Inégalités matricielles quadratiques et stabilité des polynômes

Didier Henrion[1,2]

20 Février 2006

Résumé

De nouvelles relations sont établies entre diverses inégalités matricielles pour tester la stabilité d'un polynôme scalaire. Ces conditions sont quadratiques en les coefficients du polynôme, et linéaires (LMI) en une matrice additionnelle. Des liens sont établis entre les critères de stabilité d'Hermite et de Lyapunov, ainsi qu'entre les techniques espace d'état et polynomiale pour l'analyse de stabilité. Les conditions pourraient servir à la synthèse de lois de commande de complexité réduite.

Mots clés

Stabilité, Polynôme, LMI, Critère d'Hermite, Critère de Lyapunov.

1 Introduction

Tester l'appartenance des racines d'un polynôme à une région du plan complexe est un problème d'une importance fondamentale en automatique, car il est lié à la stabilité des systèmes dynamiques. Les méthodes classiques pour analyser la stabilité de polynômes sont décrites exhaustivement dans [5] ou plus récemment dans [3]. Les techniques d'analyse de stabilité les plus utilisées sont probablement le critère des mineurs de Routh-Hurwitz et de Schur-Cohn, et la deuxième approche de Lyapunov.

Les techniques de type Lyapunov ont graduellement attiré l'attention des automaticiens à la suite du développement de procédures numériques efficaces pour résoudre les équations matricielles linéaires (Lyapunov) ou quadratiques (Riccati) et les inégalités matricielles linéaires (LMI, voir [4]). Cette approche se prête bien aux problèmes d'analyse de stabilité

1. LAAS-CNRS, 7 Avenue du Colonel Roche, 31 077 Toulouse, France. FAX: +33 5 61 33 69 69. E-mail: `henrion@laas.fr`

2. Faculté de Génie Electrique, Université Technique Tchèque de Prague, Technická 2, 16626 Prague, République Tchèque.

formulés dans l'espace d'état, et plusieurs extensions aux problèmes de synthèse ont été proposées, voir [17] pour un bon état de l'art.

Les techniques d'analyse de stabilité par déterminants non symétriques, comme les critères de Routh-Hurwitz ou de Schur-Cohn, sont généralement mentionnées dans un but éducatif. Elles sont limitées au cas scalaire et ne se prêtent pas bien à la synthèse de lois de commande car elles débouchent sur des inégalités polynomiales multivariables non convexes. L'utilisation des méthodes décisionnelles pour traîter des inégalités polynomiales [1] reste limitée aux problèmes à dimensions très faibles. Cependant, certains résultats récents indiquent que leur formulation symétrique, étudiée avec admirable détail et perspective historique dans [13], peut permettre de nouvelles interpretations à des problèmes de commande formulés dans l'algèbre des polynômes [12]. Par exemple, le célèbre théorème de Kharitonov sur la stabilité de polynômes intervalles peut être dérivé des propriétés du critère d'Hermite symétrique [15]. Les liens existant entre les critères par déterminants, la seconde approche de Lyapunov, et le critère d'Hermite sont étudiés dans [16]. De manière similaire, une preuve alternative du critère d'Hermite basée sur des arguments de type Lyapunov a été décrite dans [18]. L'application du critère d'Hermite dans le cadre de l'approche polynomiale appliquée à la stabilisation simultanée de systèmes linéaires, un problème bien connu de commande robuste, a été illustrée dans [6]. Finalement, les techniques d'optimisation LMI ont été utilisées dans [8] afin de dériver une nouvelle condition de stabilité pour les matrices polynomiales. Dans le cas scalaire, cette condition se réduit à une inégalité matricielle linéaire en une inconnue de type matrice de Lyapunov, et quadratique dans les coefficients du polynôme.

