Relaxations LMI pour la stabilité robuste de systèmes linéaires à commande saturée

Didier Henrion, **Sophie Tarbouriech**

LAAS-CNRS
7, Avenue du Colonel Roche
31077 Toulouse, Cedex 4
E-mail: {henrion,tarbour}@laas.fr

Résumé—**Une méthode est proposée pour étudier la stabilité robuste de systèmes linéaires incertaints en présence de saturation sur la commande. Elle est basée sur des relaxations LMI successives et donc peut être facilement implantée à l'aide d'outils numériques largement répandus.**

Mots clés—**Systèmes linéaires, Stabilité, Incertitudes, Saturations, LMI.**

I. Introduction

Il est maintenant largement admis que les incertitudes et les saturations doivent être prises en compte explicitement lors de la synthèse de lois de commande. D'une part, l'étude théorique des systèmes incertains déboucha sur les contrôleurs dit robustes, voir [12] pour une bonne introduction. D'autre part, plusieurs résultats furent récemment obtenus concernant les systèmes à commande contrainte ou saturée, voir [10] pour un tour d'horizon. Cependant, il est assez suprenant de noter que, jusqu'alors, très peu de travaux combinent ces résultats.

Afin de combler ce manque, notre papier a pour but d'analyser la stabilité de systèmes linéaires en présence d'incertitude et, simultanément, de saturation sur la commande. Nous prenons comme point de départ un système linéaire incertain que l'on a stabilisé robustement par retour d'état. Nous supposons de plus que les commandes du système en boucle fermée peuvent saturer. Notre objectif est alors d'approximer le plus grand ensemble de conditions initiales pour lesquelles la stabilité en boucle fermée est garantie. Ce problème est connu sous le nom de stabilisation locale.

Dans ce papier, nous résolvons ce problème en prouvant tout d'abord que les saturations peuvent être modélisées localement comme des incertitudes polytopiques. Elles peuvent ensuite être combinées avec les incertitudes réelles affectant le système en boucle ouverte. Ensuite, nous utilisons le concept de stabilité quadratique pour montrer que l'ensemble des conditions initiales stabilisables peut être approché par un ellipsoïde déterminé par une matrice de Lyapunov. La maximisation du volume de cet ensemble passe par la résolution d'inégalités matricielles bilinéaires (BMI), un problème fondamental omniprésent en commande robuste [5]. Etant donné qu'aucun algorithme efficace n'a été proposé jusqu'alors pour résoudre les BMI, nous suivons l'approche décrite dans [6], [7], [10]. Nous utilisons un processus itératif de relaxations basées sur la résolution d'inégalités matricielles linéaires (LMI), pour lesquelles des algorithmes efficaces ont été récemment développés [2].

II. Position du problème

Nous considérons le système continu

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande. Pour représenter les incertitudes pouvant affecter le système (1), nous imposons que les matrices du système vérifient

$$\begin{array}{rcl} A(t) & \in & \mathcal{A} \\ B(t) & \in & \mathcal{B} \end{array}$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des ensembles compacts. Nous considérons deux types d'incertitudes, à savoir:
– des incertitudes bornées en norme, où

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} & = & \{A_0 + DF(t)E_1, \quad \|F(t)\|_2 \leq 1\} \\ \mathcal{B} & = & \{B_0 + DF(t)E_2, \quad \|F(t)\|_2 \leq 1\} \end{array}$$

pour des matrices nominales A_0, B_0 et des matrices constantes D, E_1, E_2 données;
– des incertitudes polytopiques, où les matrices du système appartiennent à des polytopes de matrices

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} & = & \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_{n_A}\} \\ \mathcal{B} & = & \mathrm{Co}\{B_1, \ldots, B_{n_B}\} \end{array}$$

où Co désigne l'enveloppe convexe.

Supposons alors qu'une matrice de retour d'état robuste K vient d'être calculée pour le système (1). De plus, supposons que des non-linéarités de type saturations affectent les commandes du système. Plus précisément, supposons que les composantes u_i du vecteur de commande u vérifient

$$u_i = \mathrm{sat}[K_i x] = \left\{ \begin{array}{ll} w_i & \text{si } K_i x > w_i \\ K_i x & \text{si } |K_i x| \leq w_i \\ -w_i & \text{si } K_i x < -w_i \end{array} \right. \tag{2}$$

où $w_1, \ldots, w_m$ sont des scalaires positifs donnés et K_i dénote la $i$ème ligne de la matrice K. En l'absence d'hypothèse de stabilité en boucle ouverte, il est bien connu qu'en présence de saturations, certaines trajectoires du système en boucle fermée (1)-(2) peuvent être instables. En fait, le problème qui consiste à trouver l'ensemble des conditions initiales pouvant être stabilisées est un problème particulièrement difficile qui reste irrésolu dans le cas général. Afin de développer une méthode d'approximation de cet ensemble, nous avons besoin de la définition suivante:

