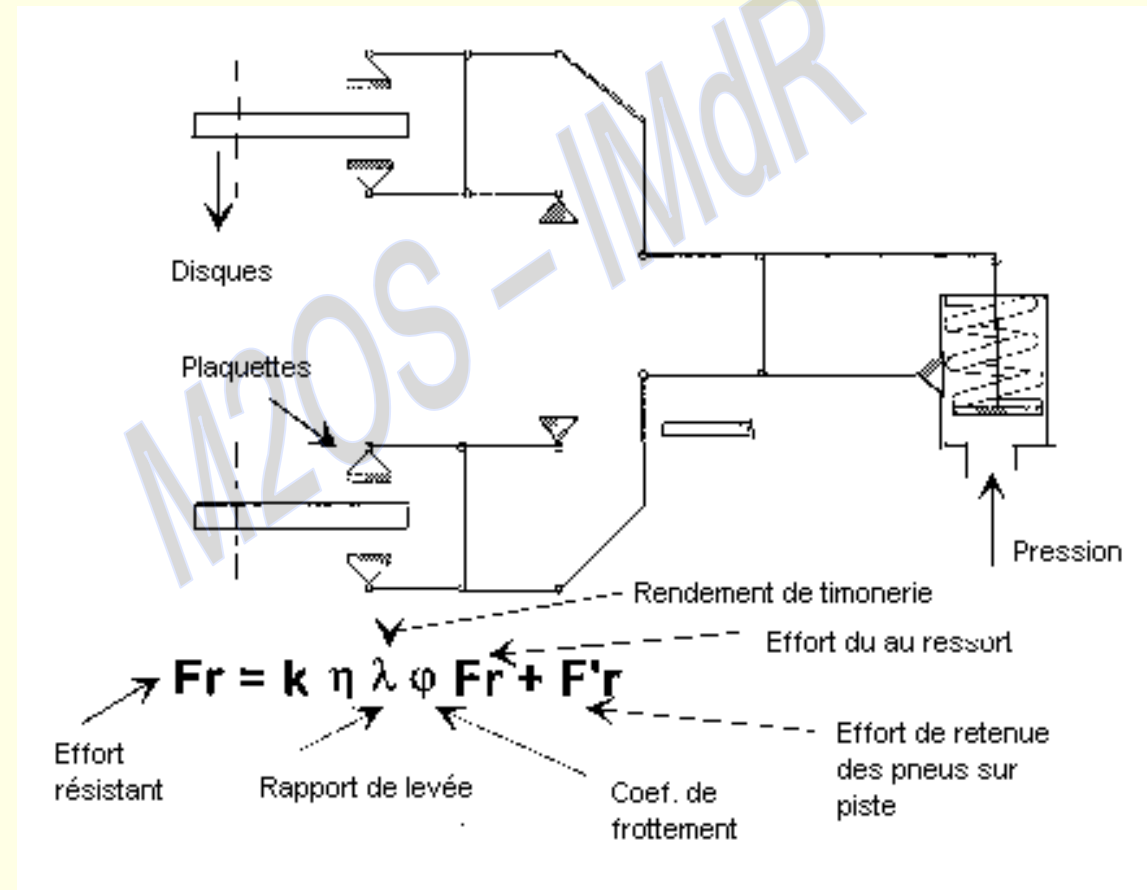
# 13. FREINAGE DU METRO DE LILLE



## DISTANCE D'ARRÊT - METRO DE LILLE

→ Schéma de principe du système de freinage

Distance d'arrêt  
métro de LILLE





## REPARTITION STATISTIQUE DES PARAMETRES

	Masse de passagers	$M_p$	Loi log-normal	Moyenne : $\mu \ln M = 3700\text{kg}$ Écart-type : $\sigma \ln M = 4100\text{kg}$
	Vitesse du vent	A	Histogramme	
Dispositif de freinage	Poussée du ressort	Fr	Loi normale	Moyenne : $\mu_{fr} = 1000 \text{ daN}$ Ecart-type : $\sigma_{fr} = 20 \text{ daN}$
	Rendement de la timonerie	$\eta_t$	Loi uniforme	Minimum : $\eta_m = 0,85$ Maximum : $\eta_M = 0,95$
	Coeff. De frottement sur plaquettes	$\varphi_f$	Proba ( $\varphi = \varphi_h$ ) = 0,11 (pluie) Proba ( $\varphi = \varphi_s$ ) = 0,89	
	Résistance au roulement	F'r	Loi uniforme	Minimum : $F'_{rm} = 140 \text{ daN}$ Maximum : $F'_{rM} = 240 \text{ daN}$



## EXPRESSION DE LA DISTANCE D'ARRÊT

(Vent de face)

Vitesse du vent

↓ ↓ Masse de l'élément

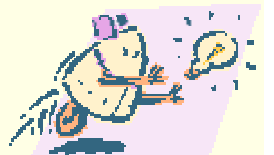
↓ ↓ ↓ Masse des parties tournantes

$$D = \frac{A(M+me)}{\sqrt{K.Fr}} (U-V) + \frac{(M+me)}{K} \text{Log} \frac{\cos U}{\cos V}$$

$$\text{Avec : } U = \text{Arctg} A \sqrt{\frac{Fr}{K}}$$

$$V = \text{Arctg}(A - V_0) \sqrt{\frac{Fr}{K}}$$

Vitesse initiale du véhicule

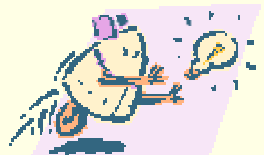


## EXPRESSION DE LA DISTANCE D'ARRÊT

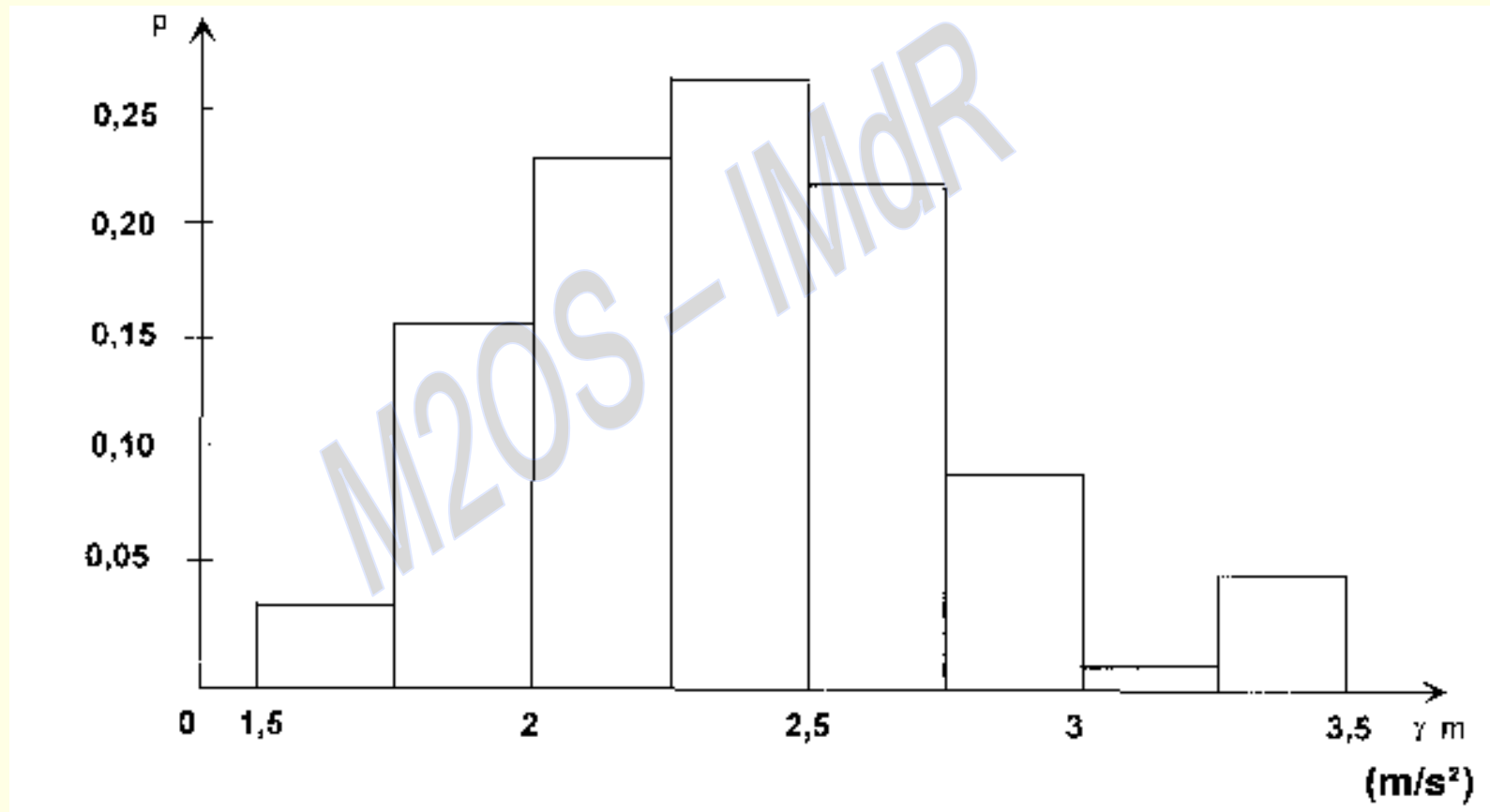
(Vent arrière)

$$D = \frac{A(M + me)}{2\sqrt{K \cdot Fr}} \text{Log} \left[ \frac{(A - V_0) - \sqrt{\frac{Fr}{K}}}{(A - V_0) + \sqrt{\frac{Fr}{K}}} \times \frac{A + \sqrt{\frac{Fr}{K}}}{A - \sqrt{\frac{Fr}{K}}} \right]$$

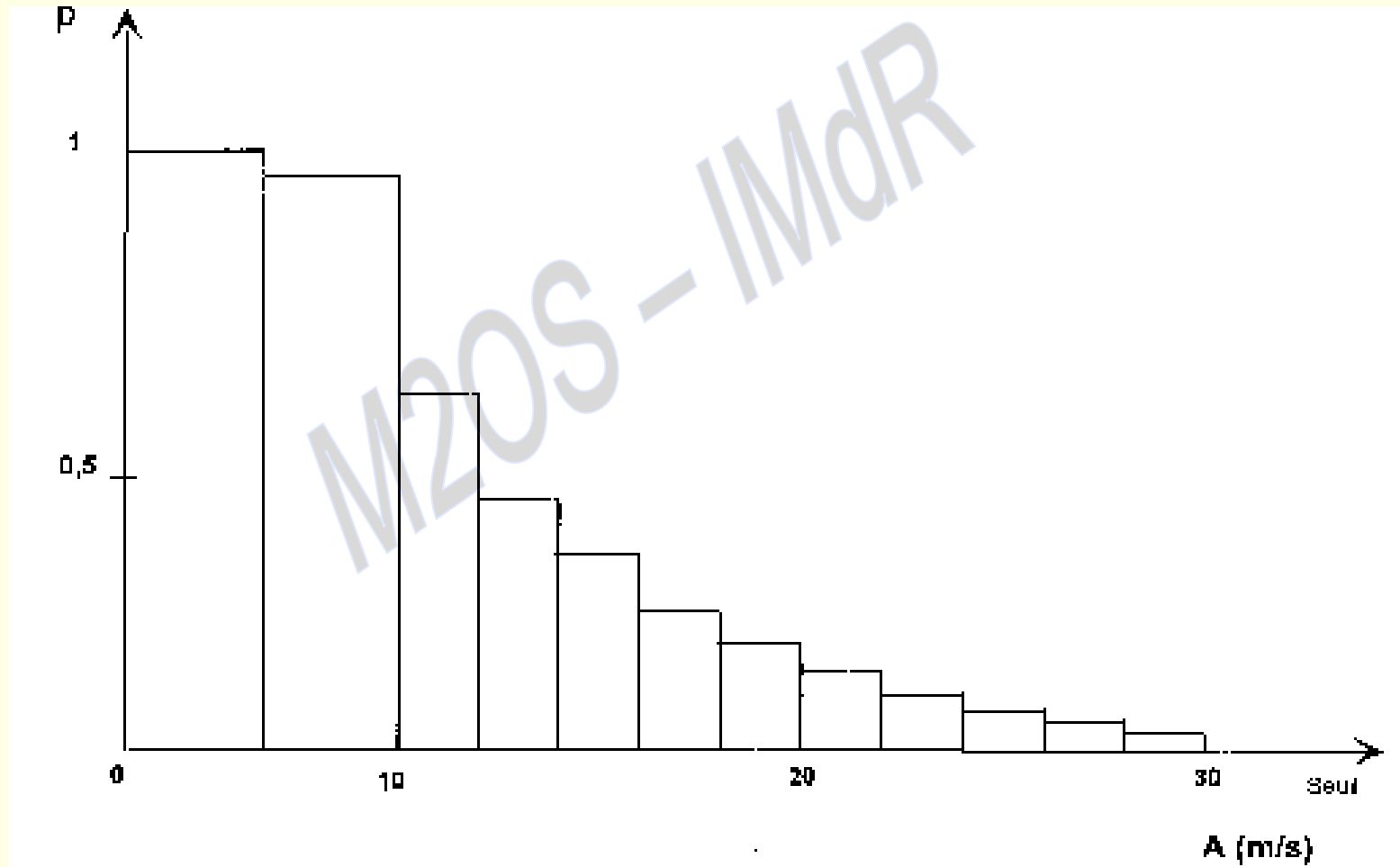
$$\frac{2(M + me)}{K} \text{Log} \left[ \frac{\frac{Fr}{K} - (A - V_0)^2}{\frac{Fr}{K} - A^2} \right]$$



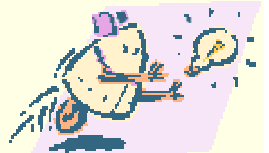
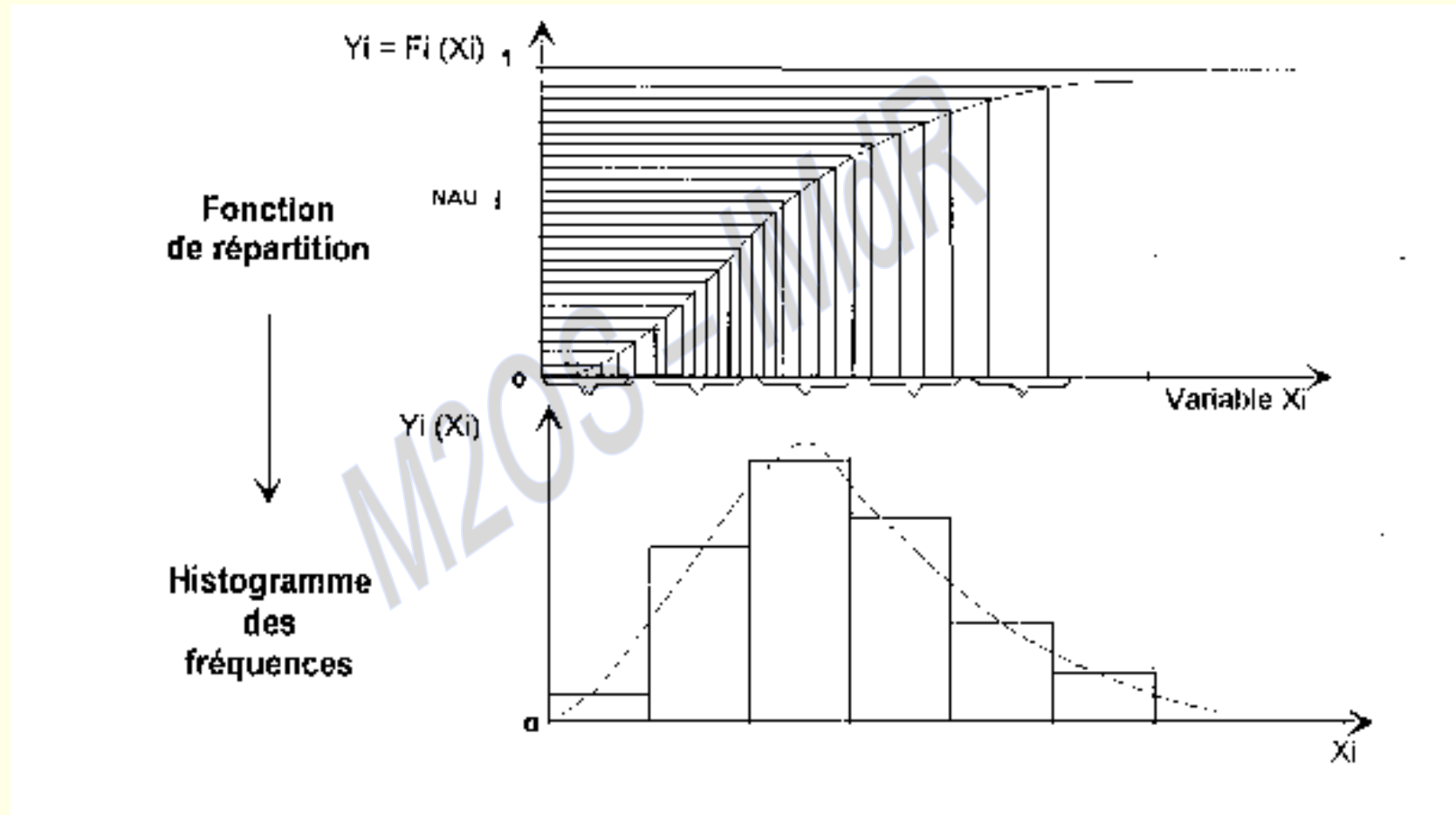
## HISTOGRAMME DES FREQUENCES DE LA DECELERATION MOYENNE



## FREQUENCES CUMULEES DES VITESSES DE VENT MAXIMALES QUOTIDIENNES

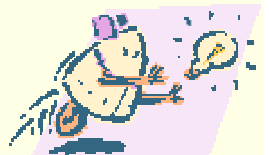


# METHODE DE SIMULATION DE MONTE-CARLO

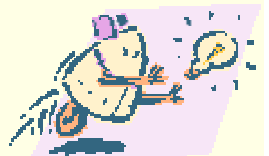


## RESULTATS D'UNE SIMULATION DE FREINAGE

	Distance d'arrêt (m)	Décélération moyenne (m/s <sup>2</sup> )
Valeur moyenne	108	2,33
Ecart-type	17	0,37
Valeur maxi	146	3,36
Valeur mini	73	1,68
<b>Worst case</b>	<b>202</b>	<b>1,22</b>



# 14. LA DECHIRURE DUCTILE





# Société Française des Mécaniciens INSTRUC 2

→ Estimation pratique de la nocivité des fissures par la

## METHODE DES DEUX CRITERES

J. LEBEY, D. MOULIN & R. ROCHE



## ANALYSE LIMITE ET CONTRAINTE PRIMAIRE

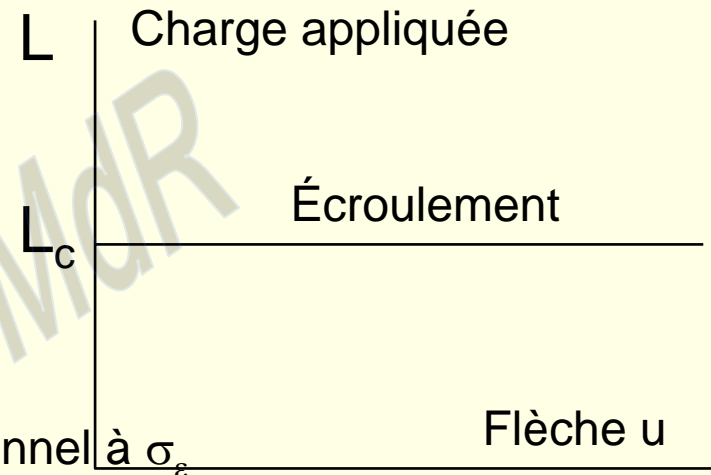
### → Écroulement d'une structure

⇒ il existe une charge

$L_c$  telle que

$L < L_c$        $u = 0$

$L = L_c$        $u$  quelconque



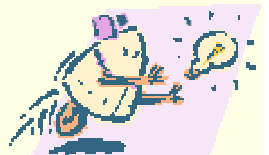
⇒ ce chargement limite est proportionnel à  $\sigma_e$

⇒ il est facile d'obtenir des valeurs par défaut de  $L_c$  (elles sont en équilibre avec un champ  $\sigma$  tel que  $\sigma < \sigma_e$ ).