L'objectif de cet article est de renforcer les liens existant entre les techniques par espace d'état (inégalités matricielles linéaires de type Lyapunov) et polynomiales (inégalites matricielles quadratique de type Hermite), dans le cas de l'analyse de stabilité d'un polynôme scalaire. Dans l'esprit de [16], nous décrivons plusieurs connexions existant entre le critère d'Hermite, le critère LMI proposé dans [8], et l'inégalité de Lyapunov revisitée dans [7].

2 Préliminaires

Soit un polynôme

$$p(s) = p_0 + p_1 s + \cdots + p_k s^k$$

de degré k à coefficients complexes, son vecteur de coefficients

$$p = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_k \end{bmatrix}$$

appartenant à $\mathbb{C}^{k+1}$, et le vecteur polynomial

$$\pi_k(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^k \end{bmatrix}$$

tel que $p(s) = p\pi_k(s)$.

Dans cet article le polynôme $p(s)$ est dit stable quand toutes ses racines sont dans une région donnée

$$\{s \in \mathbb{C} \,:\, \sigma(s) = \pi_1^\star(s) S \pi_1(s) < 0\}$$

du plan complexe, où la matrice Hermitienne 2×2

$$S = \begin{bmatrix} a & b \\ b^\star & c \end{bmatrix}$$

a une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative. Dans ce document, l'étoile représente la transposée conjuguée.

Des choix classiques de matrice S sont

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pour le demi-plan gauche et la stabilité à temps continu, et

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pour le disque unité et la stabilité à temps discret. Les autres régions de stabilité peuvent être des demi-plans, des intérieurs de disques ou des extérieurs de disques, voir [13] ou [8].

Tout comme [13], nous définissons le polynôme réfléchi de $p(s)$ comme le polynôme

$$\tilde{p}(s) = \left(\frac{b^\star + cs}{\sqrt{b^\star b - ac}} \right)^k p^\star \left(- \left(\frac{a + bs}{b^\star + cs} \right)^\star \right)$$

de degré k. Des choix classiques pour $\tilde{p}(s)$ sont

$$\tilde{p}(s) = p^\star(-s^\star) = p_0^\star - p_1^\star s + \cdots + (-1)^k p_k^\star s^k$$

pour la stabilité à temps continu ($a = 0, b = 1, c = 0$) et

$$\tilde{p}(s) = s^k p^\star(1/s^\star) = p_k^\star + p_{k-1}^\star s + \cdots + p_0^\star s^k$$

pour la stabilité à temps discret ($a = -1, b = 0, c = 1$). Une importante propriété du polynôme réfléchi est le fait que $p(s)$ et $\tilde{p}(s)$ n'ont pas de racine commune si et seulement si $p(s)$ n'a pas de racines sur la courbe $\sigma(s) = 0$. Quand $p(s)$ est stable, alors son polynôme réfléchi $\tilde{p}(s)$ est anti-stable, c'est-à-dire que toutes ses racines satisfont $\sigma(s) > 0$.

Correspondant à $p(s)$ nous définissons les polynômes

$$\begin{array}{rcl} n(s) & = & \frac{\sqrt{2}}{2}(p(s) + \tilde{p}(s)) \\ d(s) & = & \frac{\sqrt{2}}{2}(p(s) - \tilde{p}(s)) \end{array}$$

à vecteurs de coefficients n et d, et la matrice compagne

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -p_0/p_k & -p_1/p_k & \cdots & -p_{k-1}/p_k \end{bmatrix}$$

telle que le déterminant de $sI_k - A$ égale $p(s)$.

Nous définissons le Bézoutien de $p(s)$ comme la forme quadratique

$$B(s) = \frac{p^\star(s)p(s) - \tilde{p}^\star(s)\tilde{p}(s)}{\sigma(s)}.$$

Dans [13] il est démontré que $B(s)$ est un polynôme en s et $s^\star$, à savoir $\sigma(s)$ divise $p^\star(s)p(s) - \tilde{p}^\star(s)\tilde{p}(s)$ et nous pouvons écrire

$$B(s) = \pi_{k-1}^\star(s) H \pi_{k-1}(s)$$

où la matrice carrée H de taille k est dénommée la matrice d'Hermite de $p(s)$.

