

# Optimisation globale polynomiale appliquée à la rectification projective d'images non calibrées \*

F. Bugarin<sup>1,2</sup>, D. Henrion<sup>2,4</sup>, T. Sentenac<sup>1,2</sup>, J.B. Lasserre<sup>2,3</sup>, J.J. Orteu<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université de Toulouse ; INSA, UPS, Mines Albi, ISAE ; ICA (Institut Clément Ader) ;  
Campus Jarlard, F-81013 Albi cedex 09, France

Ecole des Mines Albi, Campus Jarlard, F-81013 Albi, France.

<sup>2</sup> LAAS-CNRS, Université de Toulouse, Toulouse, France

<sup>3</sup> Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse, Toulouse, France

<sup>4</sup> Faculté de Génie Electrique, Université Technique Tchèque de Prague, République Tchèque  
bugarin,jean-jose.orteu@mines-albi.fr, henrion,sentenac,lasserre@laas.fr

## Résumé

*L'article expose l'application d'une méthode d'optimisation globale au problème de la rectification projective d'images non calibrées. La plupart des méthodes disponibles dans la littérature utilisent une méthode d'optimisation locale lors de l'étape de minimisation des distorsions projectives. L'application d'une méthode d'optimisation globale polynomiale permet de s'affranchir d'un point initial et de garantir une solution optimale. Dans une première partie, nous rappelons les fondements de la méthode d'optimisation globale polynomiale basée sur la théorie des moments et la programmation semi-définie. Ensuite, afin de minimiser les distorsions projectives, nous proposons et analysons de nouveaux critères polynomiaux permettant de contrôler la rigidité des transformations projectives. Cette étude permet d'une part de mettre en avant l'existence de critères rationnels robustes (pouvant être traités par l'optimisation polynomiale), et d'autre part d'aboutir à un critère algébrique qui, même résolu sans méthode itérative, donne des résultats très satisfaisants. Enfin, nous évaluons les distorsions projectives résiduelles dans les images ainsi rectifiées sur la base de mesures différentes des critères minimisés. Nous montrons qu'elles sont inférieures à cinq pour cent.*

## Mots Clef

Optimisation Globale ; Optimisation polynomiale ; Rectification projective ; Homographie ; Matrice fondamentale ; Minimisation des distorsions.

---

\*Ces travaux sont menés dans le cadre du projet ANR Programme Blanc R3T (Real Time and True Temperature field measurement based on optoelectronic devices).

## 1 Introduction

La rectification d'image est une étape importante en stéréovision car elle autorise un gain de rapidité lors de la recherche de stéréo-correspondants. En effet, après rectification, la recherche se fait le long de droites horizontales communes aux deux images, appelées lignes épipolaires. Pour un point donné d'une image, la droite épipolaire correspond au lieu géométrique auquel appartient son stéréo-correspondant dans l'autre image. Ainsi, la rectification aligne les lignes épipolaires et les réoriente parallèlement aux lignes des images (i.e à l'axe horizontal des caméras rectifiées).

L'objectif de la rectification est alors de déterminer une paire de transformations projectives, appelées homographies, qui génère deux nouvelles images à partir d'images originelles. Dans le cas d'images non calibrées, les paramètres des homographies sont estimés à partir de la connaissance de la géométrie épipolaire (description mathématique de la géométrie d'un système de stéréovision) afin de maximiser les similitudes entre images d'origine et images rectifiées. Cependant, les homographies ne sont pas uniques, le problème est alors de trouver une paire d'homographies qui réduise le plus possible les déformations projectives des images rectifiées.

Les solutions existantes s'articulent ainsi autour de deux étapes : le calcul de la géométrie épipolaire afin d'en déduire des homographies particulières, suivi d'une minimisation des déformations projectives induites par ces transformations. Les approches proposées [3, 13, 7] diffèrent alors en fonction des critères de minimisation géométriques appliqués et des décompositions de matrices affines associées à la transformation projective. De plus, selon la méthode, l'étape de minimisation est appliquée soit simultanément sur les deux

images, soit indépendamment sur chacune d'elles.

Les différentes méthodes évoquées ci-dessus ont toutes en commun d'inclure, dans l'étape de minimisation des déformations projectives, une optimisation *locale* (de type gradient-conjugué, quasi-Newton, SQP... [17]) du critère retenu. Ces méthodes locales impliquent de disposer d'une part d'un critère lisse et d'autre part d'un point initial judicieusement choisi, garantissant une convergence stable vers un minimum local physiquement acceptable. En effet, si le critère choisi n'est pas convexe, une optimisation locale à l'aide de méthodes sans dérivées [16, 1] ou de descente peut ne pas converger vers un minimum acceptable. La détermination d'un point initial réalisable peut s'avérer tout aussi délicate. Ces remarques nous incitent d'une part à étudier en détail la modélisation du critère algébrique de minimisation des déformations projectives et à proposer une méthode d'optimisation globale qui ne nécessite pas d'initialisation et fournit le minimum global. Dans cet article, nous proposons, à partir d'une méthode existante [15], un nouveau critère polynomial permettant l'application d'une méthode d'optimisation globale basée sur la programmation semi-définie, introduite pour la rectification d'images dans l'article [9].

La section 2 introduit les bases de la méthode d'optimisation globale. Ensuite, la section 3 présente, en perspective avec la méthode [15], notre méthode de rectification et le choix du critère de minimisation des déformations projectives. Et enfin, la section 4 évalue les performances de notre approche à l'aide de critères standards : la distance à la droite épipolaire, l'orthogonalité et le rapport d'aspect des images rectifiées.

