

Stabilisation robuste de systèmes polytopiques par contrôleur d'ordre fixe avec la boîte à outils polynomiale pour Matlab

Didier HENRION

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes, Centre National de la Recherche Scientifique,
7 avenue du Colonel Roche, 31077 Toulouse, cedex 4, France

Institut de Théorie de l'Information et d'Automatique, Académie des Sciences de la République
Tchèque, Pod vodárenskou věží 4, 18208 Prague, République Tchèque

henrion@laas.fr
www.laas.fr/~henrion

Résumé— A l'aide d'une série d'exemples numériques, nous présentons une nouvelle fonction Matlab de la boîte à outils polynomiale permettant de stabiliser robustement à l'aide d'un correcteur d'ordre fixe un système scalaire affecté par une incertitude polytopique.

Mots-clés— Approche polynomiale, commande robuste, systèmes polytopiques, correcteur d'ordre fixe, boîte à outils polynomiale, Matlab.

I. INTRODUCTION

Cet article est un descriptif d'une fonction Matlab¹ intitulée `ptpdes`². Cette fonction permet de stabiliser robustement un système scalaire à incertitude polytopique à l'aide d'un correcteur d'ordre fixe. L'intérêt du problème en commande, le choix du modèle d'incertitude, ainsi que la théorie et l'algorithme contenu dans le code sont décrits en détail dans le rapport [7]. On rappellera ici simplement que l'idée fondamentale consiste à assurer la stabilité robuste en boucle fermée en considérant le polynôme caractéristique comme le numérateur d'une fonction de transfert strictement positive réelle dont le dénominateur est fixé. De cette manière résoudre le problème de synthèse robuste revient à résoudre un problème d'optimisation convexe de type inégalités matricielles linéaires (LMI). Le choix de ce polynôme dénominateur, qualifié de **polynôme central**, est d'une importance capitale pour effectuer la synthèse.

On peut affirmer que le problème de synthèse de correcteurs robustes de complexité réduite pour les systèmes linéaires affectés par des incertitudes paramétriques reste dans son ensemble un problème ouvert. En effet, la plupart des résultats obtenus jusqu'alors sont plutôt des résultats d'analyse, comme par exemple le théorème de Kharitonov ou le théorème des arêtes [1], [3]. Par conséquent, il n'existe à ce jour pratiquement aucun outil permettant d'effectuer une synthèse paramétrique robuste. Notre objectif est précisément de proposer un tel outil, sous la forme d'une fonction Matlab. Dans le présent article nous décrivons ainsi des exemples numériques permettant de sai-

sir les caractéristiques principales de la fonction, et permettant à l'utilisateur potentiel de la tester et de l'exploiter rapidement. Nous insistons en particulier sur le choix du polynôme central.

Afin d'utiliser la fonction, il est préférable d'avoir préalablement installé la boîte à outils polynomiale (Polynomial Toolbox) pour Matlab développée et commercialisée par l'entreprise tchèque PolyX [9]. Cependant, sur simple demande la fonction peut être facilement modifiée afin d'être utilisée indépendamment de la boîte à outils polynomiale.

Dans cet article nous considérons un système scalaire

$$\frac{b(s, q)}{a(s, q)}$$

dont les polynômes dénominateur et numérateur sont affectés par une **incertitude polytopique**. Les composantes du vecteur de paramètres incertains q appartiennent à un polytope Q dont les N sommets q^i sont donnés, c'est-à-dire

$$q \in Q = \text{enveloppe convexe} \{q^1, \dots, q^N\}.$$

Nous recherchons un correcteur

$$\frac{y(s)}{x(s)}$$

d'ordre fixé $\deg x(s)$ avec dénominateur normalisé. Le correcteur est placé dans une configuration de boucle classique. De manière équivalente, nous recherchons les polynômes $x(s)$ et $y(s)$ tels que les racines du polynôme caractéristique polytopique

$$d(s, q) = a(s, q)x(s) + b(s, q)y(s)$$

restent dans une certaine région de stabilité pour tout paramètre admissible $q \in Q$.

Nous considérons des régions de stabilité décrites par une inégalité scalaire quadratique

$$\{s \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}^* S \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} < 0\}$$

¹Matlab est une marque déposée de The MathWorks Inc.