Soit

$$R = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

une matrice de taille $2k \times (k+1)$. Finalement, la notation $P \succ 0$ (resp. $P \succeq 0$) indique que la matrice P est définie positive (resp. semi-définie positive) et $\otimes$ dénote le produit de Kronecker.

3 Résultat principal

Théorème 1 *Les énoncés suivants sont équivalents :*

(a) *$p(s)$ est stable*

(b) *$H \succ 0$*

(c) *il existe une matrice $P = P^\star \succ 0$ solution de la LMI*

$$p^\star p \succ R^\star (S \otimes P) R \tag{1}$$

(d) *il existe une matrice $P = P^\star \succ 0$ solution de la LMI*

$$\begin{bmatrix} I_n \\ A \end{bmatrix}^\star (S \otimes P) \begin{bmatrix} I_n \\ A \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2}$$

(e) *la fonction rationnelle*

$$g(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

est strictement positive réelle, à savoir que $n(s)$ et $d(s)$ n'ont pas de racines communes et

$$g(s) + g^\star(s) > 0$$

pour $\sigma(s) > 0$.

Preuve de l'équivalence entre (a) et (b):
Elle découle du critère de stabilité d'Hermite, voir Théorème 1 dans [13]. Il n'est pas dans nos objectifs de formuler ici une nouvelle preuve de ce résultat, mais le critère d'Hermite et en particulier la matrice d'Hermite H s'avèrent utiles pour la dérivation des autres preuves ci-dessous.

Preuve de l'équivalence entre (a) et (c):
La LMI (1) implique que

$$\pi_k^\star(s)p^\star p\pi_k(s) = p^\star(s)p(s) > \pi_k^\star(s)R^\star(S \otimes P)R\pi_k(s) = \sigma(s)\pi_{k-1}^\star(s)P\pi_{k-1}(s).$$

Puisque $P \succ 0$, il découle que $p(s)$ ne s'annule jamais pour $\sigma(s) \geq 0$, donc que $p(s)$ est stable.

Réciproquement, supposons que $p(s)$ soit stable. Selon la définition du Bézoutien, nous avons

$$\begin{array}{rcl} \sigma(s)B(s) & = & p^\star(s)p(s) - \tilde{p}^\star(s)\tilde{p}(s) \\ & = & \pi_k^\star(s)(p^\star p - \tilde{p}^\star\tilde{p})\pi_k(s) \\ & = & \frac{1}{2}(p^\star(s) + \tilde{p}^\star(s))(p(s) - \tilde{p}(s)) + \frac{1}{2}(p^\star(s) - \tilde{p}^\star(s))(p(s) + \tilde{p}(s)) \\ & = & n^\star(s)d(s) + d^\star(s)n(s) \\ & = & \pi_k^\star(s)(n^\star d + d^\star n)\pi_k(s). \end{array}$$

Selon la définition de $\sigma(s)$, nous avons aussi

$$\begin{array}{rcl} \sigma(s)B(s) & = & \sigma(s)\pi_{k-1}^\star(s)H\pi_{k-1}(s) \\ & = & \pi_{k-1}^\star(s)(aH + bsH + b^\star s^\star H + cs^\star sH)\pi_{k-1}(s) \\ & = & \left[\begin{array}{c} \pi_{k-1}(s) \\ s\pi_{k-1}(s) \end{array}\right]^\star (S \otimes H) \left[\begin{array}{c} \pi_{k-1}(s) \\ s\pi_{k-1}(s) \end{array}\right] \\ & = & \pi_k^\star(s)R^\star(S \otimes H)R\pi_k(s). \end{array}$$

L'identification des puissances des indeterminées s et $s^\star$ dans ces deux expressions du même polynôme à deux variables mène à la relation

$$p^\star p - \tilde{p}^\star\tilde{p} = n^\star d + d^\star n = R^\star(S \otimes H)R. \tag{3}$$