## 2 Optimisation globale et théorie des moments

Le but de cette section est d'introduire les fondements de la méthode d'optimisation globale polynomiale par la théorie des moments que nous mettons en œuvre dans notre algorithme de rectification.

### Introduction.

On considère le problème d'optimisation polynomial suivant :

$$\mathbb{P}_K \mapsto p^* := \min_{x \in K} p(x) \quad (1)$$

où :

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\} \quad (2)$$

et  $p, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  sont des polynômes à coefficients réels. Le but de cette méthode est d'approximer  $\mathbb{P}_K$  à l'aide d'une hiérarchie  $(\mathbb{Q}_i)$  de problèmes convexes de programmation semi-définie [18]. On montrera que la suite monotone  $(q_i^*)$  des valeurs optimales de  $(\mathbb{Q}_i)$  converge vers l'optimum global  $p^*$ . De plus

ce minimum est souvent obtenu exactement pour une relaxation particulière.

### Une famille de relaxations.

Remarquons tout d'abord que le problème  $\mathbb{P}_K$  est équivalent [11] au problème :

$$\mathcal{P}_K \mapsto p^* := \min_{\mu \in \mathcal{P}(K)} \int_K p(x) \mu(dx)$$

où  $\mathcal{P}(K)$  est l'espace des mesures de probabilité sur  $K$  (i.e. les mesures de probabilité à support contenu dans  $K$ ). Introduisons ensuite les notations suivantes : pour tout polynôme  $p : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ , on pose :

$$p(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} p_\alpha \underbrace{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}}_{x^\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} p_\alpha x^\alpha. \quad (3)$$

On définit le degré d'un monôme  $x^\alpha$  par  $\deg(x^\alpha) = |\alpha| := \sum_{k=1}^n \alpha_k$  et par suite :

$$\begin{aligned} \deg(p) &:= \max \{ \deg(x^\alpha) \text{ s.l.c } p_\alpha \neq 0 \} \\ d_p &:= \lceil \deg(p)/2 \rceil \\ d_K &:= \max(d_{g_1}, \dots, d_{g_m}). \end{aligned}$$

On peut identifier tout polynôme  $p(x)$  de degré  $m$  à sa séquence de coefficients  $p = (p_\alpha)_{|\alpha| \leq m}$ . Ainsi, en remarquant que  $\int p(x) \mu(dx) = \sum_{\alpha} p_\alpha \int x^\alpha \mu(dx)$ , une formulation équivalente de (1) :

$$\begin{aligned} \min p^\top y \\ \text{s.l.c } y \in \{ (y_\alpha)_\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n} \mid y_0 = 1, y_\alpha = \int_K x^\alpha \mu(dx), \forall \alpha \} \end{aligned}$$

où  $y_\alpha = \int_K x^\alpha \mu(dx)$  est le moment d'ordre  $\alpha$  de la mesure  $\mu$ . La condition  $\forall \alpha, y_\alpha = \int x^\alpha d\mu$  signifie donc que  $(y_\alpha)$  est le vecteur des moments d'une mesure de probabilité  $\mu \in \mathcal{P}(K)$ . Si  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$  est l'ensemble des vecteurs à  $n$  composantes réelles indicées dans  $\mathbb{N}^n$ , posons :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_K &:= \{ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n} \mid y \text{ représente une mesure } \mu \in \mathcal{P}(K) \} \\ \mathcal{M}_\succeq &:= \{ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n} \mid M(y) \succeq 0, M(g_j y) \succeq 0, j = 1, \dots, m \} \end{aligned}$$

où  $M(y)$ , la matrice (infinie) des moments de  $y$ , et  $M(g_j y)$ , la  $j^{\text{ième}}$  matrice (infinie) de localisation, sont définies par :

$$\begin{aligned} M(y) &:= (y_{\alpha+\beta})_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} \\ M(g_j y) &:= \left( \sum_{\gamma} (g_j)_\gamma y_{\alpha+\beta+\gamma} \right)_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n}. \end{aligned}$$

On peut vérifier que  $\mathcal{M}_K \subseteq \mathcal{M}_\succeq$ , l'égalité étant réalisée si le module quadratique engendré par  $\{g_1, \dots, g_m\}$  est archimédien [12]. Cette condition implique que  $K$  est borné. Elle représente une propriété algébrique de  $\{g_1, \dots, g_m\}$  qui est en pratique toujours réalisée dès lors qu'il existe  $j_0$  tel que :

$$g_{j_0}(x) = N - \sum_{i=0}^n x_i^2. \quad (4)$$

Ainsi, il suffit de rajouter, dans l'ensemble des contraintes, un polynôme  $g_{m+1}$  décrivant l'équation d'une boule contenant  $K$ . Sous cette hypothèse, le problème (1) est alors équivalent à :

$$\mathbb{Q} \mapsto q^* := \min_{y \in \mathcal{M}_{\succeq}} p^\top y. \quad (5)$$

Soit  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^i}$  l'ensemble des  $y$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$  tels que  $y_\alpha = 0$  si  $|\alpha| \geq i + 1$ . Introduisons la famille  $(\mathbb{Q}_i)$  de problèmes convexes de programmation semi-définie positive :

$$\mathbb{Q}_i \mapsto q_i^* := \begin{cases} \min_{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^{2i}}} p^\top y \\ \text{s.l.c } M_i(y) \succeq 0, \\ M_{i-d_j}(g_j y) \succeq 0, j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (6)$$

où :

$$\begin{aligned} M_i(y) &:= (y_{\alpha+\beta})_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_i^n} \\ M_{i-d_j}(g_j y) &:= \left( \sum_{\gamma} (g_j)_\gamma y_{\alpha+\beta+\gamma} \right)_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_i^n} \end{aligned}$$

avec  $i \geq \max(d_p, d_K)$ .