### → La notion de contrainte primaire

⇒ Contrainte en équilibre avec  $L$ , ne pouvant disparaître par déformation (ce qui reste après relaxation totale).

$$L_r = P / \sigma_e$$



## ANALYSE LIMITE ET CONTRAINTE PRIMAIRE (suite)

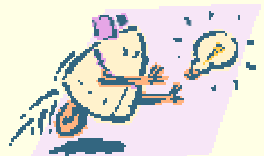
### → REMARQUE

⇒ Cette pièce était sans défauts et elle a cassé !

- ☐ La seule considération des défauts ne suffit pas à prévoir la ruine.
- ☐ Il faut au moins considérer **deux modes de ruine** :
  - l'un dépendant des fissures et plutôt fragile (au sens courant de ce mot)
  - l'autre indépendant des fissures et plutôt ductile.

⇒ Deux critères :

- ☐ un pour les fissures dit «fragile»
- ☐ un pour la ruine plastique dit «ductile».



## PREMIER CRITERE POUR LES FISSURES («critère fragile»)

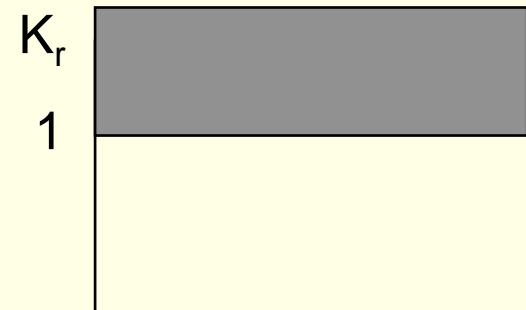
→ Comme il jouera surtout pour la fragilité, la bonne pratique est la **Mécanique Élastique Linéaire de la Rupture**.

- Facteur d'intensité de contrainte  $K_I$ 
  - ▣ calculé, proportionnel au chargement (y inclus les dilatations différentielles et ...), à peu près proportionnel à la racine de la profondeur de fissure.
- Ténacité du matériau  $K_{IC}$ 
  - ▣ mesurée si possible (mais est-ce possible?)
- On pose :

$$K_r = K_I / K_{IC}$$

→ Le premier critère est

$$K_r < 1$$



## SECOND CRITERE POUR LES «PIECES SAINES» («critère ductile»)

→ Comme il jouera surtout pour la ductilité, la bonne pratique est **l'analyse limite**.

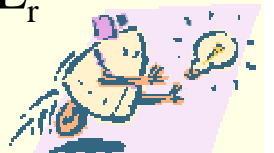
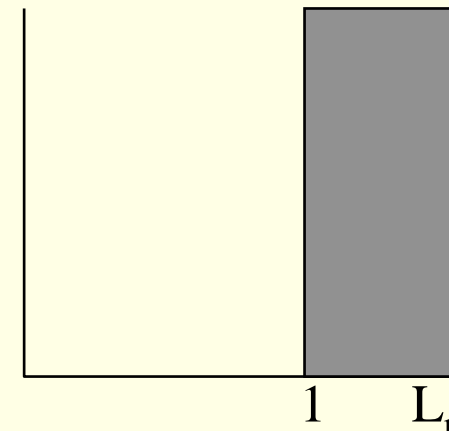
- ➔ Le «chargement-forces»  $L$ 
  - ▢ (l'ensemble des forces appliquées, mais pas de déformations)
- ➔ Le Chargement limite  $L_c$ 
  - ▢ proportionnel à la « contrainte d'écoulement » du matériau faiblement sensible à la profondeur de fissure, calculé pour un chargement proportionnel à  $L$ .
- ➔ On pose

$$L_r = L / L_c$$

→ Le second critère est

$$L_r < 1$$

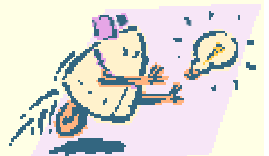
- ▢ autrement dit, la pièce s'écroule pour  $L_r = 1$



## L'ANALYSE LIMITE

→ Il faut tuer le monstre élastique!

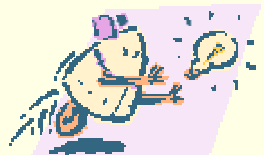
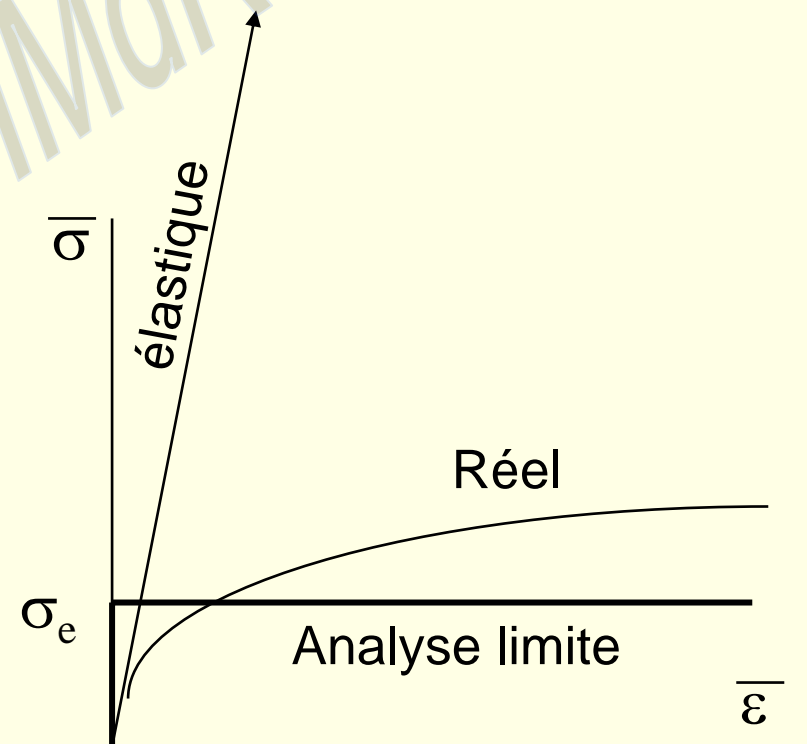
- ➔ Admettre que le matériau est élastique n'est que paresse, facilité. Il est rare que ce soit justifié.
- ➔ Les méthodes sophistiquées de calcul en plasticité sont coûteuses et peu robustes. Il n'est pas possible de savoir comment leurs résultats dépendent des variations des propriétés du matériau. **Et les contraintes initiales!**
- ➔ L'analyse limite est une méthode simple, d'une précision suffisante, dont les résultats ne sont pas fonction du matériau, dont les propriétés ne sont introduites qu'après les calculs



## LE MATERIAU RIGIDE ET PARFAITEMENT PLASTIQUE

- ➔ Les déformations élastiques sont faibles (0,1%)
- ➔ La contrainte varie peu durant la déformation plastique.

$$\begin{aligned} \sigma < \sigma_e &\rightarrow \varepsilon = 0 \\ \sigma = \sigma_e &\rightarrow \varepsilon \text{ quelconque} \\ &\text{peut être infini} \end{aligned}$$



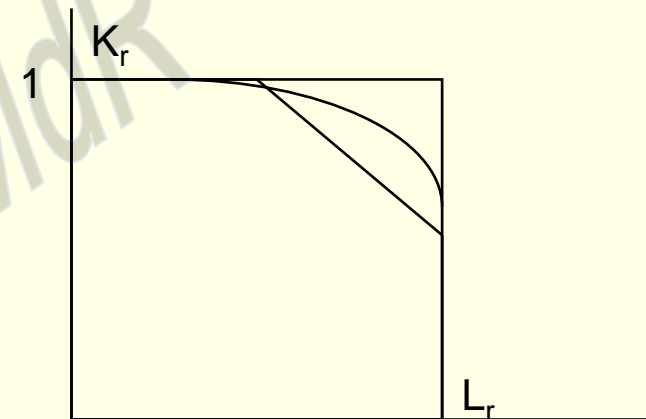
## DIAGRAMME D'INTERACTION

→  $L_r = L / L_c < 1$

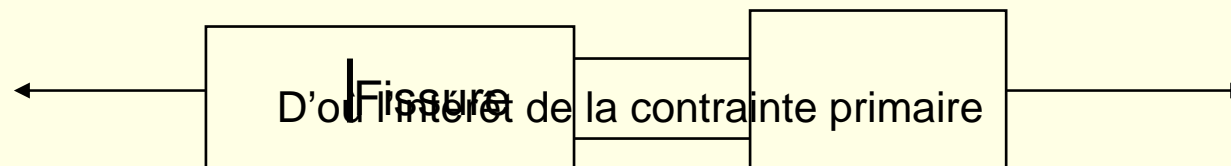
$K_r = K_I / K_{Ic} < 1$

➔ mais il y a interaction quand les deux critères sont proches de un.

Il a été proposé des formules théoriques pour cette interaction mais que l'expérience ne justifie guère (*Dugdale-Berenblatt 1959 avec la théorie de Bilby-Swinden-Cotrell*).



→ Remarque : il n'y a interaction que si la fissure est dans la région critique de la ruine plastique.





Au delà de la M.E.L.R.  
**LA FORCE FISSURANTE J**

1967 - James Rice et G.F. Rosengreen (Brown Un. Providence R.I.), J.W. Hutchinson  
 (Harvard University)

dite aussi Intégrale J ou Intégrale de Rice

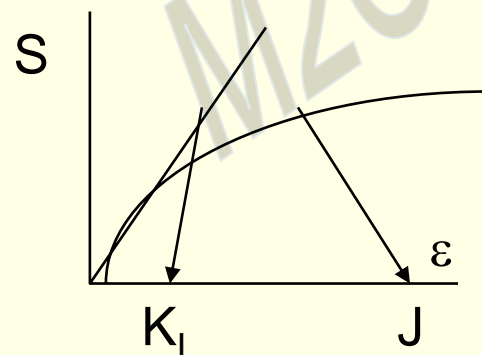
**MECANIQUE NON LINEAIRE**

(étendre le domaine de validité)

bien des présentations dont deux ci-dessous

→ Singularité HRR

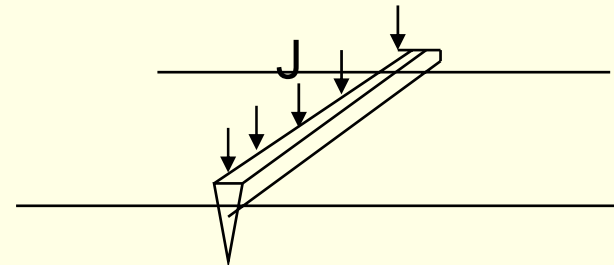
- ⇒ comme en linéaire le champs de contrainte ne dépend que de J



- ⇒ en linéaire  $J = G = K_I^2 / E$

→ Force configurationnelle

- ⇒ une force J par unité de longueur sur un couteau fictif



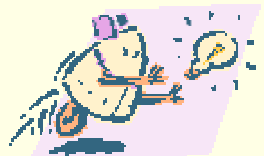
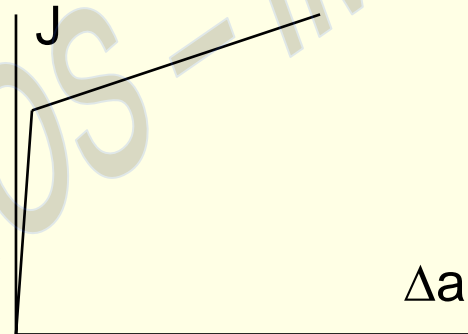
- ⇒ force fissurante par unité de longueur J

$$\Rightarrow \text{N/mm} = \text{kJ/m}^2 = \frac{\text{MPa.m}}{1000}$$

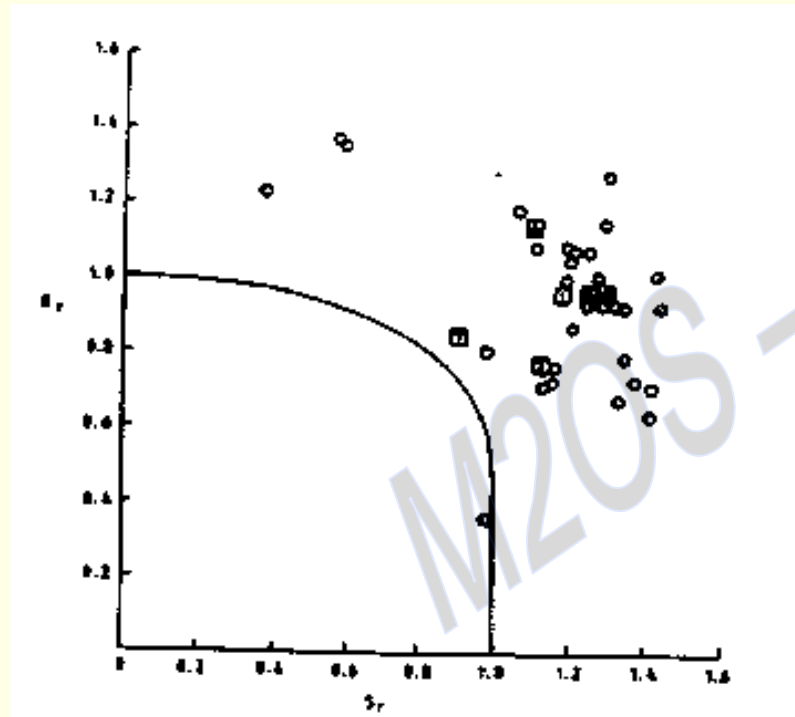


## Suite

- Calcul et mesure plus complexes !
- ⇒ Un ordre de grandeur  $J = \Pi.F^2.S.\epsilon.a$
  - ⇒ Propagation stable



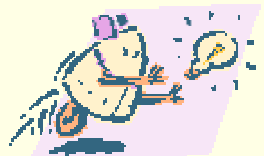
## THE 1984 ICF HONOUR LECTURE THE USE OF FRACTURE MECHANICS AS AN ENGINEERING TOOL



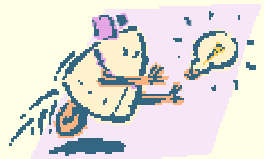
Key :

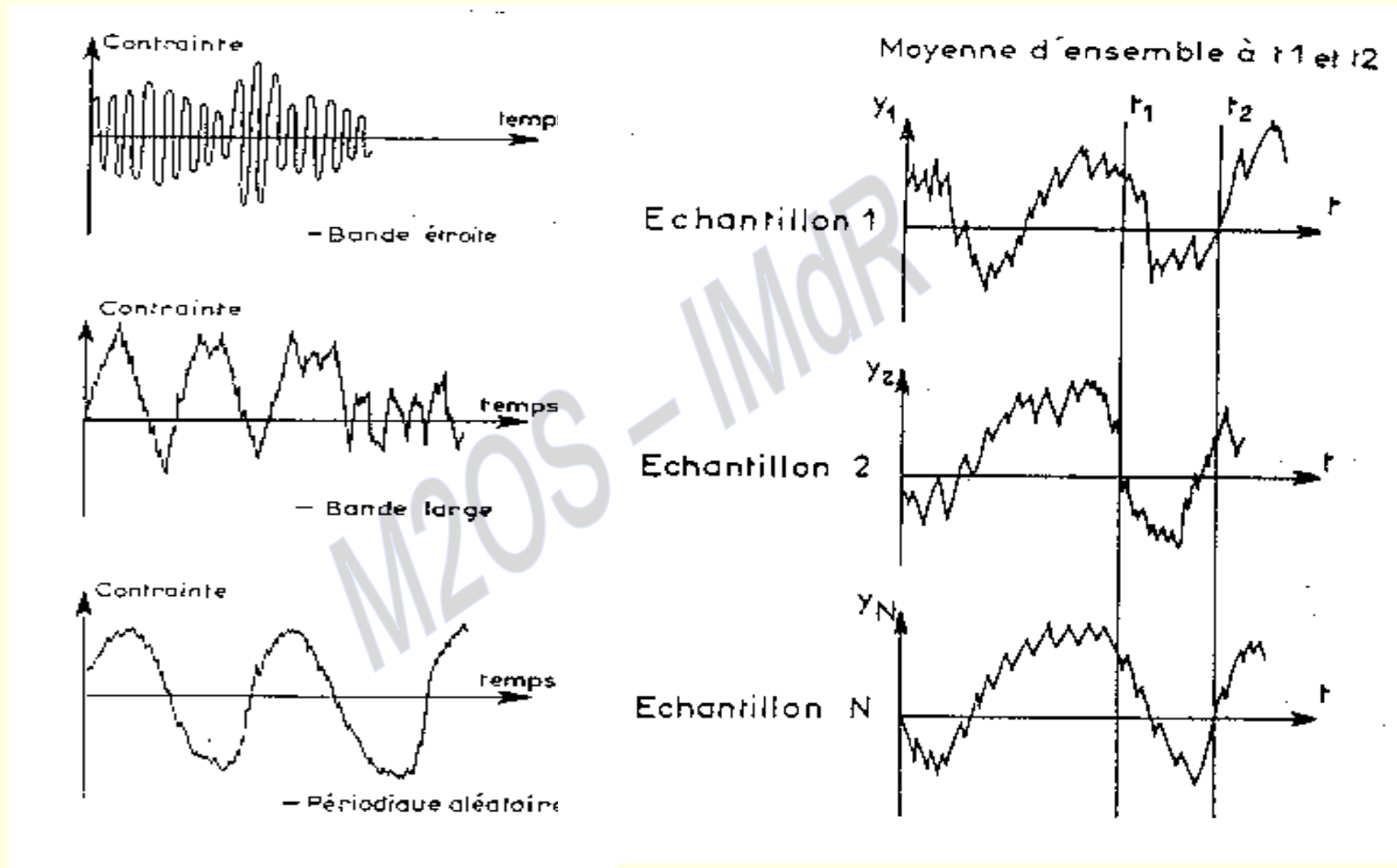
- Spherical Ma - Mo steel pressure Vessels
- ⊠ HSST Vessels