²`ptpdes` est l'abréviation de **polytop** **design**

où l'étoile représente la transposition conjuguée et S est une matrice Hermitienne 2×2 . Par exemple le choix

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

correspond au demi-plan gauche (systèmes à temps continu) et

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

correspond au disque unitaire (systèmes à temps discret).

II. INSTALLATION

La boîte à outils commerciale Polynomial Toolbox version 2.5 qui permet de manipuler les polynômes et matrices polynomiales (voir [9]), le logiciel de domaine public SeDuMi version 1.5 qui permet de résoudre les inégalités matricielles linéaires (LMI, voir [10] et [11]), ainsi que le fichier `ptpdes.m` téléchargeable à l'adresse

www.laas.fr/~henrion/software/ptpdes.m

doivent être installés et visibles depuis le chemin d'accès courant de Matlab. Pour les exemples numériques qui suivent nous avons utilisé la version 6.0 de Matlab sous l'environnement SunOS version 5.8 et une station de travail SunBlade 100. Le paramètre γ dans la fonction `ptpdes` est fixé à 10^{-3} .

III. HÉLICOPTÈRE

Ce premier exemple très simple a pour objectif d'illustrer l'utilisation basique de la fonction `ptpdes`, en insistant notamment sur le rôle joué par le troisième argument d'entrée (le polynôme central) et le quatrième argument d'entrée (la matrice de région de stabilité). Nous conseillons au lecteur de consulter l'aide en ligne de la fonction, obtenue en tapant `help ptpdes` sous Matlab.

Soit le modèle linéarisé simplifié d'un hélicoptère

$$\frac{b(s, q)}{a(s, q)} = \frac{q_1}{s(0, 1s + 1)(s + q_2)}$$

affecté par une incertitude de type intervalle

$$q_1 \in [20; 60], q_2 \in [0; 1].$$

Le polytope d'incertitude Q est donc un rectangle de sommets

$$q^1 = [20 \ 0], q^2 = [20 \ 1], q^3 = [60 \ 0], q^4 = [60 \ 1].$$

Le vecteur de paramètres nominal est le centre du rectangle $q^0 = [40 \ 0.5]$. Nous recherchons un correcteur normalisé de second ordre

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{y_0 + y_1s + y_2s^2}{x_0 + x_1s + s^2}$$

stabilisant robustement le système intervalle.

Afin d'utiliser la fonction `ptpdes`, nous devons disposer d'un certain polynôme, dénommé **polynôme central**. Il peut par exemple s'agir du polynôme caractéristique obtenu en appliquant un correcteur de second ordre stabilisant le système nominal, calculé à l'aide d'une quelconque

méthode de synthèse. Par exemple, avec le correcteur nominal

$$\frac{y^0(s)}{x^0(s)} = \frac{2 + 2,2s + 2,2s^2}{10s + s^2}$$

nous obtenons le polynôme caractéristique nominal

$$\begin{aligned} d(s, q^0) &= a(s, q^0)x^0(s) + b(s, q^0)y^0(s) \\ &= 80 + 88s + 93s^2 + 11s^3 + 2,05s^4 + 0,10s^5. \end{aligned}$$

En appelant la fonction Matlab `ptpdes` avec comme arguments d'entrée les 4 polynômes numérateurs et dénominateurs sommets et le polynôme central $c(s) = d(s, q^0)$ (voir le script ci-dessous), nous obtenons après moins de 5 secondes de calcul le correcteur robuste suivant

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{0,9876 + 0,3045s + 1,5747s^2}{1,6136 + 6,2396s + s^2}.$$

```
% parametres intervalles
```

```
q1int = [20 60]; q2int = [0 1];
```

```
% sommets
```

```
vertex = 1;
```

```
for q1 = q1int,
```

```
    for q2 = q2int,
```

```
        a{vertex} = s*(0.1*s+1)*(s+q2);
```

```
        b{vertex} = q1;
```

```
        vertex = vertex+1;
```

```
    end;
```

```
end;
```

```
% systeme nominal
```

```
q1 = 40; q2 = 0.5;
```

```
a0 = s*(0.1*s+1)*(s+q2); b0 = q1;
```

```
% controleur nominal et poly. caract.
```

```
x0 = 10*s+s^2; y0 = 2+2.2*s+2.2*s^2;
```

```
c = a0*x0+b0*y0;
```

```
% controleur robuste
```

```
[x,y] = ptpdes(a,b,c);
```