On obtient ainsi une suite monotone de problèmes  $(\mathbb{Q}_i)$  dont les contraintes sont des conditions nécessaires pour que  $y$  soit le vecteur des moments (jusqu'à l'ordre  $2i$ ) d'une mesure de probabilité à support dans  $K$ . Chaque problème, utilisant des matrices de taille  $O(n^i)$  et  $O(n^{2i})$  variables, peut être résolu numériquement par des méthodes de points intérieurs [18].

### Convergence vers le minimum global.

On peut vérifier que :

$$\forall i \geq \max(d_p, d_K) : q_i^* \leq q_{i+1}^* \leq q^* = p^* \quad (7)$$

et démontrer [11] la convergence de la suite  $(q_i^*)$  vers  $p^*$  :

$$\min \mathbb{Q}_i \uparrow p^* = \min \mathbb{P}_K \quad (8)$$

et de plus, si l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0\}$$

est fini, alors cette convergence est finie :

$$\exists i_0 \in \mathbb{N}^* \mid p^* = \min \mathbb{Q}_{i_0}. \quad (9)$$

Ainsi, la solution d'un problème de minimisation d'un polynôme sous contraintes polynomiales  $\mathbb{P}_K$  est atteint pour une relaxation semi-définie positive particulière  $\mathbb{Q}_{i_0}$ . Cependant, il faut souligner le fait que nous raisonnons sur l'image par  $p$  du minimum global  $x^*$ . Par conséquent, même si par convergence nous disposons de  $p^* = p(x^*)$ , la précision finale de la résolution de  $\mathbb{P}_K$  dépendra fortement de la précision avec laquelle on pourra extraire numériquement  $x^*$  de  $p^*$ .

La méthode décrite ci-dessus est implantée dans le logiciel GloptiPoly [8], couplé avec un solveur de points intérieurs.

## 3 Rectification et optimisation globale

### 3.1 Rappels

Nous exposons succinctement ici le principe général de rectification. Pour plus de détails sur la géométrie projective et l'estimation de la matrice fondamentale le lecteur pourra se référer à [14]. En ce qui concerne l'opération de rectification, le lecteur pourra consulter [13]. L'opération de rectification a pour but de ramener une configuration géométrique quelconque à une configuration dite *rectifiée*. Pour cette géométrie particulière les droites épipolaires sont horizontales et parallèles à l'axe formé par les centres optiques des caméras. Pour effectuer cette opération, on applique une transformation homographique  $\mathbf{H}$  (resp.  $\mathbf{H}'$ ) sur l'image gauche (resp. droite) de sorte que l'épipole gauche  $e$  (resp. droit  $e'$ ) soit rejeté à l'infini. Dans le cas de la géométrie d'un banc rectifié, la matrice fondamentale dite *matrice fondamentale rectifiée*, notée  $\mathbf{F}_0$ , a une forme particulière :

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De plus, en explicitant la contrainte épipolaire pour la géométrie rectifiée, on a :

$$\mathbf{H}'^\top \mathbf{F}_0 \mathbf{H} = \mathbf{F} \quad (10)$$

Cette contrainte, qui ne donne pas de solution unique, permet de définir la notion d'homographie dite *compatible* : toute paire de matrices  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{H}'$  devra satisfaire cette contrainte. Une classe de méthodes [15, 7] de rectification consiste à déterminer directement une homographie particulière  $\mathbf{H}$ , puis à déduire  $\mathbf{H}'$ , et enfin à corriger les deux matrices en minimisant un critère réduisant les distorsions induites dans les deux images. Ces approches nécessitent la résolution d'un problème d'optimisation, le plus souvent à l'aide d'une méthode locale fortement dépendante de son initialisation et ne fournissant qu'un minimum local. Nous présentons dans la suite comment nous avons introduit notre méthode d'optimisation polynomiale afin de résoudre globalement le problème de minimisation des distorsions projectives

### 3.2 Rectification par minimisation des distorsions

Nous introduisons ici la méthode de rectification proposée dans [15] et détaillons ses avantages et ses inconvénients. Inspirée par [7], cette méthode se décompose en deux phases : on détermine tout d'abord deux homographies compatibles particulières  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{H}'$ , puis, en introduisant des degrés de liberté on minimise les distorsions projectives résiduelles.

### Calcul des homographies de rectification.

Le but de cette première étape est de déterminer une paire d'homographies de rectification à l'aide de la contrainte épipolaire. En effet, en utilisant la matrice fondamentale  $\mathbf{F}$  calculée à l'aide d'un ensemble de points homologues  $(\mathbf{m}_i, \mathbf{m}'_i)_{i=1..n}$  [2], on déduit de (10) les coordonnées des épipoles gauche  $\mathbf{e} = (e_u, e_v, 1)^\top$  et droit  $\mathbf{e}' = (e'_u, e'_v, 1)^\top$ . On définit alors l'homographie de rectification de l'image gauche  $\mathbf{H}$  par :

$$\mathbf{H} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h_{21} & 1 & 0 \\ h_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -e_v/e_u & 1 & 0 \\ -1/e_u & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le choix de fixer cette homographie pour l'image gauche est totalement arbitraire et la méthode peut bien entendu s'appliquer de manière tout à fait symétrique. De cette définition, on déduit que si  $\mathbf{H}' = [h'_{i,j}]$  alors le produit  $\mathbf{H}'^\top \mathbf{F}_0 \mathbf{H}$  est indépendant de  $h'_{11}, h'_{12}$  et  $h'_{13}$ . Autrement dit,  $\mathbf{H}'$ , l'homographie de rectification de l'image droite, est de la forme :