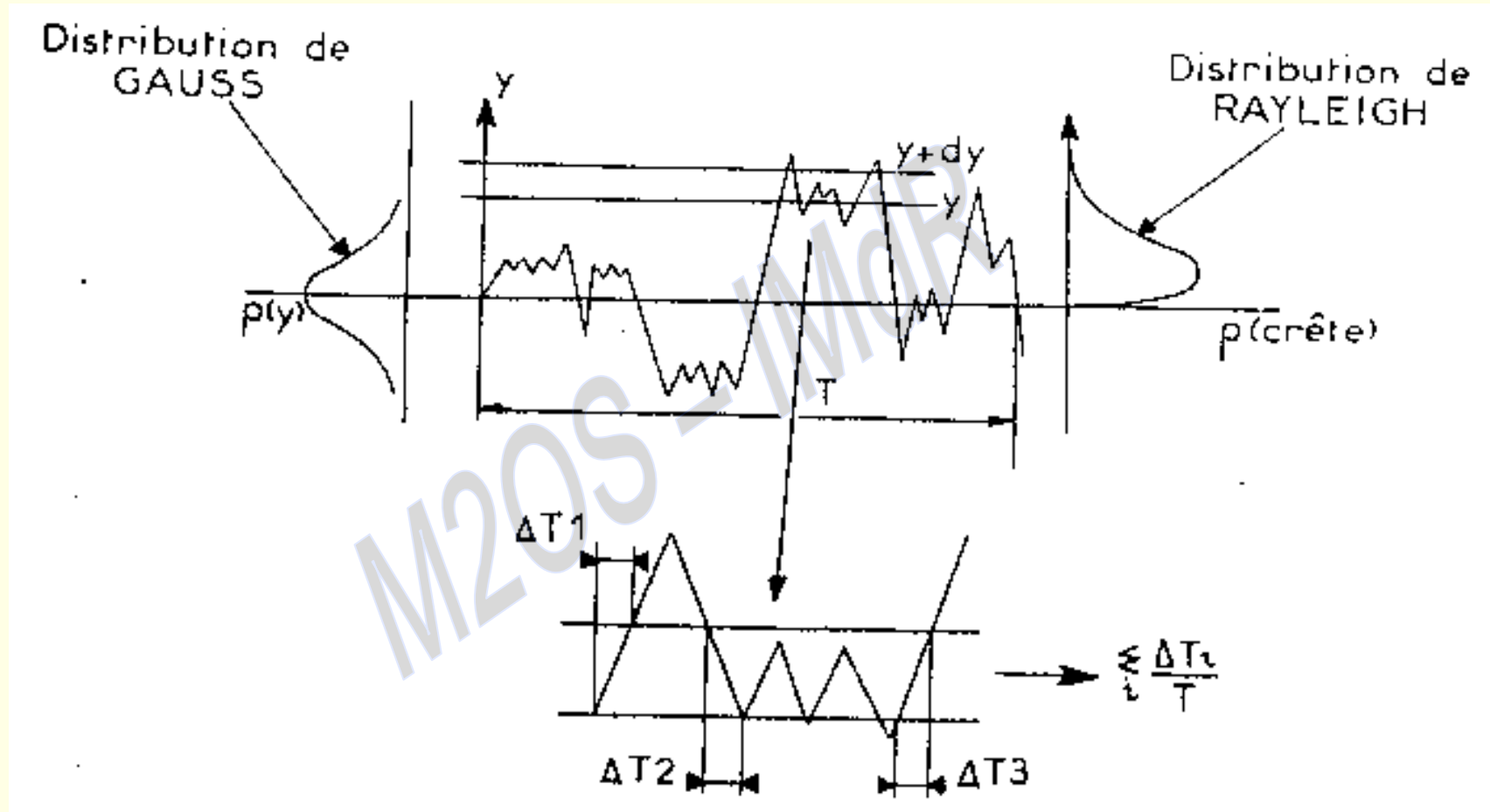
Figure 6 - Results of R - 6 Analyses of data from Yessel tests

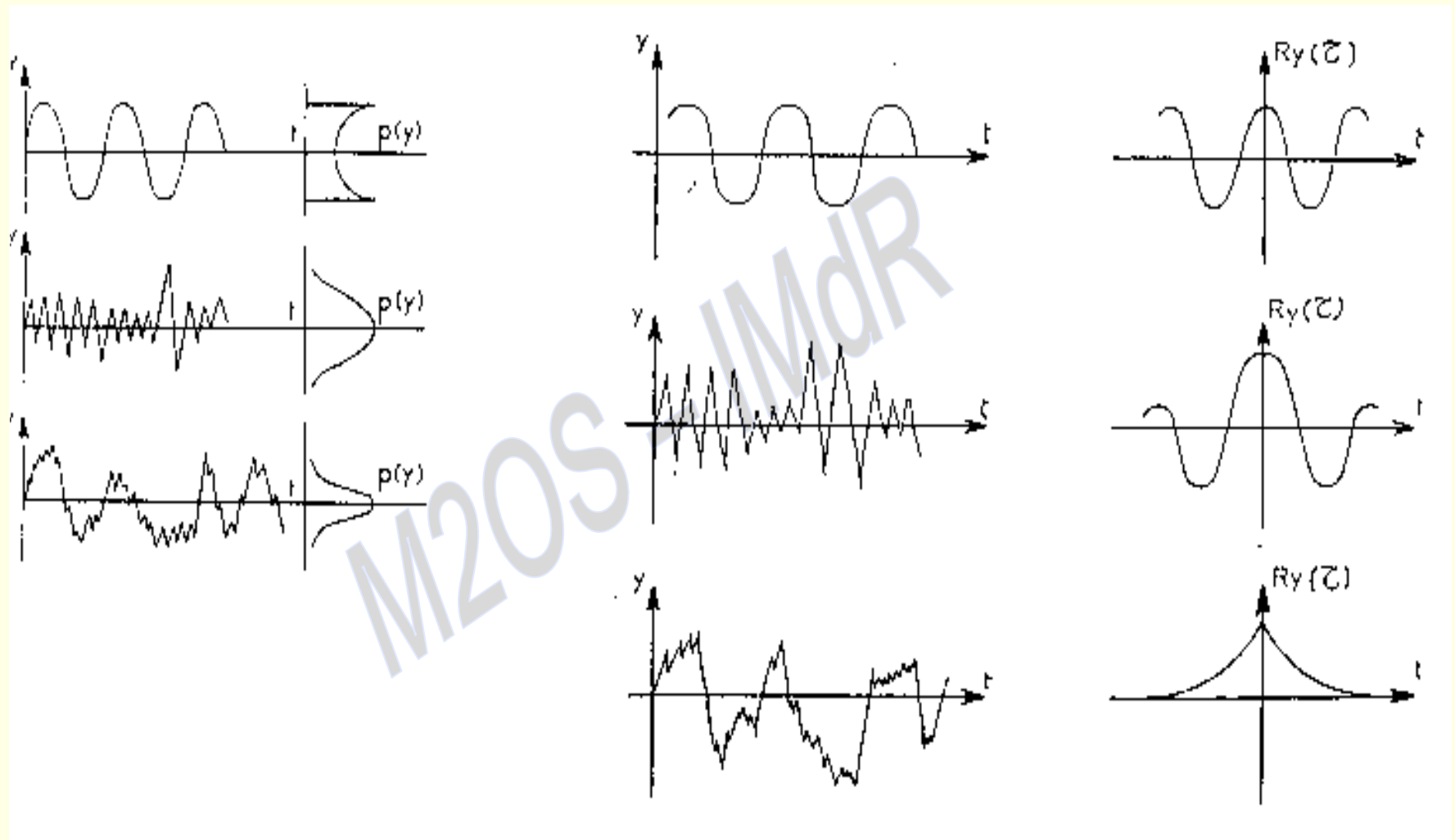


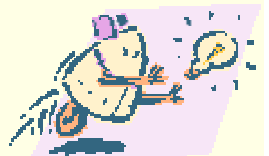
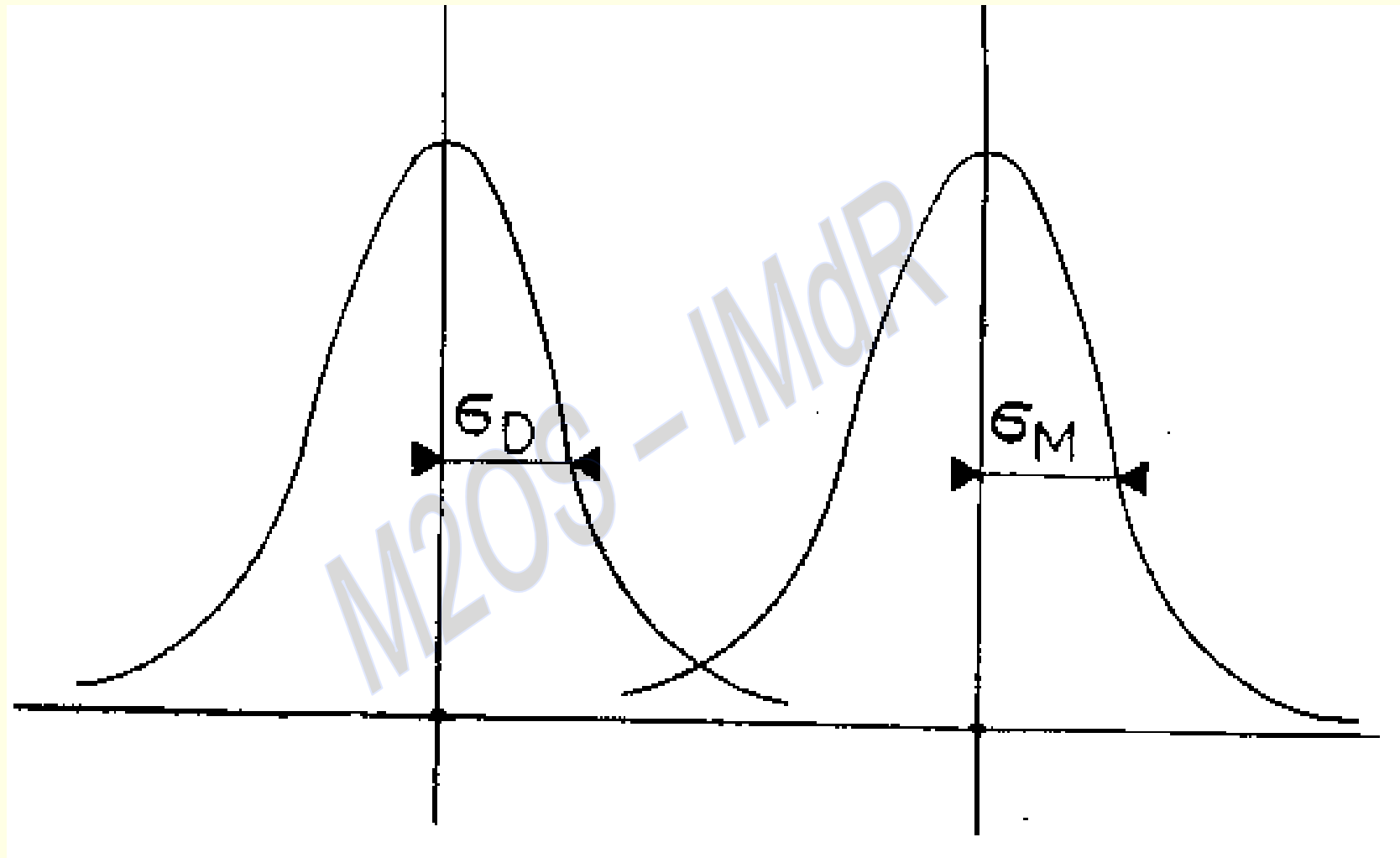
# 15. COMPLEMENTS FATIGUE OLIGOCYCLIQUE