Il en découle que

$$p^\star p \succeq p^\star p - \tilde{p}^\star\tilde{p} = R^\star(S \otimes H)R.$$

Nous allons démontrer que nous pouvons toujours trouver une matrice $\tilde{P}$ telle que

$$P = H + \tilde{P} \succ 0$$

résolve la LMI

$$\tilde{p}^\star\tilde{p} \succ R^\star(S \otimes \tilde{P})R.$$

En utilisant le théorème de projection (Th. 2.3.12 de [17]), cette dernière LMI est équivalente à la LMI projetée

$$\tilde{N}^\star R^\star (S \otimes \tilde{P}) R \tilde{N} \prec 0$$

où la matrice

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -\tilde{p}_0/\tilde{p}_k & -\tilde{p}_1/\tilde{p}_k & \cdots & -\tilde{p}_{k-1}/\tilde{p}_k \end{bmatrix}$$

engendre l'espace nul du vecteur $\tilde{p}$. Définissant

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -\tilde{p}_0/\tilde{p}_k & -\tilde{p}_1/\tilde{p}_k & \cdots & -\tilde{p}_{k-1}/\tilde{p}_k \end{bmatrix}$$

comme la matrice compagne associée au polynôme réfléchi $\tilde{p}(s)$, la LMI ci-dessus peut s'écrire comme un système linéaire d'équations

$$\tilde{N}^\star R^\star (S \otimes \tilde{P}) R \tilde{N} = \begin{bmatrix} I_n \\ \tilde{A} \end{bmatrix}^\star (S \otimes \tilde{P}) \begin{bmatrix} I_n \\ \tilde{A} \end{bmatrix} = F(\tilde{P}) \tag{4}$$

pour une matrice $Q = F(\tilde{P}) \prec 0$. Puisque $p(s)$ est stable, il n'y a pas de valeur propre de la matrice $\tilde{A}$ sur la frontière de stabilité et l'application linéaire F est bijective [5]. Par conséquent, étant donné une matrice arbitraire $Q \prec 0$, il existe une solution $\tilde{P}$ au système linéaire (4). De plus, $\tilde{P} \prec 0$ puisque $\tilde{p}(s)$ est anti-stable, et que $\tilde{P}$ satisfait l'équation de Lyapunov (4). En particulier, nous pouvons choisir une solution $\tilde{P}$ arbitrairement proche de zéro telle que $P = H + \tilde{P} \succ 0$ et la LMI (1) soit satisfaite. □

Preuve de l'équivalence entre (c) et (d):
L'espace nul du vector p est engendré par la matrice

$$N = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -p_0/p_k & -p_1/p_k & \cdots & -p_{k-1}/p_k \end{bmatrix}.$$

Tout comme dans la preuve de l'équivalence entre (a) et (c), il existe une solution $P = P^\star \succ 0$ à la LMI (1) si et seulement si il existe une solution $P = P^\star \succ 0$ à la LMI projetée

$$N^\star R^\star (S \otimes P) R N = \begin{bmatrix} I_n \\ A \end{bmatrix}^\star (S \otimes P) \begin{bmatrix} I_n \\ A \end{bmatrix} \prec 0$$

qui est précisément l'inégalité de Lyapunov (2). □

Preuve de l'équivalence entre (a) et (e):
Rappelons tout d'abord (voir ci-dessus) que

$$n^\star(s) d(s) + d^\star(s) n(s) = \sigma(s) \pi_{k-1}^\star(s) H \pi_{k-1}(s).$$