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h'_{21} & h'_{22} & h'_{23} \\ h'_{31} & h'_{32} & h'_{33} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Par conséquent, si  $\mathbf{F} = [f_{i,j}]$ , en développant l'égalité (10) on obtient :

$$\begin{bmatrix} h_{21}h'_{31} - h_{31}h'_{21} & h'_{31} & -h'_{21} \\ h_{21}h'_{32} - h_{31}h'_{22} & h'_{32} & -h'_{22} \\ h_{21}h'_{33} - h_{31}h'_{23} & h'_{33} & -h'_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Ce système surdéterminé peut être résolu, soit linéairement soit itérativement par minimisation au sens des moindres carrés (cf [10]) et permet d'obtenir  $\mathbf{H}'$ .

### Minimisation des déformations projectives.

Nous disposons à présent d'homographies de rectification  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{H}'$ , le but de cette deuxième étape est alors de minimiser les distorsions qu'elles induisent sur les images. L'idée proposée dans [15] et de remarquer que les premières lignes de  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{H}'$  ne jouent aucun rôle dans la rectification. Ainsi, remplacer  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{H}'$  par  $\mathbf{H}_a := \mathbf{A}\mathbf{H}$  et  $\mathbf{H}'_{a'} := \mathbf{A}'\mathbf{H}'$  avec :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

permet d'introduire des degrés de liberté tout en conservant des homographies de rectification. Afin de déterminer numériquement ces valeurs, les auteurs exploitent un outil de la littérature [7, 4] : le jacobien de l'application associée à l'homographie de rectification. Ce dernier permet en effet de contrôler localement la création et la destruction de pixels. Considérons l'application  $f_{\mathbf{H}}$  induite par  $\mathbf{H}$  transformant un pixel de

l'image initiale  $(u, v)$  en un pixel  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  de l'image rectifiée :

$$f_{\mathbf{H}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ m \rightarrow \begin{bmatrix} (Hm)_x & (Hm)_y \\ (Hm)_z & (Hm)_z \end{bmatrix}$$

Alors, dans un voisinage  $\mathcal{V}_p$  d'un pixel  $\mathbf{p}$  de l'image de initiale, on a :

$$\|f_{\mathbf{H}}(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f_{\mathbf{H}}(\mathbf{p})\| \leq \|Jf_{\mathbf{H}}(\mathbf{p})\| \cdot \|\mathbf{h}\| \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{V}_p \quad (13)$$

où,  $\|\cdot\|$  est la norme vectorielle de  $\mathbb{R}^2$  et  $\|\cdot\|$  est la norme d'opérateur. Ainsi, on constate que contrôler  $\|Jf_{\mathbf{H}}(\mathbf{p})\|$  permet de contrôler l'accroissement de  $f_{\mathbf{H}}$  et donc localement la création et la destruction de pixels. Dans le cas particulier où l'on considère l'homographie  $\mathbf{H}_a$  (resp.  $\mathbf{H}'_{a'}$ ) appliquée aux  $n$  points de contrôle  $(\mathbf{m}_i)_i$  (resp.  $(\mathbf{m}'_i)_i$ ), les jacobiens  $(Jf_{\mathbf{H}_a}(\mathbf{m}_i))_i$  (resp.  $(Jf_{\mathbf{H}'_{a'}}(\mathbf{m}'_i))_i$ ) associés ne dépendent que des paramètres  $\mathbf{a} = (a_{11}, a_{12})$  (resp.  $\mathbf{a}' = (a'_{11}, a'_{12})$ ), les paramètres  $a_{13}$  et  $a'_{13}$  ne servant qu'à recentrer les images rectifiées. La méthode proposée dans [15] consiste alors à résoudre les deux problèmes suivants :

$$\min_{\mathbf{a}} f(\mathbf{a}) := \sum_{i=1}^n [(\sigma_{1,i}(\mathbf{a}) - 1)^2 + (\sigma_{2,i}(\mathbf{a}) - 1)^2] \quad (14)$$

$$\min_{\mathbf{a}'} f'(\mathbf{a}') := \sum_{i=1}^n [(\sigma'_{1,i}(\mathbf{a}') - 1)^2 + (\sigma'_{2,i}(\mathbf{a}') - 1)^2] \quad (15)$$

où  $\sigma_{1,i}(\mathbf{a}), \sigma_{2,i}(\mathbf{a})$  (resp.  $\sigma'_{1,i}(\mathbf{a}'), \sigma'_{2,i}(\mathbf{a}')$ ) sont les valeurs singulières de  $Jf_{\mathbf{H}_a}(\mathbf{m}_i)$  (resp.  $Jf_{\mathbf{H}'_{a'}}(\mathbf{m}'_i)$ ). Ainsi, à l'optimum on aura

$$\|Jf_{\mathbf{H}_a}(\mathbf{m}_i)\|^2 = \frac{\|Jf_{\mathbf{H}_a}(\mathbf{m}_i)\|_F^2}{2} = \frac{\sigma_{1,i}^2(\mathbf{a}) + \sigma_{2,i}^2(\mathbf{a})}{2} = 1$$

### Bilan.

Sur la base de ces critères et comparativement aux autres techniques basées sur des approches similaires [7, 13], cette méthode obtient des résultats très satisfaisants [15]. Mais, d'un point de vue numérique, elle souffre de plusieurs désavantages. En effet, les méthodes d'optimisation locales utilisées pour résoudre (14) et (15) sont fortement dépendantes du point d'initialisation choisi. En outre, le choix d'utiliser la décomposition en valeurs singulières comme outil de caractérisation peut comporter certains désavantages. D'une part, il faut à chaque itération calculer  $n$  décompositions, ce qui peut être pénalisant si  $n$  devient important. D'autre part, comme les fonctions coûts ne sont pas analytiques, leurs dérivées ne peuvent être calculées que par différences finies et donc introduire des erreurs d'approximation.