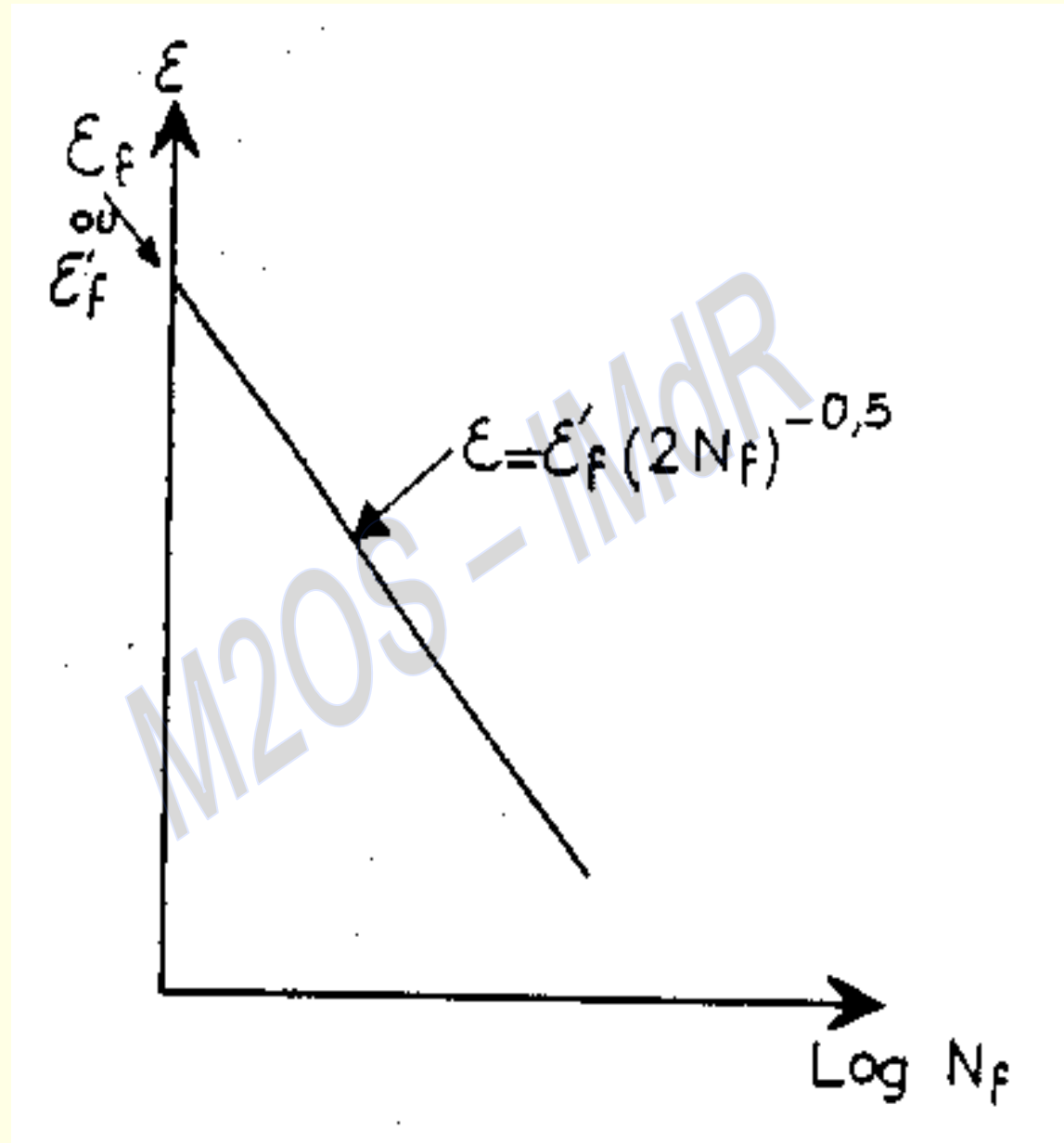


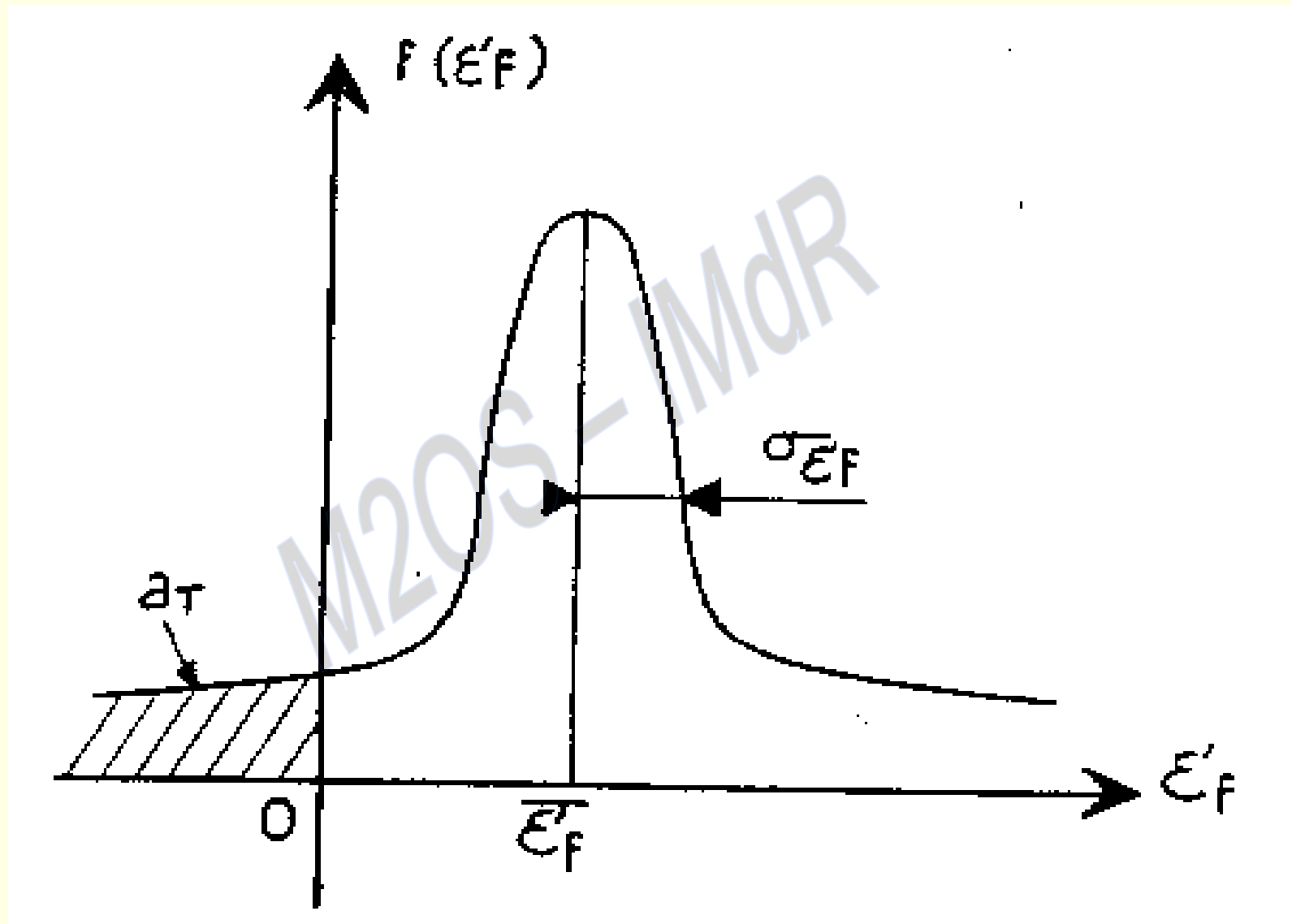


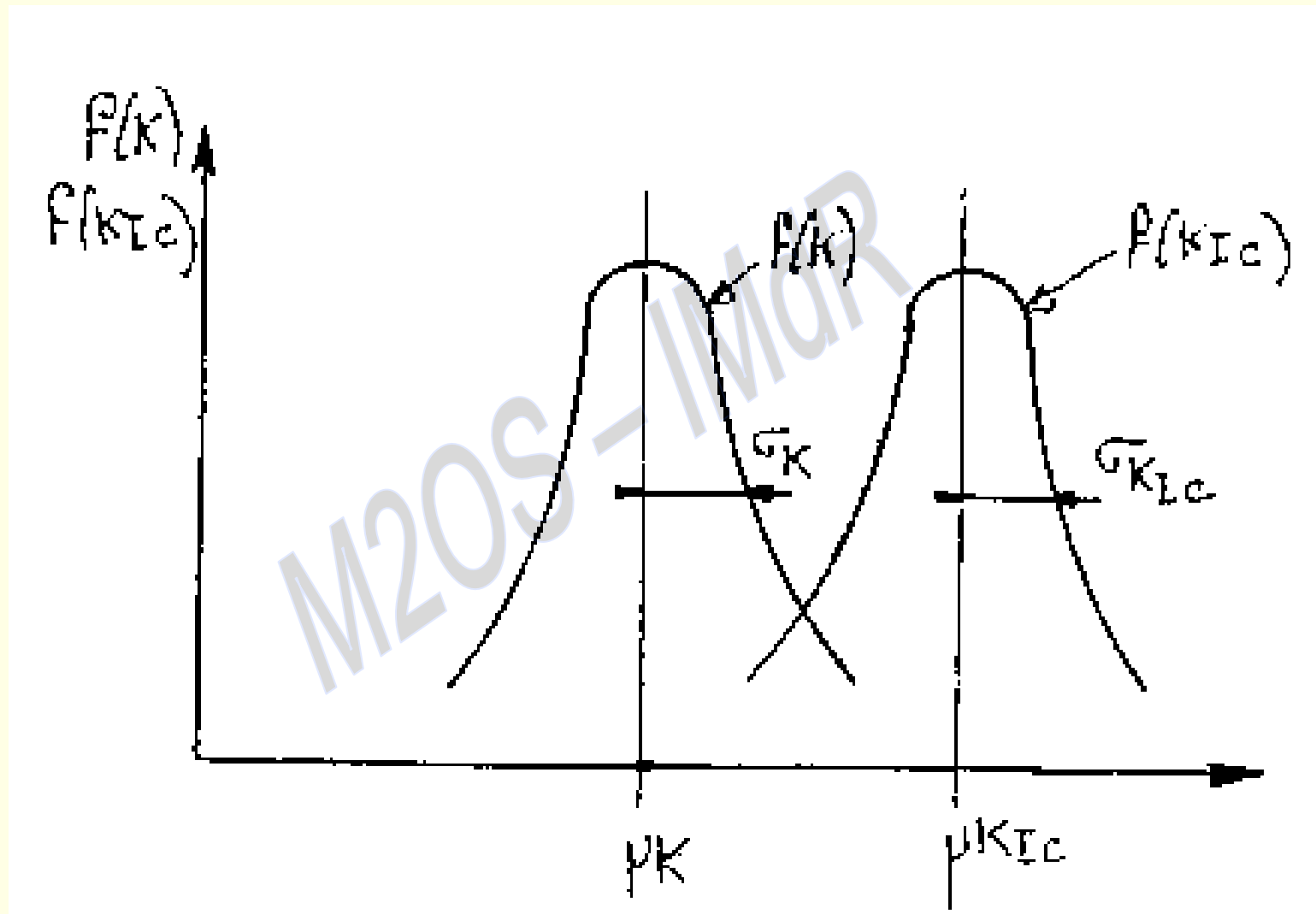




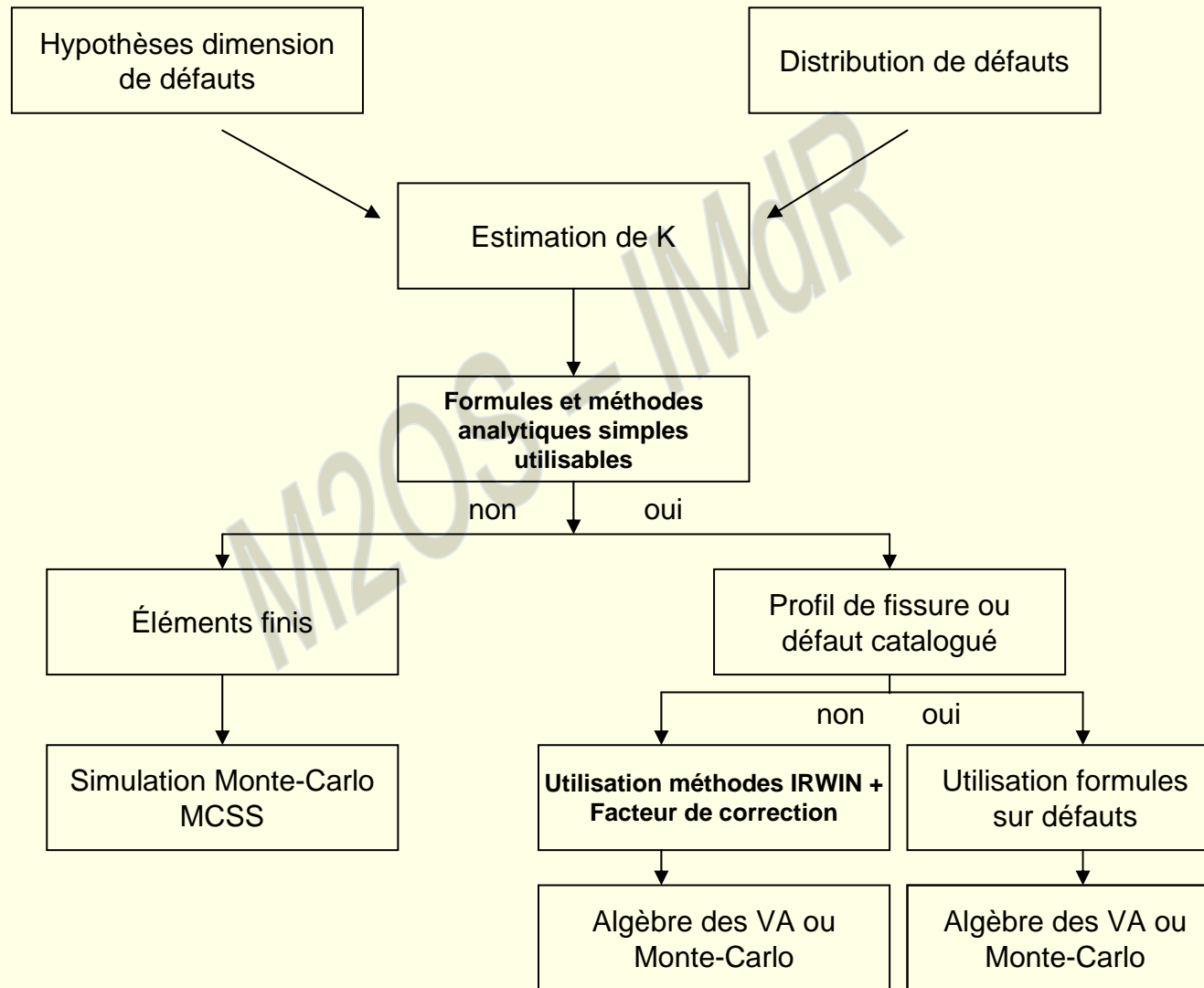




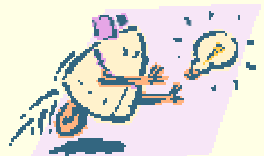
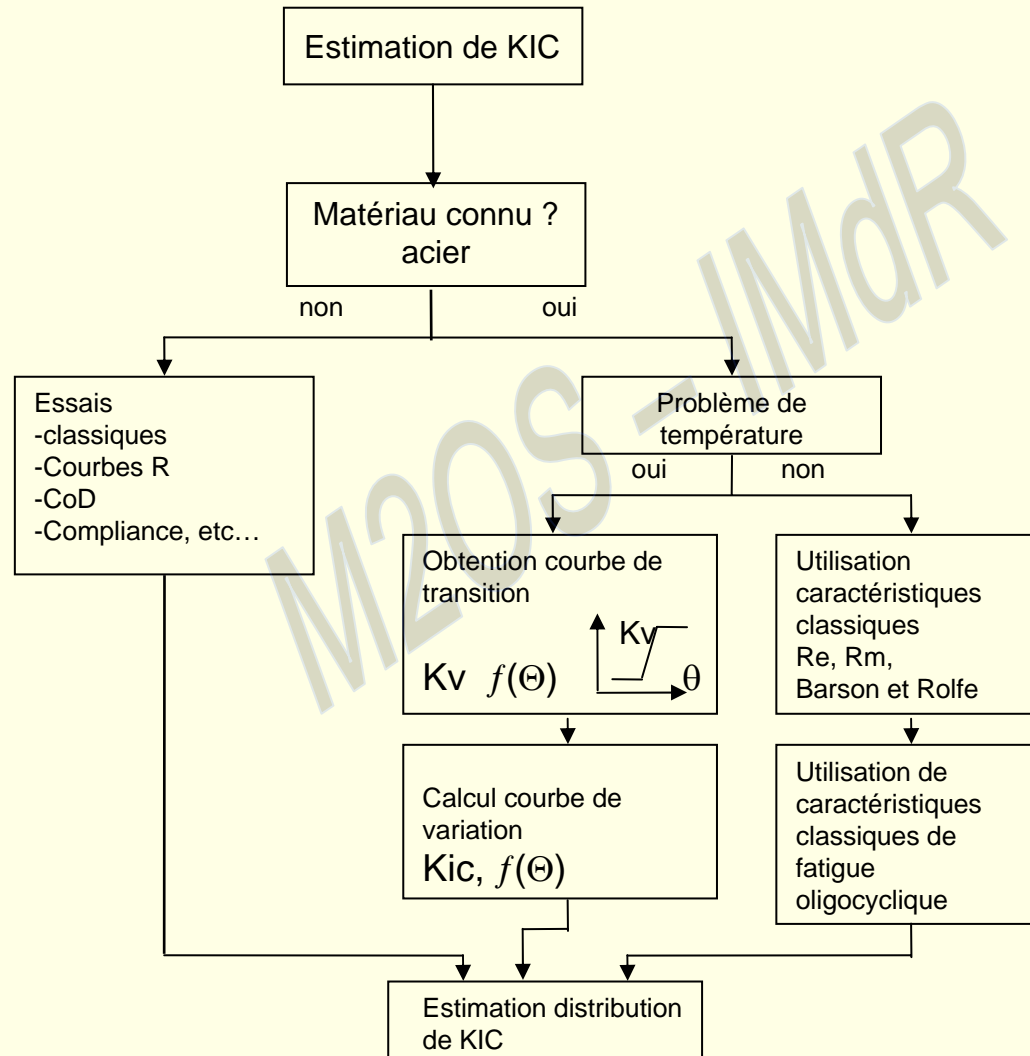