Définition 1: Le système incertain saturé (1)-(2) est localement quadratiquement stable s'il existe une matrice de Lyapunov symétrique définie positive P et en ensemble $\mathcal{E}$ tels que l'inégalité

$$2\left\{A(t)x(t)+B(t)\mathrm{sat}[Kx(t)]\right\}'Px(t)<0 \qquad (3)$$

soit vérifiée pour tout $x(t)\in\mathcal{E}$ et $A(t)\in\mathcal{A}$, $B(t)\in\mathcal{B}$.

A la lumière de la définition ci-dessus, un choix naturel de domaine de stabilité est l'ellipsoïde de Lyapunov

$$\mathcal{E}=\{x: x'Px\leq\frac{1}{r}\} \qquad (4)$$

pour une certaine valeur positive du scalaire r. On peut montrer que l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ est positivement invariant et contractif si l'inégalité (3) est verifiée dans $\mathcal{E}$. Par conséquent, toute trajectoire initialisée dans cet ellipsoïde converge à l'origine. $\mathcal{E}$ s'avère donc être une approximation intéressante du domaine d'attraction de l'origine. Dans cette optique, le premier problème que nous allons résoudre dans ce papier est le suivant:

Problème 1: Trouver la matrice de Lyapunov P et le scalaire r tels que le système en boucle fermée (1)-(2) soit localement quadratiquement stable dans l'ensemble ellipsoïdal $\mathcal{E}$.

Supposons maintenant que l'ensemble $\mathcal{E}$ soit une solution du problème d'analyse ci-dessus. Puisque chaque ensemble homothétique $\lambda\mathcal{E}$ pour $\lambda\leq 1$ est également positivement invariant et contractif, l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ doit être le plus grand possible. Nous pouvons ainsi formuler notre second problème:

Problème 2: Trouver la matrice de Lyapunov P et le scalaire r tels que le système en boucle fermée (1)-(2) soit localement quadratiquement stable dans le plus grand ensemble ellipsoïdal $\mathcal{E}$ possible.

III. Formulation BMI

A présent nous montrons que les problèmes 1 et 2 peuvent respectivement être formulés comme des problèmes de faisabilité BMI et d'optimisation BMI. Afin de clarifier les notations, nous supprimons parfois la dépendance en t du vecteur x. Tout d'abord, le système (1)-(2) peut s'écrire

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)G_{\gamma(x(t))}Kx(t)$$

où $G_{\gamma(x(t))}$ est une matrice diagonale dont les composantes sont

$$\gamma_i(x)=\begin{cases} w_i/K_ix & \text{si } K_ix>w_i\\ 1 & \text{si } |K_ix|\leq w_i\\ -w_i/K_ix & \text{si } K_ix<-w_i.\end{cases}$$

pour $i=1,\ldots,m$. Notons que $\gamma_i(x)$ appartient à l'intervalle $]0,1]$ pour tout vector x. Quand γ_i tend vers 0 il n'y a presque pas de retour sur la commande u_i, alors que $\gamma_i=1$ signifie simplement que la commande u_i ne sature pas.

Selon notre formulation des problèmes 1 et 2, le domaine d'évolution de l'état du système (1)-(2) doit être limité. Donc pour tout $x\in\mathcal{E}$, les composantes du vecteur $\gamma(x)$ admettent une borne inférieure

$$\gamma_{0i}=\min\{\gamma_i(x):\forall x\in\mathcal{E}\} \qquad (5)$$

telle que $\gamma_{0i}\leq\gamma_i(x)\leq 1$. A partir d'un tel vecteur γ_0 nous définissons des sommets de matrices incertaines

$$A(t)+B(t)G^k_{\gamma_0}K$$

pour $k=1,\ldots,2^m$, où les matrices $G^k_{\gamma_0}$ sont les 2^m matrices sommets diagonales dont les éléments peuvent être égaux à 1 ou à γ_{0i}. Dans le polyèdre

$$\mathcal{S}_{\gamma_0}=\{x:|K_ix|\leq w_i/\gamma_{0i}\}\ \supset\ \mathcal{E} \qquad (6)$$

nous décrivons le système (1)-(2) par l'équation dynamique

$$\dot{x}(t)=A_{cl}(t)x(t) \qquad (7)$$

où la matrice de boucle fermée $A_{cl}(t)$ appartient à un polytope de matrices incertaines

$$\mathcal{A}_{cl}=\mathrm{Co}\{A(t)+B(t)G^1_{\gamma_0}K,\ldots,A(t)+B(t)G^{2^m}_{\gamma_0}K\}.$$

Considérant la relation d'inclusion (6), le système nonlinéaire (1)-(2) peut être représenté par le système polytopique (7) à l'intérieur du polyèdre $\mathcal{S}_{\gamma_0}$. Notons que ce résultat avait déjà été obtenu dans [6], [7], [10]. Il est reformulé ici dans un souci de clarté.