### 3.3 Critères de minimisation.

Le but de cette partie est d'exposer l'application numérique de l'optimisation polynomiale avec théorie des

moments sur la minimisation des déformations projectives. Comme détaillé dans la section 2, pour mettre en œuvre l’algorithme implanté dans GloptiPoly [8], il est nécessaire de disposer d’un critère polynomial  $p : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  dont on peut extraire les racines avec une précision numérique suffisante. Ainsi, dans chacun des paragraphes suivants nous proposons et analysons plusieurs critères polynomiaux permettant de contrôler la rigidité des déformations induites par les homographies de rectification. Par souci de lisibilité, nous ne détaillerons ces critères que pour l’image gauche (seul le calcul du jacobien étant différent d’une image à l’autre) et nous poserons pour le suite de l’article  $J_i(a) := Jf_{\mathbf{H}_a}(m_i)$  et  $J'_i(a) := Jf_{\mathbf{H}'_a}(m'_i)$ .

### Critère polynomial équivalent.

Il paraît tout d’abord naturel de trouver un polynôme de  $a$  (le raisonnement se fait de manière symétrique sur  $a'$ ) permettant à l’optimum d’obtenir  $\sigma_{1,i} = 1, \sigma_{2,i} = 1$ . Or, puisque par définition  $\sigma_{1,i} \geq 0, \sigma_{2,i} \geq 0$ , on a l’équivalence suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{1,i} = 1 \\ \sigma_{2,i} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_{1,i}^2 \sigma_{2,i}^2 = 1 \\ \frac{1}{2} (\sigma_{1,i}^2 + \sigma_{2,i}^2) = 1 \end{cases}$$

Et en remarquant que :

$$\text{trace}(J_i^\top J_i) = \sigma_{1,i}^2 + \sigma_{2,i}^2 \quad (16)$$

$$\det(J_i^\top J_i) = \sigma_{1,i}^2 \sigma_{2,i}^2 \quad (17)$$

on obtient le problème d’optimisation polynomiale suivant :

$$\min_a \sum_{i=1}^n \left[ (\det(J_i(a)^\top J_i(a)) - 1)^2 + \frac{1}{2} (\text{trace}(J_i(a)^\top J_i(a)) - 1)^2 \right]. \quad (18)$$

Ce raisonnement permet par ailleurs de comprendre pourquoi minimiser uniquement  $\sum_{i=1}^n (\det(J_i^\top J_i) - 1)^2$  comme proposé dans [7] ne suffit pas à assurer un contrôle satisfaisant sur les valeurs singulières de  $J_i$ . Ensuite, par définition, ce problème est équivalent à (14). Cependant, nos expériences semblent montrer que ce critère polynomial n’est pas assez bien conditionné pour permettre d’extraire des racines avec suffisamment de précision. Néanmoins, GloptiPoly permet de prouver que cette fonction coût, et donc par équivalence celles de (14) et (15), possèdent deux minima globaux dont un produit des matrices de rectification aberrantes. En effet, en faisant varier l’initialisation des méthodes locales, il est possible de produire, à partir des images tests [15], des images rectifiées erronées et ce bien que l’algorithme d’optimisation converge dans un bassin d’attraction de ce minima global, cf. Fig. 1.

### Critère basé sur le conditionnement.

Un autre moyen de contrôler numériquement la qualité d’homographie  $\mathbf{H}$  de rectification est d’étudier le



Image initiale

Image rectifiée

FIG. 1 – Exemple de rectification aberrante

conditionnement du jacobien  $Jf_{\mathbf{H}}$  de l’application  $f_{\mathbf{H}}$  qui lui est associée. Afin de disposer d’un critère algébrique nous étudions le conditionnement  $\kappa_F$  associé à la norme de Frobenius  $\|\cdot\|_F$ . Ainsi, pour l’homographie  $\mathbf{H}_a$ , en remarquant que  $\|J_i\|_F^2 = \sigma_{1,i}^2 + \sigma_{2,i}^2$  et  $\|J_i^{-1}\|_F^2 = \frac{1}{\sigma_{1,i}^2} + \frac{1}{\sigma_{2,i}^2}$  puis en utilisant (16) et (17), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \kappa_F(J_i(a))^2 &= \|J_i(a)\|_F^2 \|J_i^{-1}(a)\|_F^2 \\ &= \frac{(\sigma_{1,i}^2(a) + \sigma_{2,i}^2(a))^2}{\sigma_{1,i}^2(a) \sigma_{2,i}^2(a)} \\ &= \frac{\text{trace}(J_i(a)^\top J_i(a))^2}{\det(J_i(a)^\top J_i(a))}. \end{aligned}$$

Le problème de minimisation globale de la somme des conditionnements des jacobiens évalués aux points de contrôle s’écrit alors :

$$\min_a \sum_{i=1}^n \frac{\text{trace}(J_i(a)^\top J_i(a))^2}{\det(J_i(a)^\top J_i(a))}. \quad (19)$$

Nous obtenons donc un problème de minimisation de somme de fonctions rationnelles. Il est possible de se ramener à un problème de minimisation polynomiale sous contrainte en utilisant la formulation introduite dans [9] :

$$\begin{aligned} \min_{a, \gamma} \quad & \gamma_i + \dots + \gamma_n \\ \text{s.l.c} \quad & \text{trace}(J_i(a)^\top J_i(a))^2 \leq \gamma_i \det(J_i(a)^\top J_i(a)) \\ & \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (20)$$

Il est important de remarquer que dans ce cas  $n$  est directement relié au nombre d’inconnues du problème. Ainsi, comme en pratique  $n \geq 10$ , le problème (20) devient difficile à résoudre si la convergence ne se fait pas sur la première relaxation. Enfin, plusieurs tentatives de résolution de (19) avec une méthode d’optimisation locale initialisée de façon identique à (14) se sont montrées infructueuses. En effet, certains itérés annulent le dénominateur  $\det(J_i^\top J_i)$  et rendent impossible toute convergence. On comprend dès lors tout l’intérêt d’une approche globale pouvant éviter ce type d’anomalies numériques.