Si $p(s)$ est stable alors $H \succ 0$ et donc

$$n^\star(s)d(s) + d^\star(s)n(s) > 0$$

pour $\sigma(s) > 0$. Puisque $p(s)$ et $\tilde{p}(s)$ n'ont pas de racines communes, il en est de même pour $n(s)$ et $d(s)$, et le nombre réel

$$g(s) + g^\star(s) = \frac{n(s)}{d(s)} + \frac{n^\star(s)}{d^\star(s)} = \frac{n^\star(s)d(s) + d^\star(s)n(s)}{d^\star(s)d(s)}$$

est positif pour $\sigma(s) > 0$. Réciproquement, si $g(s)$ est strictement positive réelle, alors

$$n^\star(s)d(s) + d^\star(s)n(s) = p^\star(s)p(s) - \tilde{p}^\star(s)\tilde{p}(s) > 0$$

donc $p^\star(s)p(s) > 0$ pour $\sigma(s) > 0$. L'absence de racines communes entre $n(s)$ et $d(s)$ implique l'absence de racines communes entre $p(s)$ et $\tilde{p}(s)$ et donc $p(s)$ n'a pas de racines sur la courbe $\sigma(s) = 0$. Par conséquence, $p(s)$ est stable. $\square$

4 Discussion

4.1 LMI strictes et non-strictes

Une conséquence des preuves des équivalences du Théorème 1 peut être résumée comme suit. Le polynôme $p(s)$ est stable si et seulement si les deux LMI

$$\begin{array}{rcll} p^\star p & \succ & R^\star(S \otimes P)R, & H \succ P \succ 0 \\ \tilde{p}^\star \tilde{p} & \succ & R^\star(S \otimes \tilde{P})R, & H \succ -\tilde{P} \succ 0 \end{array}$$

ayant la même forme que (1) sont faisables. Les choix limites pour P et $\tilde{P}$ correspondent aux versions non-strictes des LMI, à savoir

$$\begin{array}{rcllll} p^\star p & \succeq & R^\star(S \otimes P)R, & P = H & \text{ou} & P = 0 \\ \tilde{p}^\star \tilde{p} & \succeq & R^\star(S \otimes \tilde{P})R, & -\tilde{P} = H & \text{ou} & \tilde{P} = 0. \end{array}$$

De plus, le choix central $P - \tilde{P} = H \succ 0$ correspond à l'égalité

$$p^\star p - \tilde{p}^\star \tilde{p} = n^\star d + d^\star n = R^\star(S \otimes H)R$$

obtenue en (3).

Dans [16] il est rappellé que le choix $P = H \succ 0$ satisfait une version non-stricte de l'inégalité de Lyapunov, menant à une preuve de type Lyapunov du critère de stabilité d'Hermite. Ici nous allons plus loin et montrons comment peut être déterminée une matrice $\tilde{P} \prec 0$ telle que $P = H + \tilde{P} \succ 0$ satisfasse l'inégalité stricte de Lyapunov.

4.2 Liens avec d'autres conditions LMI

Notons que l'équivalence entre (a) et (c) est prouvée dans le Théorème 1 de [8] de la manière suivante. Premièrement, le test de stabilité d'un polynôme est formulé comme un problème d'optimisation quadratique. Deuxièmement, un problème équivalent d'optimisation LMI avec contrainte non-convexe de rang est déduit à l'aide des représentations fractionnelles linéaires. Troisièmement, il est démontré que la contrainte de rang est redondante. Quatrièmement enfin, la formulation LMI (1) est obtenue à l'aide d'arguments classiques de dualité de programmation semi-définie. Ci-dessus nous donnons une autre preuve constructive de ce résultat, basée sur la matrice d'Hermite.

Le même type d'idées basées sur les LMI avec contraintes de rang furent utilisées dans [7] pour prouver l'équivalence de (a) et (d). Ici nous donnons une autre preuve pour ce résultat dans le cas où A est la matrice compagne associée au polynôme $p(s)$.Quand A est une autre matrice dont le polynôme caractéristique est $p(s)$, nous pouvons utiliser une transformation de similarité pour prouver le résultat.

Notons également que l'équivalence entre (a) et (e) est bien connue [2], particulièrement dans le contexte du traitement du signal, où la positivité réelle est souvent utilisée pour assurer la stabilité des filtres.