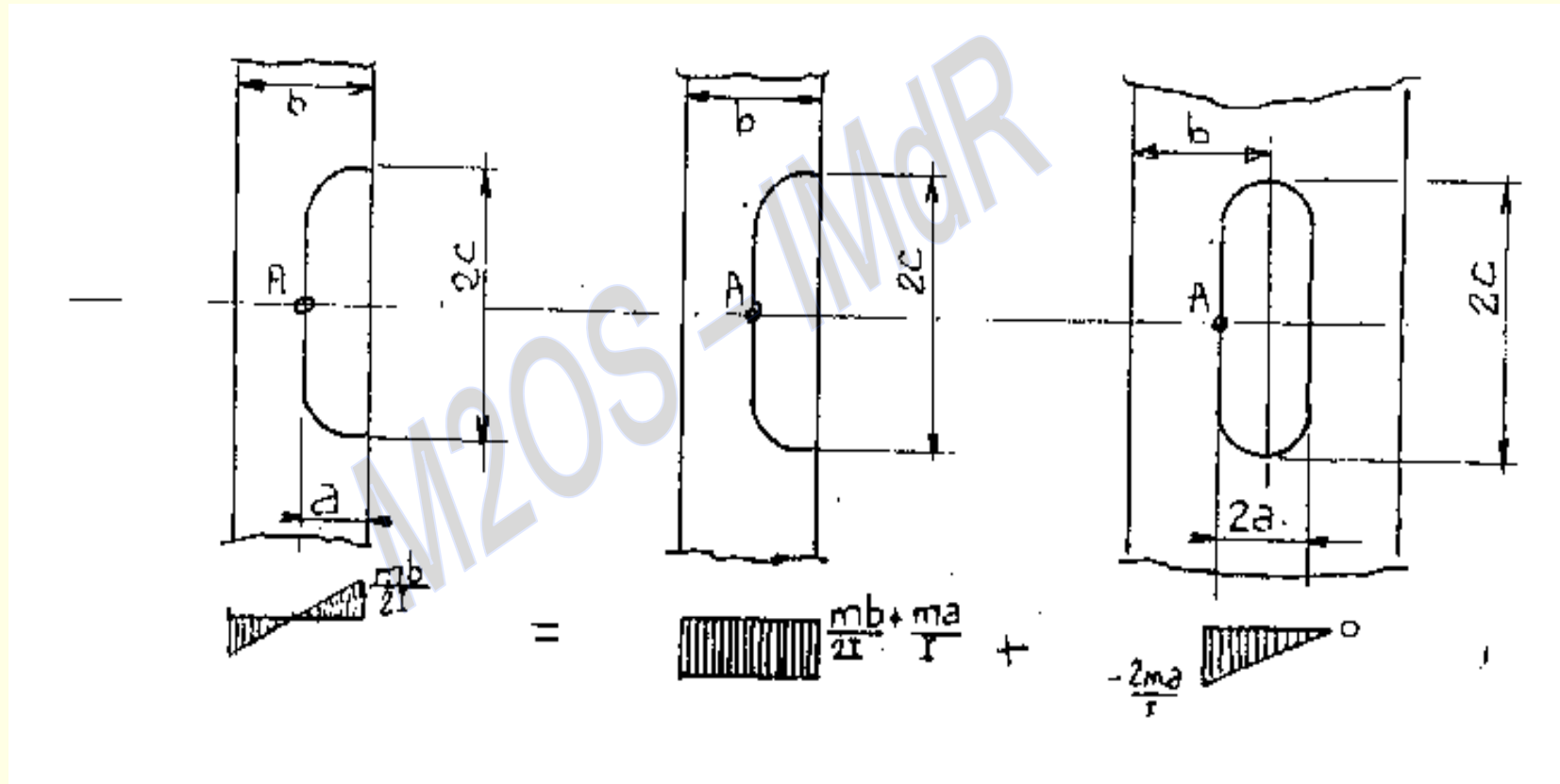
## ESTIMATION DE K

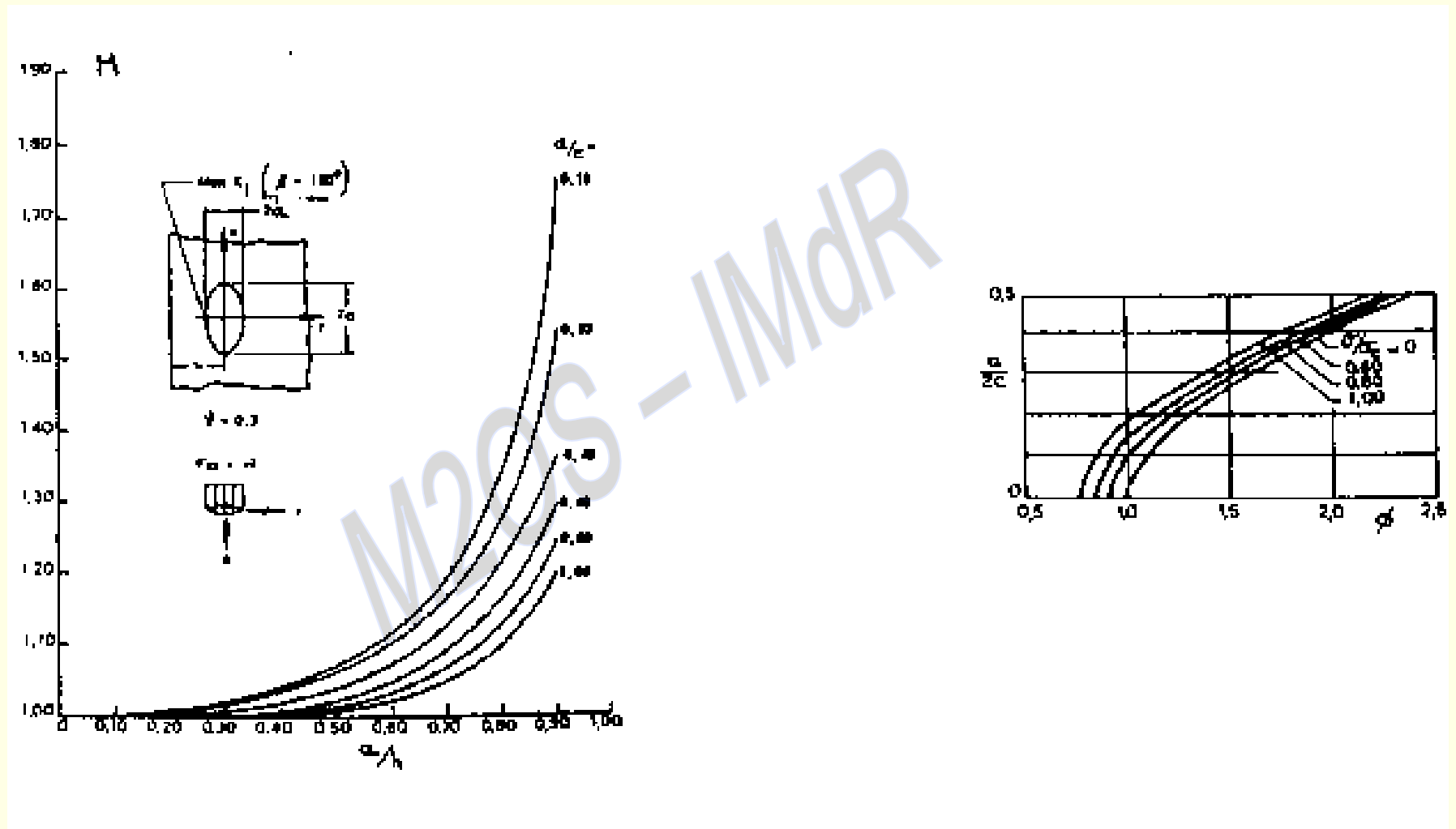


# ESTIMATION DE KIC

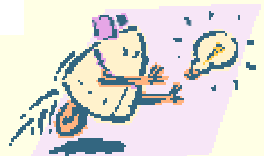
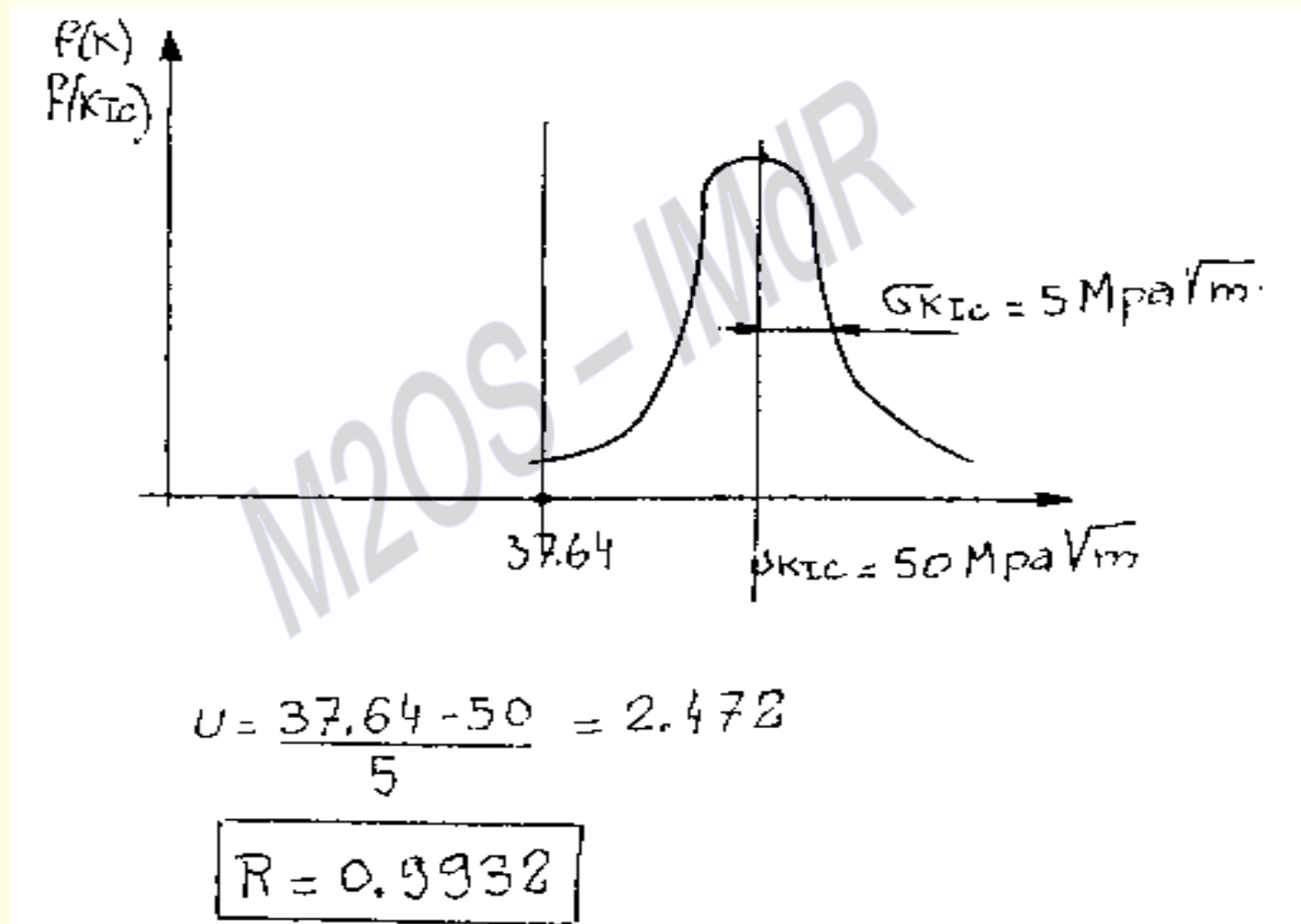


# RESOLUTION





## CALCUL DE FIABILITE





**LISTE DES EXEMPLES PRATIQUES**

EXEMPLE 1 : MODELES GENERAUX

EXEMPLE 2 : ESSAIS ACCELERES DE COMPOSANTS PNEUMATIQUES MODELISATION DU COMPORTEMENT ET FIABILITE PREVISIONNELLE

EXEMPLE 3 : ANALYSE PROBABILISTE DES STRUCTURES UTILISANT NESSUS (NUMERICAL EVALUATION OF STOCHASTIC STRUCTURES UNDER STRESS)

EXEMPLE 4 : APPLICATION DES TECHNIQUES DE FIABILITE EN MECANIQUE AUX PALES D'HELICOPTERE

EXEMPLE 5 : ARIANE 5 – FIABILITE DU CORPS DE PROPULSEUR ET DES LIAISONS INTERSEGMENTS

EXEMPLE 6 : METHODE PROBABILISTE APPLIQUEE AUX MECANISME DE FRACTURE ET AU CONTROLE POUR LES BOOSTER DU SHUTTLE

EXEMPLE 7 : METHODE PROBABILISTE ET CRITERES DE CONCEPTION POUR ARBRE DE MOTEUR DIESEL

EXEMPLE 8 : MODELES DE FIABILITE BELVOIR

EXEMPLE 9 : DUREE DE VIE DE ROULEMENTS LUBRIFIES A LA GRAISSE

EXEMPLE 10 : LES CERAMIQUES

EXEMPLE 11 : DIMENSIONNEMENT EN FATIGUE ET FLUAGE DES AUBES DE TURBINE

EXEMPLE 12 : ANALYSE STATISTIQUE DE LA DUREE DE VIE DES GENERATEURS DE VAPEUR ET METHODE PROBABILISTE D'INSPECTION DU FAISCEAU

EXEMPLE 13 : EVALUATION PROBABILISTE DE LA RUPTURE D'UNE CUVE DE REACTEUR (FBR)

EXEMPLE 14 : CONTROLE DES RESERVOIRS SOUS PRESSION

EXEMPLE 15 : METHODOLOGIE MISE AU POINT PAR ESA PAR L'AEROSPATIALE/CANNES

EXEMPLE 16 : DETERMINATION DE LA PROBABILITE DE RUPTURE D'UNE CAISSE DE METRO

EXEMPLE 17 : DEFINITION DES OBJECTIFS DE SECURITE POUR UN METRO MODERNE

EXEMPLE 18 : LA METHODOLOGIE MSG3

EXEMPLE 19 : APPROCHE PROBABILISTE DU CALCUL A LA FATIGUE D'UN NEUD DE STRUCTURE OFFSHORE

EXEMPLE 20 : CALCUL SOUS SOLLICITATIONS COMPLEXE MODELE DE DANG VAN

**FIABILITE MECANIQUE**

EXEMPLE 21 : FIABILITE DES STRUCTURES MARINES SOUS CHARGEMENT EXTREME

EXEMPLE 22 : MECHANICAL DURABILITY PREDICTION METHODS

EXEMPLE 23 : PROBABILITE DE DEFAILLANCE D'UN RESERVOIR

EXEMPLE 24 : ANALYSE PROBABILISTE DE STRUCTURE AVION

EXEMPLE 25 : NORMES ESA PSS 1-1-401 – CONTROLE DES DEFAILLANCES

EXEMPLE 26 : MODELES ETAT DE LA MER

EXEMPLE 27 : FIABILITE DE MOTEURS A PROPULSION SOLIDE A COUT MINIMUM

EXEMPLE 28 : METHODE SAGIRISK

EXEMPLE 29 : APPLICATION DU CONCEPT – FUITE AVANT EXPLOSION

EXEMPLE 30 : UTILISATION DE CRITERES DE PONDERATION EN FIABILITE

EXEMPLE 31 : MODELES DE DECHIRURE DUCTILE PLAQUES MINCES

EXEMPLE 32 : APPROCHE PHYSIQUE DE LA MODELISATION DES DEFAILLANCE DU POINT DE VUE FIABILITE

EXEMPLE 33 : CARTES DE DEFORMATION D'ASHBY ET MODES DE DEFAILLANCES

EXEMPLE 34 : UN MODELE DE SIMULATION DE RISQUE POUR ROUE DE TURBINE

EXEMPLE 35 : EFFET DE VARIABLES DE CONCEPTION, TEMPERATURE, VITESSE SUR LA VIE ET LA FIABILITE  
D'UN DISQUE ROTATIF

EXEMPLE 36 : REGLES DESIGN

EXEMPLE 37 : ETUDE FIABILISTE EN FATIGUE D'UN NŒUD TUBULAIRE DE STRUCTURE OFFSHORE AVEC  
CRITERE DE RUINE VARIABLE DANS LE TEMPS

EXEMPLE 38 : UTILISATION DES METHODES FIABILISTES POUR L'EVALUATION DES REGLEMENTS

EXEMPLE 39 : MODES DE DEFAILLANCE MICRO-ELECTRONIQUE, INFLUENCE DE LA TEMPERATURE

EXEMPLE 40 : CALCUL DE JOINTS SOUDES SUR CIRCUITS IMPRIMES SOUS VIBRATION ET CYCLES THERMIQUES

EXEMPLE 41 : ROLE DE L'IDENTIFICATION DES MECANISMES DE DEFAILLANCE DANS LES TESTS ACCELERES

**EXEMPLE 1 :**  
**MODELES GENERAUX**

**Modèle 1 : Usure de deux plaques frottant l'une sur l'autre**

Profondeur d'usure  $\beta_m = V_m / \alpha n$

$V_m$  = volume de matériau enlevé en  $\text{cm}^3$

$\alpha n$  = surface de contact

$$V_m = (\alpha t) \cdot (Dw) \cdot (\lambda w)$$

$\alpha t = La / h_i$        $La$  = charge appliquée en Kg  
 $h_i$  = dureté en  $\text{Kg/cm}^2$

$Dw$  = distance de parcours en cm

$\lambda w$  = coefficient d'usure

$$\beta_m = \frac{(\alpha t) \cdot (Dw) \cdot \lambda w}{\alpha n} = \frac{La \cdot Dw \cdot \lambda w}{h_i \alpha n}$$

Dans le cas de matériaux différents :

$$\beta_{hm} = \frac{S_{ys}^2 \cdot \beta_{sm}}{S_{yh}^2}$$

$S_{ys}$  = limite élastique de matériau le plus mou

$S_{yh}$  = limite élastique du matériau le plus dur

$\beta_{sm}$  = la profondeur d'usure du matériau le plus mou

**Modèle 2 : Modèle 0 usure**

Le modèle ci-dessous permet de déterminer le nombre de cycles qui peut être toléré sans atteindre le zéro usure.

$$m = \frac{2000 (\lambda \cdot y_{sp})^9}{(S_{s \max})^9}$$

$m$  = nombre de cycles

$\lambda$  = constante associée avec lubrification et matériau

$y_{sp}$  = limite élastique en cisaillement

$S_{s \max}$  = contrainte maximum de cisaillement produite par frottement

**Modèle 3 : Détermination du taux de corrosion. Attaque chimique directe. L'équation ci-dessous est utilisée pour calculer le taux de corrosion ponctuation  $\mu\text{c}$  en mil/année**

$$\mu\text{c} = \frac{(543)W_L}{d \cdot T \cdot \alpha s}$$

$\alpha s$  = surface d'exposition en inches<sup>2</sup>

$d$  = densité en g/cm<sup>3</sup>

$W_L$  = poids perdu en mg

$T$  = temps d'exposition en heures

**Modèle 4 : Usure par frottements**

$$WT_L = Afc + \theta Spp \cdot Ln \cdot fc$$

$$A \equiv [\alpha(Ln)^{1/2} - \beta Ln] / ff$$

$fc$  = nombre de cycles

$ff$  = fréquence

$Spp$  = écart pic à pic entre surface

$Ln$  = charge de contact

$\alpha, \beta, \theta$  = constantes

**Modèle 5 : Modèle d'érosion**

$$dE = v/a_E = (270) P_1 T_E/E_S$$

$a_E$  = surface d'exposition en in<sup>2</sup>

$v$  = volume d'érosion en in<sup>3</sup>

$E_S$  = résistance à l'érosion en PSI

$P_1$  = puissance en W/ft<sup>2</sup>

$T_E$  = temps d'exposition en heures

## Modèles pour Electromécanique

Palier lubrifié à la graisse

$$\lambda_m = T^{\alpha_1} / \theta^{\alpha_2}$$

$$\alpha_1 = 1.878 \quad \alpha_2 = 2.878 \quad T \text{ durée pour laquelle } \lambda \text{ est estimé}$$

$$\lambda_m = \lambda \text{ moyen}$$

$$0 = \frac{1.24^1}{(1/10^{y_1}) + [1/(10^{y_2} + 300)]}$$

$$y_1 = \left[ \frac{2342}{t_m} + Q - [(4.32)(ds)(10^{-6})] + G_c - 0.001S \left( \frac{L}{Cdc} \right)^{1.5} \right]$$

$$y_2 = 19.7 - (4760/t_m)$$

CdC = capacité dynamique

d = diamètre

G<sub>c</sub> = constante de graisse    1.41 minéral  
  1.81 silicium  
  1.55 lithium

L = charge

Q = facteur de qualité        Q = 0.12 militaire  
  Q = -0.27 commercial

S = vitesse

t<sub>m</sub> = température

**EXEMPLE 2 :**  
**ESSAIS ACCELERES DE COMPOSANTS PNEUMATIQUES**  
**MODELISATION DU COMPORTEMENT ET FIABILITE**  
**PREVISIONNELLE**

M2OS - IMdR

**EXEMPLE 3 :**  
**ANALYSE PROBABILISTE DES STRUCTURES**  
**UTILISANT NESSUS (NUMERICAL EVALUATION OF**  
**STOCHASTIC STRUCTURES UNDER STRESS)**

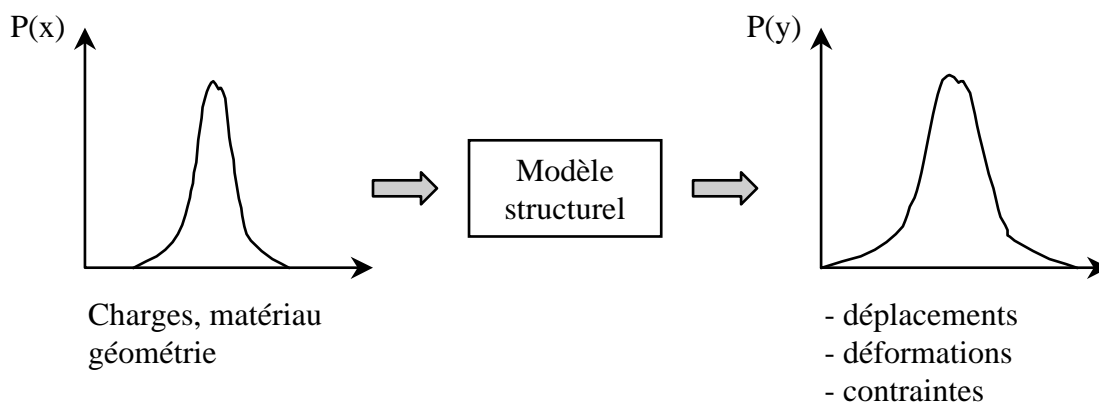
**Objet :**

Analyse probabiliste de la turbopompe (Aubes) du SSME (Space Shuttle Main Engine). Le but de l'étude est de caractériser statistiquement la fiabilité des aubes à partir de la description des incertitudes géométriques, matériau, température, pression.

Le programme NESSUS est utilisé, il comporte 3 modules principaux :

- ⇒ NESSUS-PRE = Pré-processeur utilisé pour la préparation de données statistiques utilisables dans l'analyse par éléments finis
- ⇒ NESSUS-FEM = Code par éléments finis
- ⇒ NESSUS-FPI (Fast Probability Integration). Le module utilise des données générées par NESSUS/FEM pour développer un modèle de performance en terme de variables aléatoires décorrélées. La réponse de probabilité structurelle est calculée à partir du modèle de performance, par une valeur de réponse donnée ; la probabilité d'excéder cette valeur est donnée par une méthode de fiabilité, qui traite le problème comme une minimisation sous contrainte. Une méthode alternative est de générer une simulation de Monte-Carlo.

Le concept général est résumé ci-dessous :



L'application est faite sur une aube de turbopompe sujette à des charges thermiques et mécaniques complexes.

**FIABILITE MECANIQUE**

Cette aube est modélisée avec 55 points éléments finis, 7 variables aléatoires sont sélectionnées, leur influence est visualisée et la probabilité de défaillance est calculée, soit  $pf(i) = \int fs_i(X) FR_i(X) dX$ .

$fs_i$  est la densité de probabilité de la contrainte au ième nœud,  $FR_i$  est la distribution cumulée de résistance au i événement.

NESSUS/FPi calcule aussi une étude de sensibilité indiquant quelle variable aléatoire est la plus importante.

M20S - IMdR



**EXEMPLE 4 :**  
APPLICATION DES TECHNIQUES DE FIABILITE EN MECANIQUE  
AUX PALES D'HELICOPTERE

M205 - IMdR

**EXEMPLE 5 :**  
**ARIANE 5 – FIABILITE DU CORPS DE PROPULSEUR ET DES**  
**LIAISONS INTERSEGMENTS**

M205 – IMdR

**EXEMPLE 6 :**  
**METHODE PROBABILISTE APPLIQUEE AUX MECANISME DE FRACTURE ET AU CONTROLE POUR LES BOOSTER DU SHUTTLE**

⇒ Technique de contrôle non destructif détectant des fissures initiales de longueur  $C_0 = 0.1$  inch de largeur  $0.5 C_0$  avec 100% succès.

⇒ La distribution initiale des distributions de largeur est représentée par une distribution de Johnson dont la densité de probabilité s'exprime sous la forme :

$$f_{a_0}(a_0) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda}{(a_0 - \varepsilon)(\lambda - a_0 + \varepsilon)} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \gamma + \eta \operatorname{Ln} \left( \frac{a_0 - \varepsilon}{\lambda - a_0 + \varepsilon} \right) \right\}^2 \right]$$

$$\varepsilon \leq a_0 \leq \varepsilon + \lambda, \eta > 0, -\infty < \gamma < \infty, \lambda > 0, -\infty < \varepsilon < \infty$$

Les paramètres sont  $\eta, \lambda, \varepsilon, \gamma$ .

Cette distribution change après chaque mission, étant du à la croissance de la fissure (dépendant de la longueur, de la fissure, des propriétés des matériaux).

La longueur de la fissure peut être connue en appliquant les lois de Paris, Forman etc, la distribution cumulée de longueurs de fissures après modélisation est notée  $F(a_n)$ .

Il est possible de connaître la distribution du facteur d'intensité de contrainte  $F(K_n)$  combinée à  $F(a_n)$  permet de calculer  $P_f$  = la probabilité de défaillance avec  $a_n \geq a_c$ ,  $f$ (facteur d'intensité critique).

⇒ La valeur de  $K$  considéré est de la forme :

$$K = \sqrt{\frac{1.2 \pi \sigma^2 a}{Q\left\{\frac{a}{c}\right\}}} \quad Q\left(\frac{a}{c}\right) = \phi^2 - 0.212 \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2}$$

$\sigma_y$  = limite élastique

$\phi$  = fonction épaisseur, largeur

$a$  étant une variable aléatoire,  $K$  aussi

$$\frac{da}{dN} = \exp \left[ n \frac{\ln K_c - \ln \Delta K_0}{2} \operatorname{arc tau} h \left\{ \frac{\ln \Delta K - \frac{\ln K_c (1-R) + \ln \Delta K_0}{2}}{\frac{\ln K_c (1-R) + \ln K_0}{2}} \right\} + \ln \left\{ c \exp \left( \frac{\ln K_c + \ln K_0}{2} n \right) \right\} \right]$$

**FIABILITE MECANIQUE**

A partir de cette équation dite de Collipriest, il est possible de calculer :

$$f(a_{n+1}) = f[a_{n+1} \{a_{np}\}] \left| \frac{da_{np}}{da_{n+1}} \right|$$

$$f(a_{np}) = f[a_{np} \{a_n\}] \left| \frac{da_n}{da_{np}} \right|$$

Différents exemples sont fournis dans le document de base.