A l'aide de résultats classiques de stabilité quadratique [1], nous pouvons à présent déduire une condition suffisante pour que le système polytopique (7) soit quadratiquement stable. La matrice de Lyapunov P introduite dans la définition 1 doit être la solution de la famille d'inégalités matricielles suivantes:

– pour les incertitudes bornées en norme:

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix}(A_0+B_0G^k_{\gamma_0}K)'P+\\ P(A_0+B_0G^k_{\gamma_0}K)\end{pmatrix} & PD & E_1'+K'G^k_{\gamma_0}E_2' \\ D'P & -I & 0 \\ E_1+E_2G^k_{\gamma_0}K & 0 & -I\end{bmatrix}<0 \qquad (8)$$

pour tout $k=1,\ldots,2^m$. Dans l'inégalité ci-dessus, I représente une matrice identité de dimension appropriée;

– pour les incertitudes polytopiques:

$$(A_i+B_jG^k_{\gamma_0}K)'P+P(A_i+B_jG^k_{\gamma_0}K)<0 \qquad (9)$$

pour tout $i=1,\ldots,n_A$, $j=1,\ldots,n_B$ et $k=1,\ldots,2^m$.

Dans les inégalités ci-dessus, les variables de décision sont la matrice de Lyapunov P et le vecteur de saturation γ_0, dont les composantes apparaissent dans les matrices diagonales $G^k_{\gamma_0}$. Il faut garder à l'esprit que l'équivalence entre le système non-linéaire (1)-(2) et le système polytopique (7) est valide à l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{S}_{\gamma_0}$, qui à son tour doit inclure l'ensemble ellipsoïdal de Lyapunov $\mathcal{E}$. Cette inclusion peut également être exprimée comme l'inégalité matricielle

$$\left[\begin{array}{cc} P & \gamma_{0i} K_i' \\ \gamma_{0i} K_i & r w_i^2 \end{array}\right] \geq 0 \qquad (10)$$

pour $i = 1, \ldots, m$ et où les variables de décision sont la matrice P, les scalaires γ_{0i} et le scalaire r [6], [7], [10]. Nous avons démontré le résultat suivant:

Théorème 1: S'il existe une matrice symétrique définie positive P, un vecteur γ_0 de composantes $0 < \gamma_{0i} \leq 1$ et un scalaire positif r tels que les inégalités matricielles (8) ou (9) et (10) soient vérifiées, alors l'ensemble ellipsoïdal $\mathcal{E}$ défini en (4) est solution du problème 1.

Il existe plusieurs manières de mesurer la taille d'un ellipsoïde, et donc plusieurs candidats pour le plus grand ellipsoïde recherché dans le problème 2. Certaines solutions sont énumérées ci-dessous, mais notre liste est loin d'être exhaustive. On pourra consulter [6, §5.3] pour une discussion à ce sujet.

Corollaire 1: Dans le problème 2, la maximisation de l'ellipsoïde de conditions initiales $\mathcal{E}$ donné dans le théorème 1 peut s'effectuer en minimisant les critères r, trace P ou $\log\det P$ tout en vérifiant les inégalités matricielles (8) ou (9) et (10).

Notons que les inégalités matricielles (8) et (9) sont bilinéaires (BMI) en les variables de décision P et γ_0, alors que l'inégalité (10) est linéaire (LMI) en P, γ_0 et r. Dans [5] il est démontré que la plupart des problèmes de commande robuste peuvent être formulés comme des BMI. Comme le prouvent le théorème 1 et le corollaire 1, c'est également le cas pour les problèmes 1 et 2.

IV. Relaxations LMI

Nous devons souligner que notre formulation du problème contient différentes sources potentielles de conservatisme, comme la représentation de l'incertitude ou l'existence d'une matrice de Lyapunov unique partagée par tous les sommets du polytope de matrices. Par conséquent, il ne semble pas nécessaire d'utiliser des méthodes lourdes et complexes d'optimisation globale pour résoudre le problème BMI introduit dans le corollaire 1. Nous nous contenterons d'une solution faisable approchée, c'est-à-dire un ensemble de taille suffisamment large solution du problème 1.