Finalement, en définissant la matrice

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & & 0 & 0 & & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

de taille $k \times 2(k+1)$, on peut montrer à l'aide d'arguments classiques de dualité [8] que la LMI (1) est faisable si et seulement si la valeur optimale μ du problème d'optimisation LMI

$$\begin{array}{rcll} \mu & = & \min & pXp^\star \\ & & \text{s.t.} & \tilde{R}(S \otimes X)\tilde{R}^\star \succeq 0 \\ & & & X \succeq 0, \quad X \neq 0 \end{array} \tag{5}$$

est strictement positive. Puisque le critère ne peut être négatif, la LMI (1) est infaisable si et seulement si le problème LMI

$$\begin{array}{l} pXp^\star = 0 \\ \tilde{R}(S \otimes X)\tilde{R}^\star \succeq 0 \\ X \succeq 0, \quad X \neq 0, \end{array}$$

initialement proposé dans [7], est faisable.

5 Illustration

5.1 Polynômes continus de troisième degré

Nous illustrons tout d'abord nos résultats dans le cas simple d'un polynôme à temps continu de degré $k = 3$ à coefficients réels. Nous associons au polynôme

$$p(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + p_3 s^3$$

le polynôme réfléchi

$$\tilde{p}(s) = p_0 - p_1 s + p_2 s^2 - p_3 s^3$$

et les polynômes

$$\begin{array}{rcl} n(s) & = & \sqrt{2}(p_0 + p_2 s^2) \\ d(s) & = & \sqrt{2}(p_1 s + p_3 s^3) \end{array}$$

correspondant respectivement aux parties paire et impaire de $p(s)$. Le système linéaire d'équations (3) s'exprime comme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2p_0p_1 \\ 0 \\ 2p_1p_2 \\ 2p_0p_3 \\ 0 \\ 2p_2p_3 \end{bmatrix}.$$

La matrice d'Hermite de $p(s)$ résoud le système ci-dessus, à savoir

$$H = \begin{bmatrix} 2p_0p_1 & 0 & 2p_0p_3 \\ 0 & 2p_1p_2 - 2p_0p_3 & 0 \\ 2p_0p_3 & 0 & 2p_2p_3 \end{bmatrix}$$

et elle est définie positive si et seulement si les racines de $p(s)$ sont dans le demi-plan gauche ouvert.

5.2 Polynôme discret de troisième degré

Lorsque $p(s)$ est un polynôme à temps discret de degré $k = 3$ à coefficients réels, nous définissons son polynôme réfléchi

$$\tilde{p}(s) = p_3 + p_2 s + p_1 s^2 + p_0 s^3$$

et les polynômes

$$\begin{array}{rcl} n(s) & = & \frac{\sqrt{2}}{2}((p_0 + p_3)(1 + s^3) + (p_1 + p_2)(s + s^2)) \\ d(s) & = & \frac{\sqrt{2}}{2}((p_0 - p_3)(1 - s^3) + (p_1 - p_2)(s - s^2)). \end{array}$$

Le système linéaire d'équations (3) s'exprime comme

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} p_3^2-p_0^2 \\ p_2p_3-p_0p_1 \\ p_2^2-p_1^2 \\ p_1p_3-p_0p_2 \\ p_2p_3-p_0p_1 \\ p_3^2-p_0^2 \end{array}\right].$$

La matrice d'Hermite de $p(s)$ résoud le système ci-dessus, à savoir

$$H=\left[\begin{array}{ccc} p_3^2-p_0^2 & p_2p_3-p_0p_1 & p_1p_3-p_0p_2 \\ p_2p_3-p_0p_1 & p_2^2+p_3^2-p_0^2-p_1^2 & p_2p_3-p_0p_1 \\ p_1p_3-p_0p_2 & p_2p_3-p_0p_1 & p_3^2-p_0^2 \end{array}\right]$$

et elle est définie positive si et seulement si les racines de $p(s)$ sont dans le disque unité ouvert.