### Critère polynomial proposé.

Une dernière approche consiste à étudier de quelle manière obtenir une majoration (voire un encadrement) astucieuse de  $(\sigma_{1,i}(a) - 1)^2 + (\sigma_{2,i}(a) - 1)^2$ . Tout d'abord, en utilisant le théorème de Wielandt-Hoffman [5] appliqué pour le couple de matrice  $J_i(a), J_i(a) - I_n$ , il vient :

$$\sum_{i=1}^n [(\sigma_{1,i}(a) - 1)^2 + (\sigma_{2,i}(a) - 1)^2] \leq \sum_{i=1}^n \|J_i(a) - I_2\|_F^2. \quad (21)$$

Ainsi, afin de minimiser le membre de gauche de l'équation (21), on peut dans un premier temps résoudre le problème d'optimisation globale suivant :

$$\min_a \sum_{i=1}^n \|J_i(a) - I_2\|_F^2. \quad (22)$$

Cependant, bien que ce critère soit numériquement stable pour l'extraction de ses racines, l'analyse des résultats obtenus montre qu'ils sont moins satisfaisants que ceux de (14). Il semble en effet que la majoration (21) soit trop large dans le cas de nos matrices particulières. Afin de trouver un critère plus pertinent, il est nécessaire d'analyser plus en détail l'écriture de  $J_i(a)$  et  $J'_i(a')$ . On peut montrer (cf [10]) que  $J_i(a)$  s'écrit :

$$J_i(a) = \begin{bmatrix} \frac{a_{11} + (h_{21} - v_i h_{31})a_{12}}{(u_i h_{31} + 1)^2} & \frac{a_{12}}{(u_i h_{31} + 1)} \\ \frac{h_{21} - v_i h_{31}}{(u_i h_{31} + 1)^2} & \frac{1}{(u_i h_{31} + 1)} \end{bmatrix}$$

où  $(u_i, v_i)$  sont les coordonnées pixels du  $i^{\text{ème}}$  point de contrôle  $m_i$ . Par ailleurs, en explicitant (22), on peut remarquer lorsque  $a$  tend vers  $a^* = (a_{11}^*, a_{12}^*)$ , l'optimum du problème, alors  $J_i(a)$  tend vers  $I_2$ ,  $\forall i = 1 \dots n$ . Par définition de la norme  $\|\cdot\|_F$ , pour tout  $i = 1 \dots n$ , cette convergence est équivalente à :

$$\frac{a_{11} + (h_{21} - v_i h_{31})a_{12}}{(u_i h_{31} + 1)^2} \rightarrow 1 \quad (23)$$

$$\frac{a_{12}}{(u_i h_{31} + 1)} \rightarrow 0 \quad (24)$$

$$\frac{h_{21} - v_i h_{31}}{(u_i h_{31} + 1)^2} \rightarrow 0 \quad (25)$$

$$\frac{1}{(u_i h_{31} + 1)} \rightarrow 1. \quad (26)$$

Mais, par construction, (26) est toujours réalisée car  $h_{31} = -1/e_u \ll 0$ . Ensuite, comme la deuxième ligne de  $J_i$  ne dépend pas de  $a$ , on constate que (25) est inutile et perturbe la convergence du critère (22). Ceci explique en partie le fait qu'à l'optimum  $\|J_i - I_2\|_F^2$  ne contraint pas suffisamment  $(\sigma_{1,i} - 1)^2 + (\sigma_{2,i} - 1)^2$ . Par un raisonnement analogue, on aboutit à la même conclusion pour les matrices  $J'_i(a')$ . Ainsi, notre contribution consiste à proposer un critère polynomial relâchant (25) afin de mieux contrôler (14) et donc de garantir une meilleure convergence. Pour cela, utilisons

la décomposition de l'ensemble des matrices  $2 \times 2$  en somme directe  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ , où  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices  $2 \times 2$  symétriques et  $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$  celui des matrices  $2 \times 2$  antisymétriques. Comme ces deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux pour le produit scalaire de Frobenius, on a :

$$\|J_i - I_2\|_F^2 = \underbrace{\left\| \frac{(J_i + J_i^\top)}{2} - I_2 \right\|_F^2}_{S_i} + \underbrace{\left\| \frac{(J_i - J_i^\top)}{2} \right\|_F^2}_{A_i}.$$