La fonction `ptpdes` tente de minimiser la norme Euclidienne du vecteur de coefficients du correcteur. Ici nous obtenons un correcteur de norme 6,79. Comme nous pouvons le voir sur le lieu des racines de la figure 1, la stabilité robuste est assurée mais certains pôles sont très proches de l'axe imaginaire. Afin d'assurer une certaine marge de stabilité, nous pouvons décaler la région de stabilité vers la gauche. Par exemple, nous choisissons le demi-plan décalé $\{s : \text{Re } s < -0,4\}$, c'est-à-dire nous imposons

$$S = \begin{bmatrix} 0,8 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

comme matrice de stabilité.

Dans le script ci-dessus, nous devons juste remplacer l'instruction

```
[x,y] = ptpdes(a,b,c);
```

par

```
[x,y] = ptpdes(a,b,c,[0.8 1;1 0]);
```

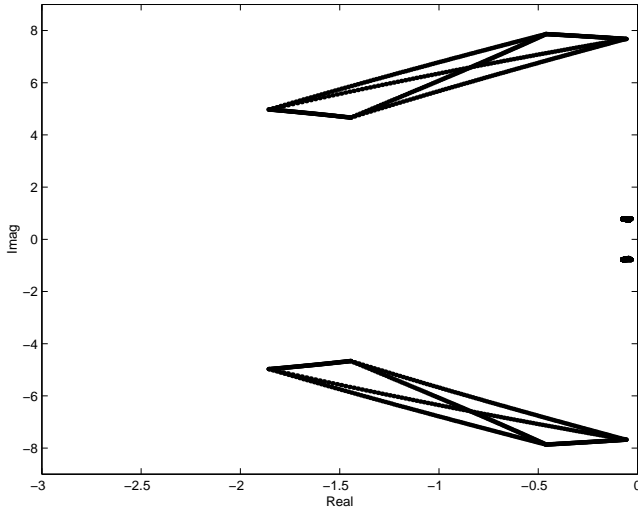


Figure 1. Hélicoptère. Lieu des racines robuste sans marge de stabilité.

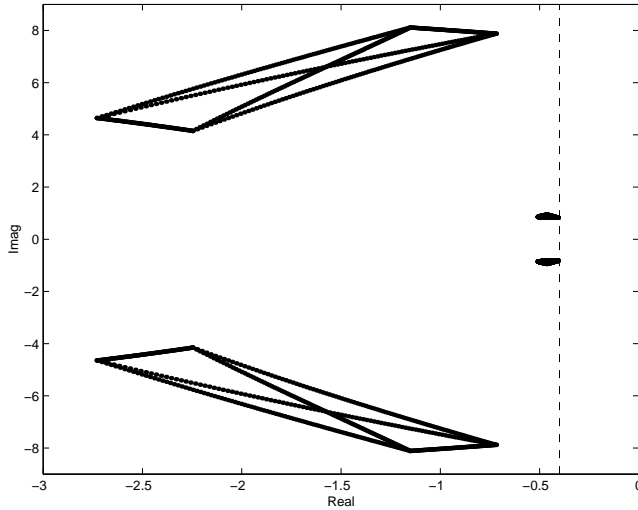


Figure 2. Hélicoptère. Lieu des racines robuste avec marge de stabilité.

En exécutant le script modifié, nous obtenons maintenant un correcteur

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{1,8648 + 2,0638s + 1,9940s^2}{4,3190 + 10,5148s + s^2}$$

de norme 11,9 supérieure à la norme précédente. Nous pouvons vérifier sur le lieu des racines de la figure 2 qu'effectivement la marge de stabilité robuste requise est assurée.

IV. AVION F4E

A l'aide de cet exemple nous montrons comment la fonction `ptpdes` peut stabiliser simultanément un ensemble de systèmes. Tout comme le problème de synthèse paramétrique robuste, le problème de stabilisation simultanée reste encore ouvert [4].