5.3 Exemple numérique

Soit $p(s)=(s+1)^3=s^3+3s^2+3s+1$ un polynôme stable continu. La matrice d'Hermite de $p(s)$ est

$$H=\left[\begin{array}{ccc} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 16 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{array}\right]\succ 0.$$

Léquation (3) s'écrit

$$n^\star d+d^\star n=R^\star\left[\begin{array}{cc} 0 & H \\ H & 0 \end{array}\right]R=\left[\begin{array}{cccc} 0 & 6 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right].$$

A l'aide de la LMI Toolbox pour Matlab [14], nous obtenons

$$P=\left[\begin{array}{ccc} 3.1858 & 2.7348 & 1.0603 \\ 2.7348 & 7.8099 & 2.7348 \\ 1.0603 & 2.7348 & 3.1858 \end{array}\right]\succ 0$$

comme solution des LMI (1) et (2). Remarquons que $P=H+\tilde{P}$ pour le choix

$$Q=\left[\begin{array}{ccc} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{21} & q_{22} & q_{32} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc} -1.8793 & 2.7396 & -2.8984 \\ 2.7396 & -10.939 & 7.5173 \\ -2.8984 & 7.5173 & -11.416 \end{array}\right]\prec 0$$

dans le système linéaire (4) donné par

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \tilde{p}_{11} \\ \tilde{p}_{21} \\ \tilde{p}_{22} \\ \tilde{p}_{31} \\ \tilde{p}_{32} \\ \tilde{p}_{33} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{22} \\ q_{31} \\ q_{32} \\ q_{33} \end{array}\right],$$

de telle sorte que

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} -2.8142 & 2.7348 & -0.9397 \\ 2.7348 & -8.1901 & 2.7348 \\ -0.9397 & 2.7348 & -2.8142 \end{bmatrix} \prec 0.$$

A présent soit $p(s) = (s+1)^2(s-3) = -3 - 5s - s^2 + s^3$ un polynôme continu instable. La matrice d'Hermite de $p(s)$ est

$$H = \begin{bmatrix} 30 & 0 & -6 \\ 0 & 16 & 0 \\ -6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

et elle est de signe indéfini. Nous pouvons vérifier que la LMI (1) est infaisable puisque la valeur optimale du problème d'optimisation LMI dual (5) est égale à $\mu = 0$ pour le choix

$$X = xx^\star = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \\ 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \\ 27 \end{bmatrix}^\star = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 9 & 27 & 81 & 243 \\ 27 & 81 & 243 & 729 \end{bmatrix} \succeq 0$$

correspondant au vecteur $x = \pi_3(3)$ tel que $px = 0$. Par conséquent, la LMI (2) est également infaisable.

6 Conclusion

Nous avons clarifié les relations existant entre la version scalaire de la formulation LMI de stabilité de matrice polynomiale proposée dans [8] et les critères de stabilité classiques s'appuyant sur les formes quadratiques d'Hermite, l'inégalité de Lyapunov et la positivité réelle stricte.

Ces travaux peuvent être considérés comme une étape préliminaire vers la généralisation du critère d'Hermite aux matrices polynomiales. En effet, il semble qu'il n'existe pas d'extension multivariable satisfaisante au critère d'Hermite. Quelques tentatives furent reportées dans [2] et [11]. Nous espérons que des progrès seront effectués dans cette direction en utilisant les idées exposées dans cet article, puisque la formulation LMI proposée dans [8] est également valable pour les matrices polynomiales.

Cependant, les conditions proposées ne sont probablement pas d'un grand intérêt dans le cadre de l'analyse de stabilité. En effet pour statuer sur la stabilité d'un polynôme donné, le classique critère de stabilité de Routh-Hurwitz (et ses variantes) est bien plus efficace numériquement que la résolution de LMI ou le calcul de valeurs propres de la matrice d'Hermite.