En fait, il existe plusieurs moyens d'approcher la solution d'un problème d'optimisation BMI à l'aide d'algorithmes efficaces à temps polynomial. Puisque les inégalités matricielles (8) ou (9) deviennent linéaires dès que l'on fixe une des variables de décision, nous avons choisi de construire une méthode d'approximation très simple basée sur des relaxations LMI (LMIR) successives. Les relaxations qui se sont avérées utiles sont les suivantes:

LMIR 1 $\min r$ avec P fixé
LMIR 2 $\min(r + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{0i})$ avec P fixé
LMIR 3 $\min \operatorname{trace} P$ avec γ_0 et r fixés
LMIR 4 $\min \log\det P$ avec γ_0 et r fixés,

le tout sous les contraintes LMIs (8) ou (9) et (10). Notre algorithme alterne entre ces quatre procédures de relaxation tout en fournissant des solutions au problème 1 et une solution approchée au problème 2.

V. Algorithme

– *Pas 1:* Soit $\gamma_{01} = \cdots = \gamma_{0m} = r = 1$. Résoudre en P les LMI (8) ou (9) et (10).
– *Pas 2:* Résoudre LMIR 1, 2, 3 ou 4.
– *Pas 3:* Si une certaine condition sur la taille de $\mathcal{E}$ est vérfiée, alors arrêt. Sinon, aller au Pas 2.

Dans l'algorithme ci-dessus, le choix de la relaxation LMI au Pas 2 s'avère très important. A première vue, il ne semble pas possible de déterminer à l'avance quelle séquence converge le mieux. Notre implémentation de l'algorithme permet à l'utilisateur de sélectionner la procédure de relaxation de son choix à chaque pas.

Le critère d'arrêt du Pas 3 dépend du comportement de l'algorithme. Bien sûr, des itérations supplémentaires augmentent toujours la taille de $\mathcal{E}$. Mais puisqu'il n'existe pas de propriétés de convergence pour ce type d'algorithmes de relaxation, on peut, par exemple, décider d'arrêter le processus quand il n'y a plus de variation significative de la taille de $\mathcal{E}$.

VI. Exemple

Nous illustrons à présent notre algorithme à l'aide d'un exemple trouvé dans la littérature. Pour résoudre les problèmes d'optimisation LMI, nous avons utilisé la boîte à outils LMI décrite dans [4] et le programme Maxdet proposé dans [11].

Nous considérons le système incertain étudié dans [9] dont les matrices nominales sont

$$A_0 = \left[\begin{array}{cc} 0.1 & -0.1 \\ 0.1 & -3 \end{array}\right] \quad B_0 = \left[\begin{array}{cc} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right].$$

Dans [9], les matrices du système (1) sont affectées par les incertitudes additives structurées de norme inférieure à 0.1. Pour les modéliser, nous avons choisi une description bornée en norme avec matrices d'incertitude

$$D = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right] \quad E_1 = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}\right] \quad E_2 = 1.$$

De plus, les commandes sont limitées par des niveaux de saturation $w_1 = 5$ et $w_2 = 2$. Le but des auteurs de [9] était d'obtenir le plus grand ensemble de conditions initiales pour lesquelles le retour d'état optimal

$$u = -\left[\begin{array}{cc} 0.7283 & 0.0338 \\ 0.0135 & 1.3583 \end{array}\right] x$$

assure la stabilité robuste même en présence de saturation. Le plus grand ensemble de conditions initiales qu'ils ont obtenu est

$$x(0) \in \mathcal{Q} = \{x : x'x \leq 2265\}.$$

Nous reportons dans les tables 1 et 2 deux séquences de relaxations LMI avec les rapports entre les volumes des ellipsoïdes $\mathcal{E}$ obtenus à chaque pas de notre algorithme itératif et la sphère $\mathcal{Q}$ décrite ci-dessus. Après quelques itérations, nous avons pu agrandir l'ensemble de conditions initiales d'un facteur 676.8 dans le premier cas et 1877 dans le second cas. Ces ensembles sont représentés sur la figure 1. Nous avons donc amélioré de façon significative les résultats obtenus dans [9].

Numéro de LMIR	Rapport de volume
2	0.0428
3	0.2123
2	0.2123
3	0.2125
2	21.8
3	**676.8**

Table 1: Première séquence de relaxations.

Numéro de LMIR	Rapport de volume
4	0.2125
2	0.2125
4	59.41
2	**1877**

Table 2: Seconde séquence de relaxations.