M2OS - IMdR

**EXEMPLE 7 :**  
**METHODE PROBABILISTE ET CRITERES DE CONCEPTION POUR**  
**ARBRE DE MOTEUR DIESEL**

M20S - IMdR

**EXEMPLE 8 :**  
**MODELES DE FIABILITE BELVOIR**

**METHODE VOGIN**

$\lambda$  cherché =  $\lambda$  référence x (hauteurs de comparaison)  
Application turbopompe moteur VULCAIN

$\lambda$  TP VULCAIN =  $\lambda$  TP HM 7 X K (A1K1 + AiKi + ... + A5K5)

⇒ Ki correspondent aux coefficients de comparaison du dimensionnement de deux turbopompes

⇒ Ai correspondent à l'importance de l'élément i sur la fiabilité totale

⇒ Comparaison des environnements

Dans l'application R VOGIN ajoute un élément  $\epsilon_j$  de fiabilité d'un mode de défaillance j évalué lors comparaison avec HM7.

**METHODE BELVOIR**

Les modèles proposés sont du type de ceux utilisés dans la MIL HBK217, ils consistent à calculer les  $\lambda$  individuels de chaque composant et d'en faire la somme.

Chaque  $\lambda$  est composé du  $\lambda$  de base corrigé par divers facteurs dont la grandeur est spécifique d'un mode de défaillance.

Par exemple, pour une étanchéité :

$$\lambda_{SE} = \lambda_{SE, B} \frac{QA}{QF}$$

$\lambda_{SE, B} = \lambda$  de base

QA = taux de fuite

QF = taux de fuite autorisé

**EXEMPLE 9 :**  
**DUREE DE VIE DE ROULEMENTS LUBRIFIES A LA GRAISSE**

$$\alpha\beta = \frac{1.241}{10^{\left[ \frac{2342}{T} + q - 4.32 \text{ DN} \cdot 10^{-6} + \text{Kg} - 0.001\text{N} \left( \frac{W}{\text{SP}} \right)^{1.5} \right]} + 10^{\left[ \frac{-4760}{T} + 19.7 \right]} + 300}$$

t = temps pour lequel  $\lambda$  est exigé

$\alpha\beta$  = durée de vie

q = facteur qualité (voir Table)

DN =  $\phi$  moyen x vitesse en t/mn

T = température °K

Kg = constante de graisse (voir Table)

N = vitesse

W = charge en pounds

SP = capacité dynamique en pounds à 33 1/3 RAM

D'après RADC TR77408 – Electronic Motor Reliability et AD A/63 900 RADC Non Electronic Reliability Notebook.

**EXEMPLE 10 :**  
**LES CERAMIQUES**

**Spécificités :**

- température de fusion élevée
- comportement fragile
- valeurs de  $K_{Ic}$  faibles 1 à 6  $MNm^{-3/2}$  valeur inférieure d'un ordre de grandeur à celles des métaux
- difficultés de garantie de reproduction

**Approche probabiliste :**

$$F(\sigma) = \text{Probabilité } \{ \sigma_R \leq \sigma \}$$

Théorie de Weibull

$$F(\sigma_M) = 1 - \exp \left( - VE \left( \frac{\sigma_M}{\sigma_0} \right)^m \right)$$

Défauts de volume

$$F(\sigma_M) = 1 - \exp \left( - SE \left( \frac{\sigma_M}{\sigma_0} \right)^m \right)$$

Défauts superficiels

$\sigma_M$  = valeur maximale de la contrainte appliquée

VE = volume effectif

SE = surface effective

$m\sigma_0$  = caractéristiques du matériau

m = module de Weibull variant de manière inverse à la dispersion de la résistance à la rupture

Fissuration très bien contrôlée  $m > 15$  acier ordinaire

A température ambiante  $m = \sigma_0$

$\sigma_0$  = facteur d'échelle

Fissuration lente, Vitesse  $V = AK_1^n$

A et n sont des caractéristiques du matériau



**FIABILITE MECANIQUE**

Durée de vie = temps de passer de ac à a'c tel que :

$$K_{Ic} = \sigma_a \sqrt{\pi a'c}$$

$$t = \int_{ac}^{a'c} \frac{da}{V} = \frac{2}{\pi A \sigma_a^2} \int_{K_{Ii}}^{K_{Ic}} \frac{dK_I}{K_I^{n-1}} = \frac{2}{\pi A (2 - \eta) \sigma_a^2} (K_{Ic}^{2-n} - K_{Ii}^{2-n})$$

M20S - IMdR

**EXEMPLE 11 :**  
**DIMENSIONNEMENT EN FATIGUE ET FLUAGE DES AUBES DE**  
**TURBINE**

Par D. DAMBRINE et J.P. MASCARELL  
Recherche aérospatial N° 1988-1

Prévision de la durée de vie :

- Calcul des champs de température
- Modélisation 3D et calcul
  - endommagement par fluage
  - endommagement par fatigue

Ceci nécessite de prendre en compte :

- la loi de comportement viscoplastique

Comportement du matériau :

Les lois utilisées sont :

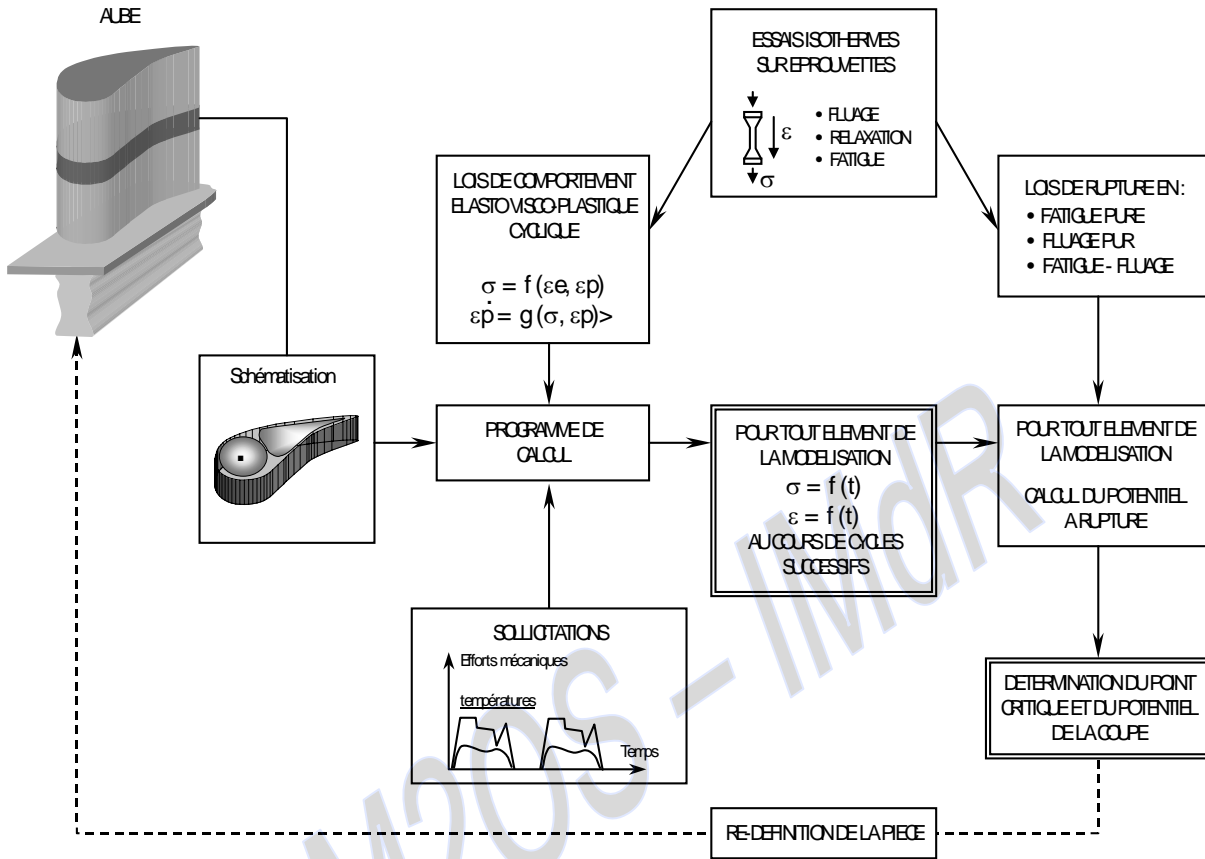
- Loi de NORTON  $\dot{\epsilon}_p = \left(\frac{\sigma}{K}\right)^n$
- Loi de LEMAITRE  $\sigma = K\epsilon_p^{1/M} \dot{\epsilon}_p^{1/N}$

Mode de calcul : Code CALIFAT développé par l'ONERA

Calcul de l'endommagement par la méthode de Kachanov et Rabotnov.

La figure ci-dessous résume la méthode de précision de durée de vie.

**FIABILITE MECANIQUE**



**EXEMPLE 12 :**  
**ANALYSE STATISTIQUE DE LA DUREE DE VIE DES**  
**GENERATEURS DE VAPEUR ET METHODE PROBABILISTE**  
**D'INSPECTION DU FAISCEAU**

Par P. PITNER  
EDF Bulletin de la DER N°4 1987

Cette étude concerne l'analyse statistique des défaillances des tubes des générateurs de vapeur.

Méthodologie utilisée : La méthodologie utilisée est classique

- Classification des tubes : les tubes sont classifiés en normal, défectueux, défaillant, suspendu
- Détermination des lois de distribution des défaillances :

Les méthodes utilisées sont :

- méthode de Johnson,
- méthode Wayne Nelson,
- méthode de Mort Soudaine.

La loi de durée de vie retenue est celle de Weibull pour les types de défaillance :

- ⇒ usure par frottement
- ⇒ fissuration
- ⇒ corps étrangers ou migrants

Le test de Kolmogorov-Smirnov est utilisé.

Contrôle proposé : Le type de contrôle est basé sur la loi de Poisson et sur des considérations sur  $\lambda(t)$

Si  $\lambda(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-y}{\eta}\right)^\beta}$  loi de distribution première défaillance par appareil Mort Soudaine.

Un premier appareil parmi les K sera affecté à T tel que :

$$\frac{1}{k} = 1 - e^{-\left(\frac{T-y}{\eta}\right)^\beta}$$

$$T = \eta \left[ \text{Log} \frac{k}{k-1} \right]^{1/\beta} + \gamma$$

Temps moyen d'apparition de la défaillance :

$$T_m = \eta \Gamma \left[ 1 + \frac{1}{\beta} \right] + \gamma$$

Une première défaillance de tube apparaît à :

$$t_1 = \eta \left[ \text{Log} \frac{N}{N-1} \right]^{1/\beta} + \gamma$$

Un des tubes défaillant durant T :

$$d = N \left[ 1 - e^{-\frac{\left[ \eta \left[ \text{Log} \frac{N}{N-1} \right]^{1/\beta} + T \right]^\beta}{\eta}} \right]$$

Temps nécessaire à la défaillance d'une fraction  $p$  de tubes :

$$T_p = \eta \left[ \text{Log} \frac{1}{1-p} \right]^{1/\beta} + \gamma$$

**EXEMPLE 13 :**  
**EVALUATION PROBABILISTE DE LA RUPTURE D'UNE CUVE DE**  
**REACTEUR (FBR)**

Par SADAO HATTORI & NORIHIKO HANDA  
Nuclear Technology, vol 79, Nov 1987

**a) L'étude consiste à évaluer les mécanismes de rupture probabiliste prenant en compte :**

- la distribution des défauts et fissures,
- le niveau d'inspection des fissures,
- le taux de croissance des fissures,
- la fréquence d'événements tels que tremblements de terre
- contraintes résiduelles,
- ténacité des soudures,
- effets de l'environnement.

**b) Méthode d'estimation de la fiabilité**

La figure ci-dessous fournit le processus méthodologique utilisé.

Les hypothèses suivantes sont utilisées :

- fissures initiales considérées avec largeur  $a$  et longueur  $b$ ,
- utilisation de la simulation Monte-Carlo,
- utilisation de la loi de Paris :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K a)^m$$

$$\frac{db}{dN} = C(\Delta K b)^m$$

$$\Delta K = K_{\max} \left( 1 - \frac{K_{\min}}{K_{\max}} \right)^m$$

Lorsque les dimensions initiales sont spécifiées  $a_0$  et  $b_0$ , les dimensions à  $(N+1)$  sont :

$$a^{N+1} = a^N + c(\Delta K a^N)^m$$

$$b^{N+1} = b^N + c(\Delta K b^N)^m$$

Bien que  $a_0$  et  $b_0$  soient des variables aléatoires, dans la pratique ces valeurs sont normalisées :

$$\alpha = \frac{a_0}{t} \quad (t = \text{épaisseur})$$

$$\gamma = \frac{a_0}{b_0}$$

La méthode Monte-Carlo permet d'évaluer l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\alpha, \gamma) P(dw) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) F(dx) F\gamma(dy)$$

approximée par  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\alpha_n, \lambda_n)$

où  $\alpha_n$  et  $\gamma_n$  sont les séquences aléatoires qui suivent.

$F\alpha$  et  $F\gamma$  distributions de  $\alpha$  et  $\gamma$ . La probabilité de rupture à  $t$  peut être obtenue en assignant des valeurs spécifiques de  $f$  telles que :

$$f_t(\alpha, \gamma) = \begin{cases} 0 & \text{défaillance n'existe pas à } t \text{ avec } \alpha \text{ et } \gamma \\ 1 & \text{défaillance existe à } t \text{ avec } \alpha \text{ et } \gamma \end{cases}$$

Le calcul direct de cette équation étant inefficace, une méthode de découpage de l'espace est utilisée et consiste à diviser en cellule un carré unité et de déterminer la probabilité de défaillance dans chaque cellule :

$$P_i = \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f_t(\alpha_n, \gamma_n) \quad P = \sum_{n=1}^N q_i P_i$$

où  $q_i$  = proba initiale de fissure dans la  $i$ ème cellule.

En complément, la formule de Rajuet Newman est utilisée et permet de calculer le facteur d'intensité de contrainte  $K$ , soit :

$$K = (\sigma_m + H\sigma_b) \cdot F \cdot (\pi a / Q)^{1/2}$$

$\sigma_m, \sigma_b$  = contrainte de membrane et contrainte de flexion

$F, Q$  = facteurs de corrélation relatifs aux dimensions de fissures

$H$  = facteur de correction pour la contrainte de flexion

**FIABILITE MECANIQUE**

Le jugement de défaillance est basé sur la propagation. Le matériau utilisé étant de résistance moyenne et la structure calculée étant plate, 2 sortes d'estimation de J peuvent être appliquées :

⇒ Condition de fuite

$$J^{\text{largeur}} > J_{1C} T^{\text{largeur}} > T_{\text{mat}}$$

⇒ Condition de rupture

$$T^{\text{largeur}} > T_{\text{mat}} J^{\text{surface}} > J_{1C} T^{\text{surface}} > T_{\text{mat}}$$

T résistance à la déchirure.

Ces différentes conditions étant applicables avec précaution.

J étant estimé par :

$$J = \alpha \sigma_0 \varepsilon_0 \text{ch}(a/t, n) (\sigma/\sigma_0)^{n+1}$$

où  $\alpha, n =$  loi de Ramberg-Osgood

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n$$

$\varepsilon_0 \sigma_0 =$  contrainte, déformations lentes

$\sigma =$  contrainte

$a, t, c =$  fissure longueur

Les distributions de défauts initiaux ont été prises selon :

- la loi exponentielle,
- la loi de Weibull,
- la loi Log Normale.

A partir de ces différentes hypothèses, différentes simulations ont été effectuées ayant amenées à des conclusions sur :

- la politique d'inspection,
- les sensibilités des différents facteurs,
- l'effet des contraintes résiduelles.



**EXEMPLE 14 :**  
**CONTROLE DES RESERVOIRS SOUS PRESSION**

## 1. INTRODUCTION

Cette note présente une synthèse de la traduction du document NASA SP 8040.

"Fracture control of metallic presure vessels" référencée S/DEA-1 n'1237.

## 2. OBJECTIFS

L'application de la mécanique "linéaire" de la rupture à la conception et au dimensionnement des réservoirs métalliques sous pression doit permettre :

- ⇒ de prédire les tailles critiques de crique et les modes de rupture ;
- ⇒ d'estimer une durée de vie minimum ;
- ⇒ d'établir les facteurs d'essai de timbrage et les procédures de timbrage ;
- ⇒ de fournir une base pour l'établissement de limites d'acceptation de criques pour le contrôle non destructif ;
- ⇒ de comparer les matériaux ;
- ⇒ d'aider au développement des alliages ;
- ⇒ d'exécuter l'analyse des ruptures ;
- ⇒ de fournir un schéma permettant de comprendre les relations entre les différents facteurs affectant l'efficacité et la masse des réservoirs métalliques sous pression.

## 3. LIMITES DE LA THEORIE DE LA M.L.R.

- ⇒ La première limite de la M.L.R. est que pour les niveaux de contrainte supérieurs à la limite d'élasticité, la rupture ne peut-être décrite par le paramètre critique d'intensité de contrainte KIC, et la croissance des criques subcritiques ne peut-être décrite comme une fonction du facteur d'intensité de contrainte en bout de crique K1.
- ⇒ Une autre limitation est la faible quantité des données sur la résistance à la rupture et la croissance des criques subcritiques.
- ⇒ Une limitation moins importante de la M.R. est que la détermination des relations fonctionnelles entre la taille des criques et le niveau des contraintes pour différentes formes de criques et différentes conditions aux limites sur les contraintes est encore en phase de développement.

#### 4. TAILLE CRITIQUE DES CRIQUES

La taille de crique nécessaire pour produire une fracture à un niveau de contrainte donné est appelée taille critique.

##### 4.1. Différents modes de rupture suivant la taille de la crique initiale

- Si le réservoir contient une crique initiale qui excède la taille critique pour un niveau de contrainte égal à celui provoqué par le timbrage, on doit s'attendre à une rupture catastrophique.
- Dans le cas où la crique se développe jusqu'à occuper toute l'épaisseur de la paroi du réservoir avant d'atteindre la taille critique, il y aura fuite.

##### 4.2. Relations entre la taille critique AC et le facteur d'intensité de contrainte en de formation plane ou ténacité à rupture K dans un champs de contrainte élastique

###### 4.2.1. Réservoirs à parois épaisses

$$\left(\frac{a}{q}\right)_{cr} = \frac{1}{1,21 \times \pi} \left(\frac{k_{IC}}{\tau}\right)^2$$

Q : paramètre de forme. Il existe une relation entre Q et le rapport (a/2c) où a est la profondeur et 2c la longueur de la fissure.