Par contre, il est possible que ces conditions soient intéressantes dans un cadre de synthèse de lois de commande, et en particulier de correcteurs de complexité réduite (retour de sortie statique ou correcteur d'ordre fixé a priori). Quelques résultats préliminaires sont proposés dans [9] où une inégalité dérivée de l'équation (3) est exploitée pour construire des correcteurs robustes d'ordre fixé. D'autres résultats sont décrits dans [10] où le critère d'Hermite permet de dériver pour le problème du retour de sortie statique des inégalités polynomiales matricielles (PMI) directement dans l'espace des coefficients du correcteur. Ces PMI ne contiennent pas de variables additionnelles de Lyapunov et restent donc de taille modérée. Ces PMI, généralement non-convexes, peuvent être résolues numériquement via des relaxations convexes LMI obtenues à l'aide de résultats de géométrie algébrique réelle, voir [10].

Remerciements

Ces travaux ont bénéficié de nombreuses discussions avec Jean-Bernard Lasserre, Dimitri Peaucelle et Denis Arzelier. Je remercie un relecteur anonyme qui détecta une erreur dans une précédente version de l'article, ainsi que Tetsuya Iwasaki pour ses encouragements.

Références

[1] B. D. O. Anderson, N. K. Bose, E. I. Jury. Output Feedback Stabilization and Related Problems - Solution via Decision Methods. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 20, No. 1, pp. 53–66, 1975.

[2] B. D. O. Anderson, R. R. Bitmead. Stability of Matrix Polynomials. International Journal of Control, Vol. 26, No. 2, pp. 235–247, 1977.

[3] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, L. H. Keel. Robust Control: The Parametric Approach. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1995.

[4] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphie, Pennsylvanie, 1994.

[5] F. R. Gantmacher. The Theory of Matrices. Chelsea, New York, 1959.

[6] D. Henrion, S. Tarbouriech, M. Šebek. Rank-one LMI Approach to Simultaneous Stabilization of Linear Systems. Systems and Control Letters, Vol. 38, No. 2, pp. 79-89, 1999.

[7] D. Henrion, G. Meinsma. Rank-one LMIs and Lyapunov's Inequality. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 46, No. 8, pp. 1285–1288, 2001.

[8] D. Henrion, O. Bachelier, M. Šebek. D-stability of Polynomial Matrices. International Journal of Control, Vol. 74, No. 8, pp. 845–856, 2001.

[9] D. Henrion, M. Šebek, V. Kučera. Positive Polynomials and Robust Stabilization with Fixed-Order Controllers. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 48, No. 7, pp. 1178-1186, 2003.

[10] D. Henrion, J. B. Lasserre. Convergent Relaxations of Polynomial Matrix Inequalities and Static Output Feedback. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 51, No. 2, pp. 192–202, 2006.

[11] F. J. Kraus, M. Mansour, M. Šebek. Hurwitz Matrix for Polynomial Matrices. International Series of Numerical Mathematics, Vol. 121, pp. 67–74, Birkhäuser Verlag, Bâle, Suisse, 1996.

[12] V. Kučera. Discrete Linear Control: The Polynomial Approach. John Wiley and Sons, Chichester, Grande-Bretagne, 1979.

[13] H. Lev-Ari, Y. Bistritz, T. Kailath. Generalized Bezoutians and Families of Efficient Zero-Location Procedures. IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 38, No. 2, pp. 170–186, 1991.

[14] The MathWorks, Inc. LMI Control Toolbox for Matlab, Version 1.0.5, 1998.

[15] M. Mansour, B. D. O. Anderson. Kharitonov's Theorem and the Second Method of Lyapunov. Systems and Control Letters, Vol. 20, pp. 39–47, 1993.

[16] P. C. Parks. A New Proof of Hermite's Stability Criterion and a Generalization of Orlando's Formula. International Journal of Control, Vol. 26, No. 2, pp. 197–206, 1977.

[17] R. E. Skelton, T. Iwasaki, K. Grigoriadis. A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design. Taylor and Francis, Londres, 1998.

[18] J. C. Willems et R. Tempo. The Kharitonov Theorem with Degree Drop. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, No. 11, pp. 2218–2220, 1999.