Nous considérons le modèle de mouvement longitudinal d'un avion de chasse F4E étudié par Ackermann [1, §1.4]. L'entrée de commande est la position de l'élévateur, la sortie est le taux d'inclinaison, et le système est linéarisé autour de quatre conditions de vol représentatives dans l'en-

veloppe Mach-altitude :

Mach 0,5	5000 pieds	$a_1(s) = -52,75 + 22,00s + 15,84s^2 + s^3$ $b_1(s) = -163,8 - 185,4s$
Mach 0,85	5000 pieds	$a_2(s) = -122,5 + 34,93s + 17,12s^2 + s^3$ $b_2(s) = -789,1 - 507,8s$
Mach 0,9	35000 pieds	$a_3(s) = -14,64 + 17,51s + 15,33s^2 + s^3$ $b_3(s) = -101,8 - 158,3s$
Mach 1,5	35000 pieds	$a_4(s) = 269,1 + 43,60s + 15,74s^2 + s^3$ $b_4(s) = -251,4 - 304,2s$

Nous recherchons un correcteur de retour de sortie statique stabilisant simultanément les quatre systèmes avec une marge de stabilité de 0,5.

Il est facile de constater que le premier système peut être stabilisé avec les polynômes correcteur $x_1(s) = 1$ et $y_1(s) = -1$. Le polynôme caractéristique résultant

$$c(s) = a_1(s)x_1(s) + b_1(s)y_1(s) = 111,1 + 207,4s + 15,84s^2 + s^3$$

a ses racines $-0,5588$ et $-7,6410 \pm j11,85$ satisfaisant la marge de stabilité. Notons qu'il est indispensable que toutes les racines du polynôme central appartiennent à la région de stabilité considérée. Avec les quatre systèmes sommets $a_i(s)$, $b_i(s)$, le polynôme central ci-dessus $c(s)$ et la matrice de stabilité

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

comme arguments d'entrée, la fonction `ptpdes` renvoie après moins d'une seconde de calcul le correcteur

$$\frac{y(s)}{x(s)} = -0,8698.$$

Nous pouvons vérifier que le correcteur ci-dessus stabilise simultanément les quatre systèmes avec la marge de stabilité requise. Les racines des polynômes caractéristiques $d_i(s) = a_i(s)x(s) + b_i(s)y(s)$ sont données dans la table 1. En fait le correcteur ci-dessus ne stabilise pas unique-

i	racines de $d_i(s)$
1	$-0,5118; -7,665 \pm j10,80$
2	$-1,234; -7,943 \pm j19,85$
3	$-0,5000; -7,413 \pm j9,636$
4	$-1,717; -7,012 \pm j15,33$

Table 1. Avion F4E. Pôles en boucle fermée.

ment les quatre sommets mais également tout système dans l'enveloppe convexe constituée par ces sommets, comme le montre le lieu des racines robuste de la figure 3.

V. AVION À AILE OBLIQUE

Avec cet exemple nous montrons qu'un cinquième argument d'entrée peut être spécifié dans la fonction `ptpdes` afin d'imposer des contraintes structurelles sur le correcteur.

Considérons le modèle d'avion expérimental à aile oblique étudié dans [3, Exemple 11.5.1]

$$\frac{b(s, q)}{a(s, q)} = \frac{q_0 + q_1 s}{q_2 + q_3 s + q_4 s^2 + q_5 s^3 + s^4}$$

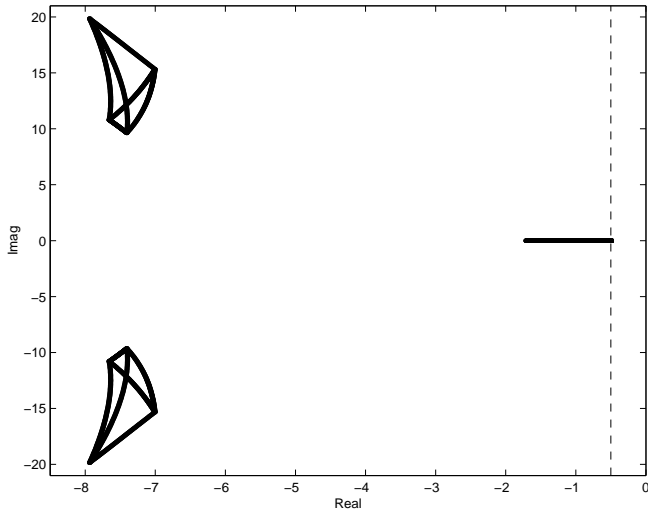


Figure 3. Avion F4E. Lieu des racines robuste.