###### 4.2.2. Réservoirs à parois minces

- Pour des criques de profondeurs  $\leq 50\%$  de l'épaisseur de la paroi : la relation reliant  $a_{CR}$  à  $K_{IC}$  est identique à celle obtenue pour les parois épaisses.
- Pour des criques plus profondes : l'intensité de contrainte peut atteindre la valeur critique ( $K_{IC}$ ) pour une taille sensiblement plus petite que celle qui serait prédite par l'équation précédente :

$$\left(\frac{a}{Q}\right)_{cr} = \frac{1}{1,21 \times \pi} \left(\frac{k_{IC}}{M_K \times \tau}\right)^2$$

Une relation a été établie par Kobayashi entre  $M_K$  et l'acuité (a/c).

## 5. ESSAI DE TIMBRAGE POUR ESTIMER LA DUREE DE VIE MINIMUM DU RESERVOIR

Un essai à une pression égale à  $a$  fois la pression d'utilisation indique que la valeur maximum possible du rapport ( $K_{li} / K_{IC}$ ) à la pression maximum d'utilisation est égale à  $1/a$  et que cette valeur peut-être utilisée avec des données sur la croissance des criques subcritiques pour estimer la durée de vie minimum du réservoir.

### 5.1. Effets des différents facteurs sur l'essai

Les facteurs les plus significatifs sont :

- le niveau de contrainte appliqué,
- l'épaisseur de la paroi,
- la température,
- le fluide d'essai,
- la durée de l'envi et les vitesses de pressurisation et dépressurisation,
- les timbrages multiples,
- la nécessité d'un contrôle après timbrage,
- la nécessité d'essai de timbrage sous charges combinées.

Leurs effets sont analysés dans le document NASA.

## 6. CROISSANCE SUBCRITIQUE DES CRIQUES

La croissance subcritique des criques peut se produire comme résultat d'un chargement cyclique, permanent et de la combinaison des deux chargements.

- ⇒ Pour un environnement donné et un profil de charge cyclique, la durée ou les cycles à rupture dépendent principalement de la grandeur de l'intensité de contrainte initiale  $K_i$ .
- ⇒ Pour un environnement donné et sous une contrainte permanente, il a été observé que pour un matériau donné, l'existence d'un seuil d'intensité de contrainte  $K_{TH}$  en dessous duquel il n'y avait pas de croissance.

C'est le facteur d'intensité de contrainte et non la contrainte rapportée à la section nette qui est le paramètre qui contrôle la croissance des criques sous contrainte permanente.

## 7. PRINCIPAUX CRITERES DE DIMENSIONNEMENT

- ⇒ Minimiser la probabilité de rupture pendant les essais de timbrage.
- ⇒ Prise en compte des pressions, températures, environnement et contraintes provenant de sources autres que la pression interne.
- ⇒ Propriétés et caractéristiques des matériaux doivent être obtenues de sources sûres.
- ⇒ Tailles critiques pour les niveaux de contraintes considérées doivent être déterminées par analyse ou essais.

- ⇒ S'assurer que  $\frac{K_{li}}{K_{IC}} < 1$ .

⇒ Timbrage du réservoir.

⇒ Prise en compte des différences entre les températures de timbrage et en service et du temps nécessaire pour pressuriser de dépressuriser.

## 8. PRATIQUE RECOMMANDEE

Pour obtenir une bonne sécurité en service, il serait préférable d'utiliser des facteurs de timbrage élevés, des niveaux de contrainte ou utilisation basse et des matériaux avant taux de croissance de crique faibles et des valeurs élevées de K seuil dans l'environnement prévu en service.

### Conditions de dimensionnement :

⇒ Considérer l'historique complet des pressions, temps, température prévus et les environnements auxquels sera soumis le réservoir.

⇒ Inclure les vitesses de pressurisation, de dépressurisation, les durées de maintien.

⇒ Eviter le dépassement généralisé de la limite d'élasticité pendant les essais sous pression en évaluant un facteur de sécurité minimum.

$$(FS)_{M-L-R} = \frac{K_{IC}}{K_{Ii}} \times \frac{R_m}{R_e}$$

⇒ Evaluer :

- la ténacité en déformation plane ( $K_{IC}$ ) pour le métal de base, les soudures et les zones thermiquement affectées ;
- la valeur du seuil d'intensité de contrainte si  $K_{TH} < 0.7 K_{IC}$  envisager l'utilisation d'un autre matériau ;
- les données de croissance de criques sous contraintes cycliques ( $K_{Ii}/K_{IC} = f(N)$  ou  $d(a/Q) = f(K)$ ).

⇒ Un temps maximum de maintien de 15 secondes de la pression de timbrage est considéré comme raisonnable.

⇒ Timbrer à un niveau de contrainte égal ou plus grand que  $\alpha \times$  contrainte max en service ( $\alpha = K_{IC}/K_{Ii}$  admissible).

⇒ Minimiser le temps nécessaire pour dépressuriser à partir de la pression de timbrage jusqu'à la pression

$$\frac{K_{seuil}}{K_{IC}} \times \text{pression de timbrage.}$$

**EXEMPLE 15 :**  
METHODOLOGIE MISE AU POINT PAR ESA PAR  
L'AEROSPATIALE/CANNES

M2OS - IMdR

**EXEMPLE 16 :**  
**DETERMINATION DE LA PROBABILITE DE RUPTURE D'UNE**  
**CAISSE DE METRO**

M2OS - IMdR

**EXEMPLE 17 :**  
**DEFINITION DES OBJECTIFS DE SECURITE POUR UN METRO**  
**MODERNE**

M2OS - IMdR

**EXEMPLE 18 :**  
**LA METHODOLOGIE MSG3**

M2OS - IMdR

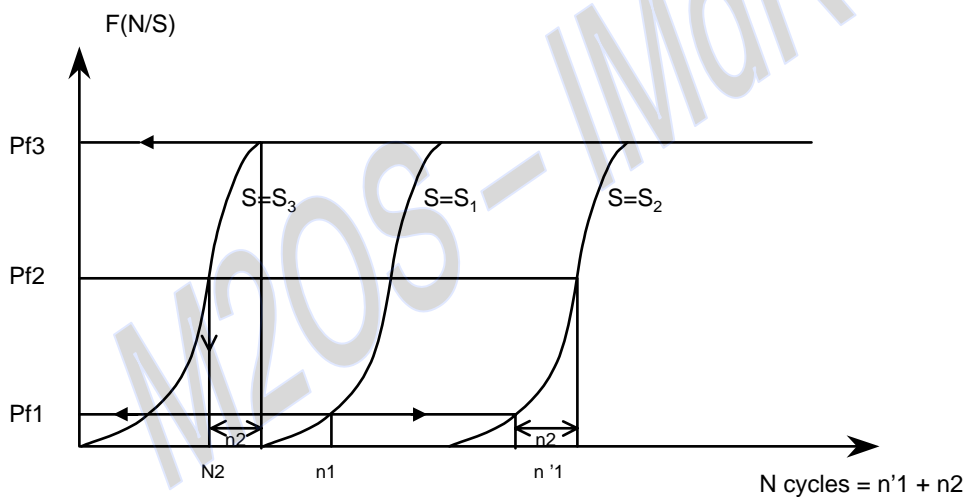


**EXEMPLE 19 :**  
**APPROCHE PROBABILISTE DU CALCUL A LA FATIGUE D'UN**  
**NŒUD DE STRUCTURE OFFSHORE**

Après des rappels concernant :

- les courbes SN,
- le dommage et la règle de MINER et ses limitations.

Une approche probabiliste de traitement de résultats de rupture obtenue en exploitation consistant à exploiter l'aspect probabiliste de la courbe de Wohler.



Cette lecture a été appliquée à un cas réel à partir d'une modélisation de la houle selon une loi de Weibull et une de Rayleigh, elle a permis de calculer une probabilité de ruine de la structure.

**EXEMPLE 20 :**  
CALCUL SOUS SOLLICITATIONS COMPLEXE  
MODELE DE DANG VAN

M20S - IMdR

**EXEMPLE 21 :**  
**FIABILITE DES STRUCTURES MARINES**  
**SOUS CHARGEMENT EXTREME**

H. CROHAS, A.TAI, V.HACHEMI-SEFAI, B. BARNOUIN

- a) La fonction première d'une plate-forme offshore est de supporter les charges installées sur les ponts. De là, la performance de l'ouvrage s'exprime d'abord en termes de sécurité de ce support par rapport à un état limite ultime amenant à une situation de ruine catastrophique.

La fiabilité globale de la structure passera par différents stades d'endommagement pour lesquels sera estimé la probabilité de ruine de chaque élément. Cette évaluation tient compte des variances et corrélations entre forces et paramètres de résistance de chaque élément.

- b) Probabilité de ruine d'un élément

Pour un élément la ruine peut se produire selon les différents états limites en fonction des sollicitations appliquées et des caractéristiques de l'élément. Trois états limites sont considérés :

- plastification d'une section
- flambement de la barre
- poinçonnement d'une membrure

Chaque état limite est évalué suivant un critère de ruine auquel est associée une fonction d'état limite, généralement non linéaire, définissant la marge de sécurité de l'élément :

$$Z = f(R,S)$$

R = paramètres définissant la résistance

S = forces internes agissant aux extrémités de l'élément

$Z < 0$  et  $Z > 0$  définissent les domaines de ruine et d'intégrité de l'élément pour l'état limite considéré. Les variables aléatoires définissant la charge sur chaque élément sont  $\underline{d}$  écrites par leur moyenne, leur variance et leurs coefficients de corrélation. Toutes les lois de distribution sont ramenées à des lois normales ou log-normales, ceci étant les marges de sécurité peuvent s'écrire sous la forme générale d'une fonction d'état limite :

$$Z = f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n)$$

$X_i$  = variables aléatoires précédemment définies.

$$P_R(Z < 0) = \int_D g(X_1, \dots, X_n) dX_1 \dots dX_n$$

La procédure FOSM (First Order Second Moment) est utilisée, elle consiste à linéariser la fonction d'état limite par un développement au premier ordre au voisinage d'un point appelé point de dimensionnement , puis à définir un indice de sécurité  $\beta$ .

Un algorithme de Murotsu est utilisé pour déterminer la borne supérieure et inférieure de la probabilité de ruine.

M2OS - IMdR

**EXEMPLE 22 :**  
**MECHANICAL DURABILITY PREDICTION METHODS**

R.G. LAMBERT  
Proceeding 1989, R&M Symposium

FFOP = Failure Free Operating Period

= Minimum applied stress cycles to first failure

BUT : Développer des expressions analytiques pour la conception à partir des caractéristiques de fatigue, soit pour FFOP = N1min nombre de cycles pour la première défaillance.

**Expression des lois :**

En utilisant la loi de Miner :

$$Nm = \left( \frac{\bar{c}}{\bar{\sigma}} \right)^\beta \quad (1)$$

$\bar{\sigma}$  = moyenne des valeurs rms de contraintes

$\bar{c}$  = contrainte du matériau

Nm = Nbre de cycles médian à la rupture

$\beta$  = Coefficient de la loi de Basquin

$$\bar{c} = \left[ \frac{2^{-1/\beta} \sigma_f'}{\sqrt{2}} \right] \left[ \Gamma \left( \frac{\beta + 2}{2} \right) \right]^{-1/\beta}$$

$\Gamma(\cdot)$  = fonction gamma

$\sigma_f'$  = le coefficient de résistance en fatigue du matériau

En utilisant ces différentes variabilités dans l'équation (1), on peut écrire :

$$\psi = \sqrt{\Delta^2 + (2 Nm)^{2/\beta} \delta^2 - \frac{(2 Nm)^{1/\beta} \Delta \delta}{\sqrt{2\beta - \pi/\beta}}}$$

$\Delta$  = écart type résistance en fatigue

$\delta$  = écart type sur contrainte appliquée

### Probabilité de défaillance

$$F_{NF}(N) = 0.5 + \operatorname{erf} \left[ \frac{\bar{c}}{\psi} \left\{ \left( \frac{N}{Nm} \right)^{1/\beta} - 1 \right\} \right] \quad (2)$$

$$\operatorname{erf}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\alpha e^{-y^2} dy$$

$$\operatorname{erf}(-\alpha) = -\operatorname{erf}(\alpha)$$

$$P_{NF}(N) = \frac{\bar{c}}{\beta \psi \sqrt{2\pi} N \left( \frac{N}{Nm} \right)^{1/\beta}} \cdot \exp \left[ - \frac{\bar{c}^2 \left\{ \left( \frac{N}{Nm} \right)^{1/\beta} - 1 \right\}^2}{2\psi^2} \right] \quad (3)$$

N = Nbre de cycles de contraintes appliquées

N = fnT    fn = fréquence de résonance

T = durée

### Fatigue à petit Nbre de cycles

$$Nm = \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon'f}{\Delta\varepsilon p/2} \right)^\beta \quad (4)$$

$\varepsilon'f$  = coefficient de ductilité en fatigue

$\frac{\Delta\varepsilon p}{2}$  = déformation plastique

### Iso-courbes en fatigue

L'équation (4) peut être modifiée :

$$Nm = \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{\varepsilon}\mu}{\bar{\varepsilon}} \right)^\beta$$

$\bar{\varepsilon}\mu$  = valeur moyenne de ductilité

$\bar{\varepsilon}$  = valeur moyenne de déformation plastique

Par analyse l'équation A s'écrit :

$$\psi = \sqrt{\Delta^2 + 2 Nm \delta^2 - 0.907 \sqrt{Nm} \Delta \delta}$$

Différents exemples sont fournis :

- pour des circuits intégrés

**EXEMPLE 23 :**  
**PROBABILITE DE DEFAILLANCE D'UN RESERVOIR**

Cao Tranjie – An approximate Method to Assess the failure probability of a spherical tank.  
Reliability engineering and System safety 24 (1989) 1-9

En utilisant la notion de COD (Crack Opening Displacement)  $\delta_c$ , la défaillance étant  $\delta > \delta_c$  :

$$\delta = 3.5 ce$$

a = surface efficace de la fissure

e = déformation =  $K_t \cdot \sigma_m$

$K_t$  = coefficient de concentration de contraintes

$\sigma_m$  = contrainte de membrane

E = module de Young

$$K_t = q \cdot K_h \cdot K_w \quad q = 1.5 \text{ ou } 10 \text{ prenant en compte la soudure}$$

En utilisant la loi de Paris  $\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m$

$$a = a_0 / \left[ 1 - \left( \frac{m}{2} - 1 \right) C K_t^m \Delta \sigma^m \pi^{m/2} N a_0^{(m-2)/2} \right]^{2/(m-2)}$$

$a_0$  = division initiale de la fissure

$c_1 m$  = constantes loi de Paris

N = Nombre de sollicitations

Si  $a_0$ , C,  $K_h$ ,  $K_w$ ,  $\Delta \sigma$ ,  $\sigma_m$ ,  $\delta$  sont considérés comme variables aléatoires, la probabilité de défaillance  $P_f = P[\delta > \delta_c]$ .

Deux méthodes sont proposées :

- une méthode analytique,
- la simulation de Monte-Carlo.

**EXEMPLE 24 :**  
**ANALYSE PROBABILISTE DE STRUCTURE AVION**

M20S - IMdR



**EXEMPLE 25 :**  
**NORMES ESA PSS 1-1-401 – CONTROLE DES DEFAILLANCES**

**Exigence sur le contrôle des défaillances mécaniques**

Cette norme est établie par l'ESA qui définit les PFCI = Potential Fracture Critical Item

Définition de :

- safe lifes
- fail safe

Analyse des mécanismes de défaillance

Exigences spécifiques pour les matériels sous pression

Utilisation des contrôles non destructifs

M2OS – IMdR

**EXEMPLE 26 :**  
**MODELES ETAT DE LA MER**

M20S - IMdR

**EXEMPLE 27 :**  
**FIABILITE DE MOTEURS A PROPULSION SOLIDE**  
**A COUT MINIMUM**

La méthode proposée SAFER (Statistical Approach For Engineering Reliability) utilise la théorie de contrainte résistance avec un nombre d'éprouvettes d'essais testées.

Le nombre équivalent d'éprouvettes contrainte résistance est calculée en utilisant l'approximation de Satterthwaite.

$$N_{eq} = \frac{(S_c^2 + S_p^2)^2}{\frac{(S_c^2)^2}{n_c - 1} + \frac{(S_p^2)^2}{n_p - 1}} + 1$$

c = capabilité

p = performance

Le facteur K et le nombre équivalent de points sont utilisés pour déterminer une valeur inférieure de fiabilité à un niveau de confiance donné.

Un exemple est fourni :

$$\bar{p} = 191.3 \text{ Ksi} \quad \sigma = 12.46 \text{ Ksi}$$

$$\bar{c} = 303.8 \text{ Ksi} \quad \sigma = 13.08 \text{ Ksi}$$

$$K = 6.23$$

17 tests permettent de vérifier l'allocation de  $0.9^{588}$ .

**EXEMPLE 28 :**  
**METHODE SAGIRISK**

Méthode de mise en évidence des fonctions critiques d'un système.

Au terme d'une phase d'analyse et en utilisant les connaissances d'un groupe de travail, elle va consister à déterminer les estimations de probabilité et de gravité pour chaque sous fonction et les comparer en calculant la criticité de la fonction  $C = F - G$ .

Si  $C = F - G < 0$ , la fonction est alors critique.

F et G sont déterminés quantitativement chacune à l'aide de quatre facteurs.

Cette méthode est très proche de la HI FMECA.

M2OS - IMdR

**EXEMPLE 29 :**  
**APPLICATION DU CONCEPT – FUITE AVANT EXPLOSION**

## 1. DEFINITION

Fuite avant explosion ou rupture est un mécanisme de défaillance conceptuel basé sur l'idée que la défaillance d'un réservoir sous pression sera signalée par une fuite détectable et pourra donc être contrôlée et permettra de prendre des actions avant l'explosion ou la rupture. Le concept a une importance évidente dans le cas des aspects sécurité.

## 2. HYPOTHESES THEORIQUES

Pour un défaut de forme elliptique dans un réservoir sous pression, nous pouvons exprimer K facteur d'intensité de contrainte sous la forme :

$$K = 1.1 \sigma \sqrt{\pi a / Q}$$

où Q est un facteur qui dépend des dimensions et de la plasticité en pointe de défaut

$$Q = \phi^2 - 0.212(\sigma/Rp)^2$$

Pour ce type de défaut, la défaillance apparaît si :

$$K = K_{Ic}$$

On peut donc écrire :

$$\sigma^e \max = K_{Ic} \sqrt{\phi^2 - 0.212 \cdot (\sigma/Rp)^2} / 1.1 \sqrt{\pi a_0}$$

Le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour un défaut  $a > t$  est :

$$K = \sigma \sqrt{\pi_0} (C_0 + Rp)$$

où  $r_p = k^2 / 2\pi \cdot Rp^2$

$$\sigma^D \max = K_C \sqrt{1 - 0.5(\sigma/Rp)^2} / \sqrt{\pi C_0}$$

Le critère fuite avant explosion est satisfait si le niveau de contrainte est plus élevé. Dans ce cas après pénétration de la surface de rupture dans le ligament. Il est nécessaire d'avoir une plus haute contrainte pour une extension de la rupture.

$$\sigma^D \max > \sigma^e \max$$

$$\frac{K_c}{K_{Ic}} > \sqrt{\frac{\phi^2 - 0.212 (G/Rp)^2 \cdot C_0}{1.2 - 1.6 (\sigma/Rp)^2 a_0}}$$

L'interprétation graphique de cette expression est fournie par la figure 1 sur laquelle on constate que pour une fissure de dimension  $a = c$  au niveau de contrainte de la limite élastique le rapport  $K_c/K_{Ic}$  doit être supérieur à 2.