Par suite, lorsque  $a$  tend vers  $a^* = (a_{11}^*, a_{12}^*)$ , alors nécessairement  $S_i$  tend vers  $I_2$ ,  $\forall i = 1 \dots n$  ce qui pour tout  $i$  est équivalent à :

$$\frac{a_{11} + (h_{21} - v_i h_{31})a_{12}}{(u_i h_{31} + 1)^2} \rightarrow 1 \quad (27)$$

$$\frac{a_{12}}{(u_i h_{31} + 1)} \rightarrow -\frac{h_{21} - v_i h_{31}}{(u_i h_{31} + 1)^2} \quad (28)$$

$$\frac{1}{(u_i h_{31} + 1)} \rightarrow 1. \quad (29)$$

On remarque alors que (24) et (25) sont remplacées par (28) qui dépend directement de  $a_{12}$ . La convergence (29) étant toujours assurée, nous pouvons alors directement utiliser comme critère de minimisation  $\|S_i - I_2\|_F^2$  pour remplacer  $\|J_i - I_2\|_F^2$ . Ainsi, en remplacement de (22), nous proposons de résoudre le problème d'optimisation polynomial suivant :

$$\min_a \sum_{i=1}^n \|S_i(a) - I_2\|_F^2. \quad (30)$$

Il est alors important de remarquer que ce critère, contrairement aux précédents, est quadratique en  $a$ . Un candidat au minimum global peut donc être trouvé en résolvant le système de deux équations linéaires à deux inconnues :

$$\sum_{i=1}^n \nabla_a [\|S_i(a) - I_2\|_F^2] = 0. \quad (31)$$

où  $\nabla_a$  est l'opérateur gradient par rapport à  $a$ . Afin de démontrer l'efficacité de ce critère, nous présentons dans la section suivante les résultats obtenus par minimisation globale de ce critère, et nous les comparons avec ceux obtenus par la méthode proposée dans [15].

## 4 Résultats

### Critères d'évaluation des homographies.

Afin d'évaluer les résultats obtenus, il est proposé dans [15] d'utiliser plusieurs critères caractérisant la déformation induite par  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{H}'$  sur les images rectifiées. Le premier, appelé critère d'orthogonalité et noté  $E_0$ , représente l'angle formé par les droites issues des milieux des côtés opposés de l'image rectifiée. Il est

défini comme suit : à partir des milieux des côtés de l'image initiale  $(p_i)_{i=1..4}$ , on calcule :

$$E_o = \cos^{-1} \left( \frac{\langle f_{\mathbf{H}}(p_2) - f_{\mathbf{H}}(p_4) \mid f_{\mathbf{H}}(p_1) - f_{\mathbf{H}}(p_3) \rangle}{\|f_{\mathbf{H}}(p_2) - f_{\mathbf{H}}(p_4)\| \cdot \|f_{\mathbf{H}}(p_1) - f_{\mathbf{H}}(p_3)\|} \right).$$

où  $\langle \mid \rangle$  est le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^2$ .

Le second, appelé rapport d'aspect et noté  $E_a$ , représente le rapport des longueurs des diagonales issues des quatre sommets opposés de l'image rectifiée. Par analogie au critère précédent, il se calcule grâce aux quatre coins  $(q_i)_{i=1..4}$  de l'image initiale :

$$E_a = \frac{\|f_{\mathbf{H}}(q_2) - f_{\mathbf{H}}(q_4)\|}{\|f_{\mathbf{H}}(q_1) - f_{\mathbf{H}}(q_3)\|}.$$

Enfin, le critère classique de distance moyenne aux droites épipolaires [6], noté  $E_r$  et calculé sur les images  $(f_{\mathbf{H}}(m_i), f_{\mathbf{H}'}(m'_i))_i$  des points de contrôle  $(m_i, m'_i)_i$  permet d'évaluer la précision de l'estimation de la géométrie épipolaire.

### Comparaison des résultats.

Afin de valider notre critère, nous expérimentons notre approche sur plusieurs types d'images. Tout d'abord dans le tableau 1 nous utilisons les images tests mises à disposition dans [15]. Ces images sont issues d'un banc stéréoscopique convergent. Ensuite, afin de se placer dans des cas plus défavorables, nous utilisons les images tests de la communauté vision artificielle (disponibles sur le site du Visual Geometry Group d'Oxford). Nous avons choisi deux séries (Library et Merton2) de trois images, et appliqué les deux méthodes de rectification sur toutes les combinaisons possibles. Ces combinaisons sont indiquées à la suite du nom de l'échantillon dans le tableau 2 (par exemple Merton2-12 signifie la rectification de la paire d'images 1 et 2 de l'échantillon Merton2). Pour les deux séries d'expérimentations, les résultats de notre approche sont évalués à l'aide des critères de comparaison présentés précédemment et confrontés à ceux obtenus par résolution des critères (14) et (15) (noté [15] dans les tableaux).

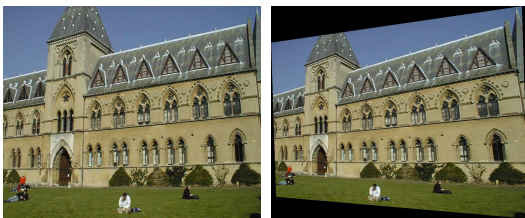


Image initiale

Image rectifiée

FIG. 2 – Exemple de rectification

Cette inter-comparaison permet de constater que les résultats obtenus par notre critère sont très satisfaisants et quantitativement très proches de la méthode

[15] dans les cas favorables. Néanmoins, il est important de souligner que les résultats obtenus en minimisant (30) et en résolvant (31) sont quasiment identiques. Par conséquent, il est possible d'effectuer à l'aide de (31) une opération de rectification sans optimisation et processus itératifs.