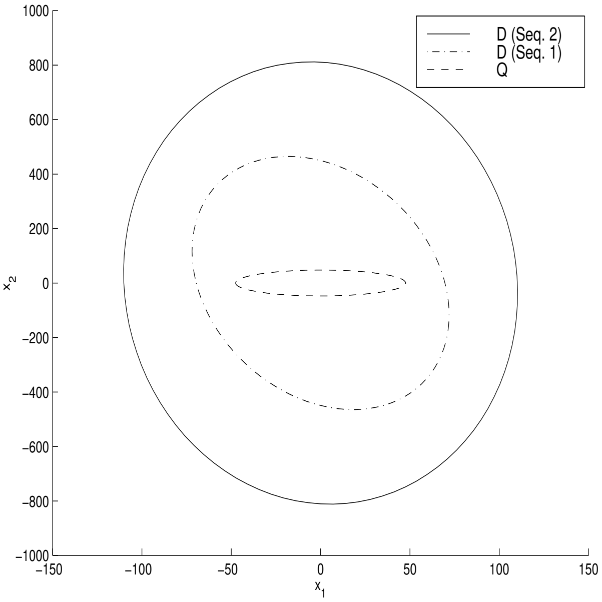

Figure 1: Comparaison des ensembles stabilisables.

VII. Conclusion

A partir de l'équivalence locale entre un système linéaire saturé et un système linéaire polytopique, nous avons proposé une méthode BMI pour analyser la stabilité robuste d'un système linéaire incertain dont les commandes sont saturées. Un algorithme efficace de relaxations LMI successives a été décrit.

Par opposition aux méthodes de commande contrainte robuste généralement conçues pour éviter la saturation des actionneurs afin de preserver la performance en boucle fermée [8], l'approche présentée ici traîte explicitement et tolère même la présence de saturations. Cependant, il devrait être intéressant d'étudier la possibilité de combiner ces deux approches et d'en déduire quels sont les compromis à faire entre la performance du système et la taille de l'ensemble des conditions initiales stabilisables.

Une autre possible extension de nos travaux pourrait être l'analyse des systèmes saturés incertains à l'aide d'autre modèles d'incertitudes. En effet, les incertitudes positives réelles ou bornées réelles peuvent parfois s'avèrer moins conservatives que les incertitudes bornées en norme [3, §II.1].

References

[1] B. R. Barmish, "Necessary and Sufficient Conditions for Quadratic Stabilizability of an Uncertain System", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 46, No. 4, pp. 399–408, 1985.

[2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Féron et V. Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory", *SIAM Studies in Applied Mathematics*, Philadelphie, Vol. 15, 1994.

[3] J. Daafouz, "Robustesse en Performance des Systèmes Linéaires Incertains: Placement de Pôles et Coût Garanti", *Thèse de Doctorat*, Rapport LAAS No. 97472, Toulouse, 1997.

[4] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub et M. Chilali, "MATLAB LMI Control Toolbox", *The Mathworks, Inc.*, 1995.

[5] K. C. Goh, M. G. Safonov et J. H. Ly, "Robust Synthesis via Bilinear Matrix Inequalities", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 6, No. 9/10, pp. 1079–1095, 1996.

[6] J. M. Gomes da Silva Jr., "Sur la Stabilité Locale de Systèmes Linéaires avec Saturation des Commandes", *Thèse de Doctorat*, Rapport LAAS No. 97383, Toulouse, 1997.

[7] D. Henrion, S. Tarbouriech et G. Garcia, "Output Feedback Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems with Saturating Controls", *Compte-rendus de la Conference on Decision and Control IEEE*, San Diego, 1997. A paraître également dans *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999.

[8] D. Henrion, G. Garcia et S. Tarbouriech, "Piecewise-linear Robust Control of Systems with Input Saturation", *European Journal of Control*, Vol. 5, No. 1, pp. 157–166, 1999.

[9] J. H. Kim et Z. Bien, "Robust Stability of Uncertain Linear Systems with Saturating Actuators", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 1, pp. 225–229, 1994.

[10] S. Tarbouriech et G. Garcia (Editeurs), "Control of Uncertain Systems with Bounded Inputs", *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 227, Springer-Verlag, Londres, 1997.

[11] S. P. Wu, L. Vandenberghe et S. Boyd, "MAXDET: Software for Determinant Maximization Problems", *Information Systems Laboratory*, Stanford University, 1996.

[12] K. Zhou, J. C. Doyle et K. Glover, "Robust and Optimal Control", *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, 1996.