La figure 2 fournit le même type de renseignement.

M20S - IMdR

**EXEMPLE 30 :**  
**UTILISATION DE CRITERES DE PONDERATION EN FIABILITE**

Utilisation des tâches de la MIL STD 785.

Utilisation d'un tableau contenant :

- liste des tâches de la 785
- 1 colonne avec poids coût/efficacité (1 à 5)
- autres colonnes avec système de notation par critère d'évaluation (1 à 5)
  - complexité
  - criticité de l'équipement
  - quantité
  - environnement
  - technologie
  - exigences de stockage.

Ce tableau constitue la base de notation.

Pour un équipement, on dresse le même tableau en utilisant le système de notation.

Il est indispensable d'utiliser une colonne supplémentaire permettant de classer de 0 à 10 l'importance de chaque sujet traité.

**EXEMPLE 31 :**  
**MODELES DE DECHIRURE DUCTILE PLAQUES MINCES**

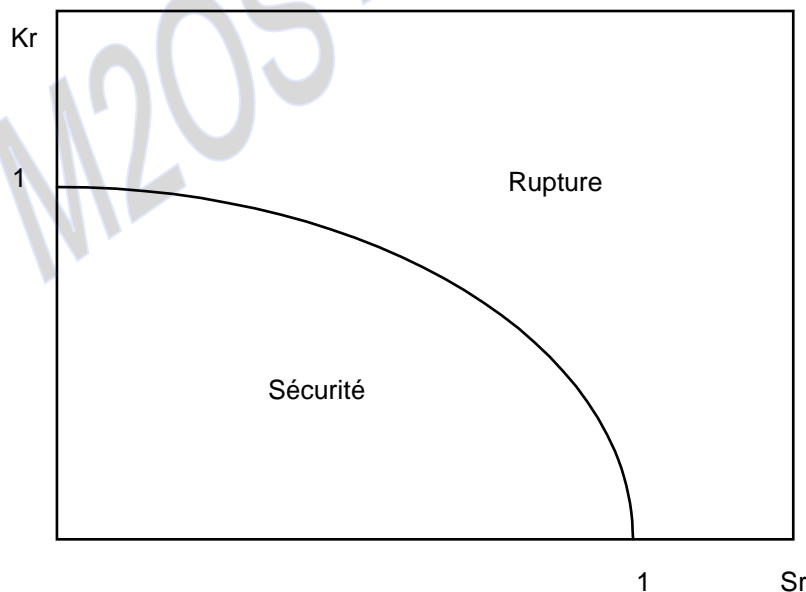
La méthodologie d'évaluation de la rupture dans une plaque mince prend en compte deux modes de rupture.

- La rupture fragile pour laquelle MLR se justifie pleinement.
- L'effondrement plastique défini par une contrainte limite  $\sigma_0$  qui peut être égale à  $\sigma_y$  ou  $\sigma_f$  contrainte d'écoulement calculée à partir de  $\sigma_y$  et  $\sigma_u$ .

On applique la solution du DUGDALE (plastification en fond de fissure) au cas d'une fissure évoluant en contraintes planes.

Les coordonnées employées dans ce type de diagramme sont :

$$K_r = \frac{K_I(a, \sigma)}{K_{Ic}} \quad S_r = \frac{\sigma}{\sigma_0}$$



Différents types de représentations sont proposées dans la littérature.

La règle R6 :

Elle utilise une contrainte d'écoulement calculée selon  $\sigma_f = \frac{\sigma_u + \sigma_y}{2}$

$$S_r = \frac{\sigma}{\sigma_0}$$



**FIABILITE MECANIQUE**

$$K_r = S_r \cdot \left[ \frac{8}{\pi^2} \ln \left( \frac{1}{\cos(\pi/2 S_r)} \right) \right]^{-1/2} \quad (1)$$

Cette règle peut également être exprimée en terme de  $\sigma_y$ , soit  $S_r = \frac{\sigma_y}{\sigma_f} L_r$   $L_r = \frac{\sigma}{\sigma_y}$ .

Développée initialement pour des matériaux ferritiques pour lesquels le rapport  $\sigma_u/\sigma_y$  est peu supérieur à 1.

**Diagramme de MILNE**

MILNE a montré que l'utilisation de la contrainte d'écoulement  $\sigma_f$  n'était pas adaptée pour les matériaux fortement écrouissables pour lesquels :

$$\sigma_u = 2 \text{ ou } 3 \text{ fois } \sigma_y, \text{ il utilise } L_r = \frac{\sigma}{\sigma_y} + (1 - K_r) \left( \frac{\sigma_u}{\sigma_y} - 1 \right) \frac{\sigma}{\sigma_y} \text{ variant de } 0 \text{ à } 1.$$

$L_r$  varie de 0 à  $\frac{\sigma_u}{\sigma_y}$  et  $K_r$  est calculé comme dans (1)

**Diagramme d'AINSWORTH**

AINSWORTH suggère de tracer le profil en utilisant la courbe de traction rationnelle du matériau au moyen de :

$$K_r = \left[ E \frac{\epsilon_r}{\sigma_r} + \frac{\sigma_r}{2E\epsilon_r} L_r^2 \right]^{1/2} \quad L_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_y}$$

$\epsilon_r$  et  $\sigma_r$  déformation vraie et contrainte vraie.

En résumé, si le matériau est peu écrouissable, on peut se contenter du profil R6.

Dans le cas où il existe un écart important entre  $\sigma_y$  et  $\sigma_u$  comme dans les cordons de soudure, on utilise la relation d'AINSWORTH.

**EXEMPLE 32 :**  
**APPROCHE PHYSIQUE DE LA MODELISATION DES**  
**DEFAILLANCES DU POINT DE VUE FIABILITE**

**Constatations :**

⇒ Défaillances non électriques :

10% 1,7% ULSI

17% digital et composants d'interface

69% des défaillances non électriques arrivent dans le package

17,5% dans le partage

13,5% dans les interconnexions

⇒ Méthode déterministe

Fonctionnement de dommage

- amorçage
- propagation

⇒ Méthode stochastique

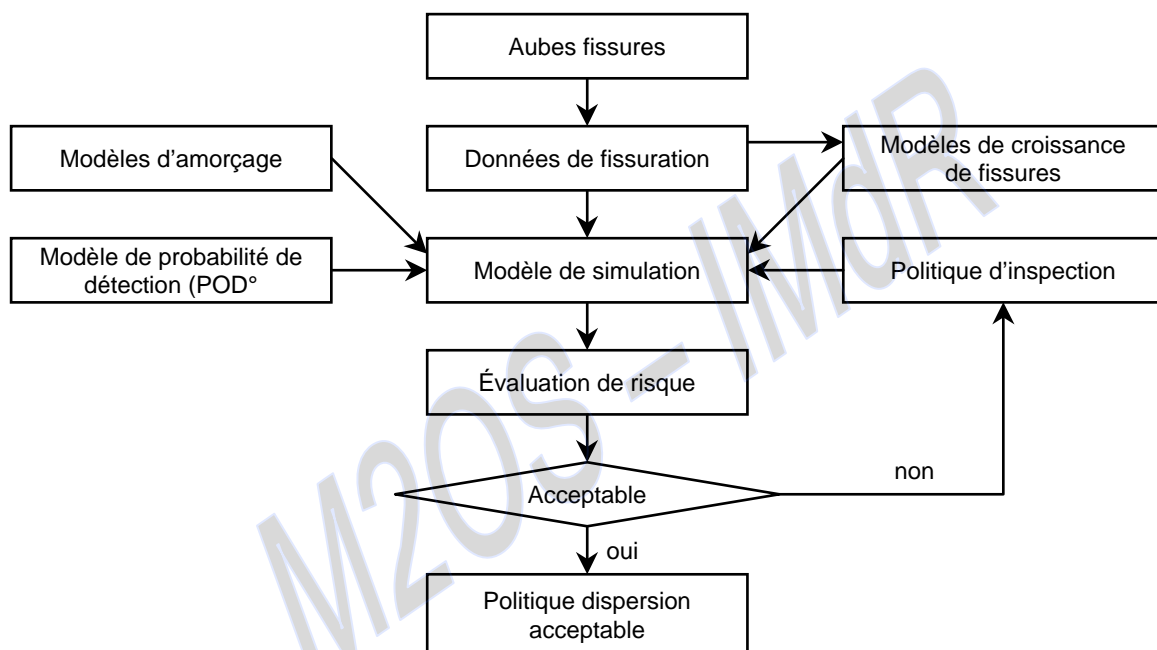
Courbe de Wohler aléatoire

**EXEMPLE 33 :**  
CARTES DE DEFORMATION D'ASHBY ET MODES DE  
DEFAILLANCES

M2OS - IMdR

**EXEMPLE 34 :**  
**UN MODELE DE SIMULATION DE RISQUE POUR ROUE DE TURBINE**

Une modélisation par EF est effectuée avec une analyse des tailles de défauts critiques.



La modélisation des effets est effectuée selon diagramme ci-dessous :

Le modèle de croissance proposé a la forme suivante :

$$L(t) = a \cdot i \cdot \ln(b \cdot t + 1)$$

$L(t)$  = longueur au temps  $i$

$a$  et  $b$  = paramètres de croissance

Probabilité du modèle de détection

$$POD = (a \cdot x \cdot L^b) / (1 + a \cdot L^b)$$

POD = Probabilité Of Detection

$$POD = (808,8 \cdot L^{1.1159}) / (1 + 8088 \cdot L^{1.1159})$$

Un logiciel de simulation a été développé.

## **EXEMPLE 35 :**

### **EFFET DE VARIABLES DE CONCEPTION, TEMPERATURE, VITESSE SUR LA VIE ET LA FIABILITE D'UN DISQUE ROTATIF**

Par E.V. ZARETSKY  
T.E. SMITH – R. AUGUST

#### **1. BUT**

Développer une méthodologie générale pour prédire la durée de vie et la fiabilité de disques rotatifs tels que ceux utilisés par les turbines et compresseurs.

#### **2. METHODOLOGIE**

Après un rappel sur la théorie des défaillances en particulier :

- la théorie du lien le plus faible

$$\text{Ln} \frac{1}{S} \approx \sigma^c L^e V$$

S = probabilité de survie

L = durée de vie

e = exposant de Weibull

$\sigma$  = contrainte

c = coefficient caractéristique

V = volume contrainte

- la durée de vie d'un matériau

$$L = A \sigma^{-c}$$

A = constante du matériau

- la loi de combinaisons des volumes

$$S_b = S_a^{V_b/V_a}$$

### 3. LES EFFETS

- Effet du diamètre

$$L_{10} = \left( \frac{K_D}{D} \right)^{20}$$

D = diamètre du disque

$K_D$  = constante

$L_{10}$  = durée de vie à 90% de survie

- Effet de l'épaisseur

$$L_{10} = \frac{Kt}{t}$$

$Kt$  = constante

t = épaisseur

- Effet de la vitesse

$$L_{10} = \left( \frac{K_N}{N} \right)^{14.3}$$

N = vitesse du disque

$K_N$  = 9000 tours/mn

- Effet de la contrainte

$$L_{10} = \left( \frac{9}{C} \right)^{0.606}$$

C = caractéristique du matériau

$$L_{10} = \exp(K_L \tau_L)$$

$\tau_L$  = limite d'endurance en torsion

$K_L$  = constante

- Effet de la température

$$L_{10} = \left( \frac{K_T}{\Delta T} \right)^{0.52}$$

$\Delta T$  = gradient de température

$K_T$  = constante

#### 4. DUREE DE VIE DU DISQUE

$$L_{10} = \left[ \left( \frac{K_D}{D} \right)^{20} \left( \frac{K_t}{T} \right) \left( \frac{K_N}{T} \right)^{14.3} \left( \frac{9}{c} \right)^{0.606} \left( \frac{KT}{\Delta T} \right)^{0.52} \right] \exp(K_L \tau_L)$$

#### 5. EFFET DES PERCAGES PAR BOULONS

L'influence du :

- diamètre du trou
- nombre de boulons
- position des boulons est étudiée

M20S - IMdR

**EXEMPLE 36 :**  
**REGLES DESIGN**

- ⇒ Concevoir le plus simple possible
- ⇒ Ne pas oublier les erreurs humaines
- ⇒ Utiliser des composants, éléments communs
- ⇒ Effectuer des tests sur nouvelles conceptions
- ⇒ Effectuer des analyses de données revues de l'exploitation
- ⇒ Faire attention aux données revues de l'exploitation lorsqu'elles résultent de modifications et améliorations
- ⇒ Dans le cas de paramètres critiques, considérer l'utilisation des marges de sécurité de 3 à 6 écart type
- ⇒ Ne pas oublier le diagnostic sur les éléments critiques
- ⇒ Inclure des facilités pour inspection dans la conception
- ⇒ Introduire des redondances lorsque nécessaire
- ⇒ Apporter une attention particulière à la maintenance
- ⇒ Prendre en compte les aspects transport, stockage
- ⇒ Utiliser des composants standards autant que possible
- ⇒ Porter une attention particulière aux aspects fabrication



**EXEMPLE 37 :**

**ETUDE FIABILISTE EN FATIGUE D'UN NŒUD TUBULAIRE DE  
STRUCTURE OFFSHORE AVEC CRITERE DE RUINE VARIABLE  
DANS LE TEMPS**

V. SAUBESTRE - MME Janvier 1993

Pour une plate-forme offshore constituée essentiellement d'éléments tubulaires, on associera une probabilité de ruine par fatigue à un nœud en estimant le nombre de cycles et les amplitudes de sollicitations auxquels ce nœud est soumis. On interpolera ensuite à partir de courbes expérimentales pour déterminer le dommage cumulé.

**Modélisation :**

- ⇒ Par la modélisation de la rupture : Le critère de ruine retenu est unique et estimé à la propagation due à la fatigue d'une fissure supposée suivre une loi de PARIS  $\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m$  pour laquelle les différents paramètres sont assortis de leur dispersion.
- ⇒ Par la modélisation de la structure : Effectuée en utilisant le logiciel NASTRAN de calcul par EF et en appliquant des spectres de houles du type MORISON et PIERSON-MOSCOWITZ.
- ⇒ Calcul de probabilités de ruine : Effectuée par une méthode du type FORM-SORM adaptée au temps.
- ⇒ Etude complémentaire : Cette étude a débouché sur un programme d'inspection.

**EXEMPLE 38 :**  
**UTILISATION DES METHODES FIABILISTES POUR L'EVALUATION  
DES REGLEMENTS**

JP. MUZEAU – MME Septembre 1992

Les règlements de calcul modernes en particulier les EUROCODE sont basés sur des méthodes semi probabilistes. Un processus de simulation de Monte Carlo est utilisé et appliqué au bâtiment et à l'offshore.

La méthodologie utilisée comprend :

- Choix d'un élément structural
- Choix nominal des variables à étudier - géométrie et caractéristiques mécaniques
- Choix nominal des charges
- Choix des lois de distribution
- Calcul du  $\beta = \frac{m(E_j)}{\sigma(E_j)}$   $E_j = R_j - F_j$ , Indice de Cornell

**EXEMPLE 39 :**  
**MODES DE DEFAILLANCE MICRO-ELECTRONIQUE, INFLUENCE**  
**DE LA TEMPERATURE**

⇒ Responsable de 55% des défaillances.

⇒ Utilisation modèle Arrhenius pour certaines défaillances mécaniques :

- fils, fissurations, adhésif.

⇒ Trois types de défaillances :

- mécaniques,
- électriques,
- corrosion.

⇒ Mécanique : f(gradient de température)

- Fatigue fils : très complexe
- Soudure fils

$$Nf = A(\varepsilon f_s)^N$$

Nf = Nbre de cycles à défaillance dus à AT

$$Ef_s = K\Delta T$$

$Ef_s$  = contrainte de cisaillement

K = constante f(matériau)

A et N = constantes

Attention : Aluminium et Or

- Fatigue adhésion au niveau substrat
  - différents coefficients expansion thermique
  - microfissures
  - ruptures fragiles

**FIABILITE MECANIQUE**

Utilisation lois de Manson-Coffin

$$Nf = 0.5 \left[ \frac{L_s |\alpha_c - \alpha_s| \Delta T}{h_{sa} \gamma_f} \right]^{1/c}$$

$L_s$  = diagonale du substrat

$\alpha_s$  = coefficient expansion thermique du substrat

$\alpha_c$  = coefficient expansion de température du boîtier

$\Delta T$  = formation de température

$h_{sa}$  = épaisseur attache du substrat

$\gamma_f$  = coefficient de ductilité en fatigue

$c$  = pente de la courbe (Ncycles, cisaillement)

Dépolymérisation

⇒ Corrosion

- Moisissures insérées dans les packages
- Corrosion des métallisations et soudures

$$MTF = f(T) f(RH) F(\gamma)$$

T = température

MTF = temps entre défaillance

RH = facteur d'humidité

$\gamma$  = facteur de tension

$$MTF = A \exp(-\Delta H/KT) \exp(RH)^2$$

- Contraintes de corrosion dans les packages

$$\tau_f = K e^{(-0.13)RH} e^{35.7/RT}$$

$\tau_f$  = temps entre défaillance

RH = humidité relative

R = constante du gaz

T = température absolue

- Croissance dendritiques

⇒ Défaillances électriques

- Formation de points chauds
- Décharges électrostatiques

⇒ Claquages Electriques

$$t(BD) = A(B+C/RT)^V e^{-D/RT}$$

A, B, C, D = constantes

R = constante de gaz

V = tension appliquée

T = température

⇒ Contamination ionique

⇒ Piège à électrons

⇒ Electrons chauds

⇒ Electro-migration

M2OS - IMdR

**EXEMPLE 40 :**  
**CALCUL DE JOINTS SOUDES SUR CIRCUITS IMPRIMES SOUS**  
**VIBRATION ET CYCLES THERMIQUES**

L'application proposée est effectuée sur des composants montés en surface.

Deux formules sont proposées basées sur les lois de Manson-Coffin permettant de définir les durées de vie.

De manière à combiner vibration et thermique, la loi de MINER est utilisée pour calculer les endommagement.

M2OS - IMdR

**EXEMPLE 41 :**  
**ROLE DE L'IDENTIFICATION DES MECANISMES DE DEFAILLANCE**  
**DANS LES TESTS ACCELERES**

J.M. HU  
B. BARKER  
A. DASGUPTA  
A. ARORA

Cet article démontre la difficulté d'effectuer des essais accélérés sans faire apparaître des mécanismes de défaillance non attendus en fonctionnement normal.

La table 1 rappelle les mécanismes de défaillance et leurs contraintes et paramètres accélérateurs.

Un rappel des lois d'accélération est effectué en particulier :

- ⇒ le modèle d'Arrhénius pour les accélérations en température,
- ⇒ les modèles de Wohler pour les accélérations en contraintes sur le nombre de cycles,
- ⇒ les modèles de PARIS sur les accélérations sur une taille de défaut et la croissance de fissures sous jacentes dans le cas de contraintes normales et aléatoires.