## 5 Conclusions et perspectives

Nous avons montré dans cet article l'existence d'un critère analytique polynomial dont la minimisation globale donne de très bons résultats pour diminuer les distorsions générées par les homographies de rectification. De plus ce critère présente l'avantage de fournir des solutions identiques par annulation de son gradient. Ainsi, il permet d'obtenir une méthode de rectification sans processus itératif qui peut être implantée dans des environnements temps-réel. Par ailleurs, les récents développements de l'optimisation globale par théorie des moments appliquée aux sommes de fonctions rationnelles laissent entrevoir la possibilité de résoudre directement (19). Bien que nous ayons commencé à explorer cette voie, l'introduction théorique de cette technique et le détail de sa mise en œuvre n'ont pas été détaillés ici et feront l'objet d'une autre communication.

## Références

- [1] A.R. Conn, K. Scheinberg, and L.N. Vicente. *Introduction to Derivative Free Optimization*. SIAM, 2009.
- [2] G. Csurka, C. Zeller, Z. Zhang, and O. Faugeras. Characterizing the uncertainty of the fundamental matrix. *Computer Vision and Image Understanding*, 68 :18–35, 1997.
- [3] F. Devernay. *Vision stéréoscopique et propriétés différentielles des surfaces*. PhD thesis, Ecole polytechnique, Février 1997.
- [4] Joshua Gluckman and Shree K. Nayar. Rectifying transformations that minimize resampling effects. *In Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 1 :111–117, 2001.
- [5] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. *Matrix Computations, 3rd Edn*. The John Hopkins University Press, 1996.
- [6] P. Hartley and A. Zisserman. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, 2003.
- [7] R. Hartley. Theory and practice of projective rectification. *International Journal of Computer Vision*, 35 :115–127, 1999.
- [8] D. Henrion and J.B. Lasserre. Gloptipoly : Global optimization over polynomials with Matlab and SeDuMi. *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, Dec. 2002.

Echantillon	Méthode	Orthogonalité $E_0$		Rapport d'aspect $E_a$		Distance $E_r$	
		H'	H	H'	H	moy	$\sigma$
Slate	Proposée [15]	89.5523	89.5545	0.9924	0.9926	0.6085	0.4650
		89.1697	89.1919	0.9860	0.9865	0.6085	0.4650
Yard	Proposée [15]	90.0011	90.2924	1.0000	1.0065	0.6398	0.4861
		90.0063	90.2959	1.0001	1.0065	0.6398	0.4861
Boxes	Proposée [15]	89.0363	90.4238	0.9843	1.0089	0.4954	0.3608
		89.1807	90.6453	0.9864	1.0127	0.4954	0.3608
Arch	Proposée [15]	90.5587	90.3045	1.0091	1.0077	0.3167	0.3024
		91.0459	90.3324	1.0173	1.0082	0.3167	0.3024
Drive	Proposée [15]	90.5103	90.1641	1.0085	1.0037	0.5609	0.7544
		90.5404	90.2313	1.0090	1.0049	0.5609	0.7544

TAB. 1 – Comparaison de la méthode proposée sur des images issues d'un banc stéréo

Echantillon	Méthode	Orthogonalité $E_0$		Rapport d'aspect $E_a$		Distance $E_r$	
		H'	H	H'	H	moy	$\sigma$
Library12	Proposée [15]	90.8409	89.9352	0.9990	0.9926	0.6459	0.4852
		90.9878	89.8303	1.0173	0.9972	0.6459	0.4852
Library13	Proposée [15]	90.6318	94.5355	1.0109	1.0583	0.6687	0.5257
		91.0592	96.1249	1.0183	1.0882	0.6687	0.5257
Library23	Proposée [15]	90.1809	93.3668	1.0029	1.0295	1.0992	0.6944
		90.0122	94.1423	1.0002	1.0436	1.0992	0.6944
Merton2-12	Proposée [15]	87.7684	89.3160	0.9618	0.9892	0.6991	0.5809
		88.1222	89.4094	0.9678	0.9908	0.6991	0.5809
Merton2-13	Proposée [15]	92.3872	90.7017	1.0390	1.0090	1.4665	1.2525
		93.0491	91.0844	1.0502	1.0150	1.4665	1.2525
Merton2-23	Proposée [15]	91.5321	88.9034	1.0253	0.9862	0.5730	0.4681
		91.8257	88.6263	1.0302	0.9818	0.5730	0.4681

TAB. 2 – Comparaison de la méthode proposée pour des images quelconques

- [9] F. Kahl and D. Henrion. Globally optimal estimates for geometric reconstruction problems. *International Journal of Computer Vision*, 74 :3–15, 2007.
- [10] S. Kramm. *Production de cartes éparses de profondeur avec un système de stéréovision embarqué non-aligné*. PhD thesis, Université de Rouen, Juillet 2008.
- [11] J.B. Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM Journal on Optimization*, 11 :796–817, 2001.
- [12] M. Laurent. Sums of squares, moment matrices and optimization over polynomials. In *Emerging Applications of Algebraic Geometry. IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, 149 :157–270, 2009.
- [13] C. Loop and Z. Zhang. Computing rectifying homographies for stereo vision. Technical report, Microsoft Research, 1999.
- [14] Q-T. Luong. *Matrice Fondamentale et calibration visuelle sur l'environnement vers une plus grande autonomie des systèmes robotiques*. PhD thesis, Université de Paris-sud, centre d'Orsay, Décembre 1992.
- [15] J. Mallon and P. Whelan. Projective rectification from the fundamental matrix. *Image and Vision Computing*, 23 :643–650, 2005.
- [16] K.I.M. McKinnon. Convergence of the Nelder-Mead simplex method to a nonstationary point. *SIAM Journal on Optimization*, 9 :148–158, 1999.
- [17] J. Nocedal and S.J Wright. *Numerical Optimization*. Springer Verlag, 2006.
- [18] L. Vandenberghe and S. Boyd. Semidefinite programming. *SIAM review*, 38 :49–95, 1996.