avec

$$q_0 \in [90; 166], q_1 \in [54; 74], q_2 \in [-0, 1; 0, 1], \\ q_3 \in [30, 1; 33, 9], q_4 \in [50, 4; 80, 8], q_5 \in [2, 8; 4, 6]$$

qui doit être stabilisé avec un correcteur proportionnel-intégral (PI)

$$\frac{y(s)}{x(s)} = K_p + \frac{K_i}{s}$$

Le système intervalle correspond à un polytope $a_i(s)$, $b_i(s)$ de $2^6 = 64$ sommets. On peut vérifier aisément que le choix $K_p = 1$ et $K_i = 1$ stabilise le système sommet

$$\frac{b_1(s)}{a_1(s)} = \frac{90 + 54s}{-0, 1 + 30s + 50s^2 + 2, 8s^3 + s^4}$$

obtenu en fixant tous les paramètres à leurs valeurs minimales admissibles. Avec le choix

$$c(s) = sa_1(s) + (1 + s)b_1(s)$$

comme polynôme central, la fonction `ptpdes` invoquée avec la syntaxe

$$[x, y] = \text{ptpdes}(a, b, c, [], 'pi')$$

ne trouve pas de correcteur PI robustement stabilisant. Cela peut vouloir dire qu'il n'existe pas de correcteur PI robuste pour le système, ou alors que le polynôme central a été mal choisi. Dans la syntaxe ci-dessus le dernier argument d'entrée spécifie que nous désirons un correcteur PI.

En considérant à présent le second système sommet

$$\frac{b_2(s)}{a_2(s)} = \frac{90 + 54s}{-0, 1 + 30s + 50s^2 + 4, 6s^3 + s^4}$$

où nous avons changé uniquement le coefficient de s^3 dans le polynôme dénominateur, le choix

$$c(s) = sa_2(s) + (1 + s)b_2(s)$$

comme polynôme central dans la fonction `ptpdes` s'avère être concluant. Après un peu moins de 5 secondes de calcul, nous obtenons le correcteur PI robuste

$$\frac{y(s)}{x(s)} = 0, 8634 + \frac{0, 6454}{s}$$

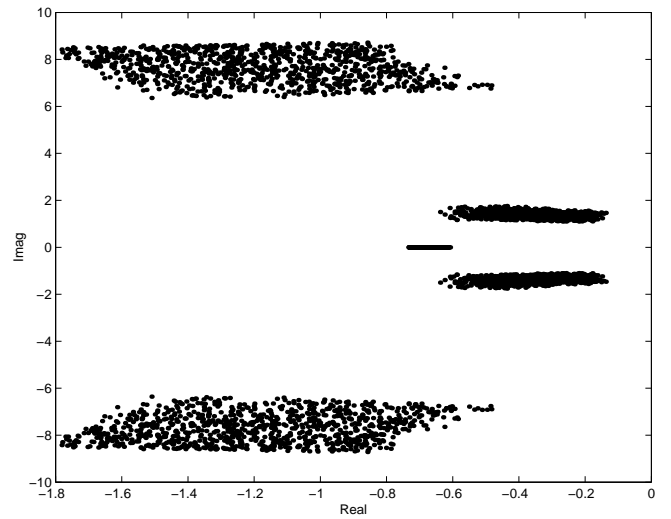


Figure 4. Avion à aile oblique. Lieu des racines robuste.

Le lieu des racines robuste, obtenu en choisissant 1000 systèmes aléatoirement dans le polytope d'incertitude, est représenté sur la figure 4.

VI. SATELLITE

Nous démontrons à présent comment la synthèse nominale sur chaque sommet du système polytopique peut influencer le choix du polynôme central.

Nous considérons un problème de commande de satellite [6], où le modèle du satellite est constitué par deux masses de même inertie reliées par un ressort de constante de couple q_1 et constante d'amortissement visqueux q_2 . La fonction de transfert entre le couple de commande et l'angle d'orientation du satellite est donnée par

$$\frac{b(s, q)}{a(s, q)} = \frac{q_1 + q_2s + s^2}{s^2(2q_1 + 2q_2s + s^2)}$$

où les paramètres incertains varient dans les intervalles

$$q_1 \in [0, 09; 4], q_2 \in [0, 04\sqrt{q_1}10; 0, 2\sqrt{q_1}10]$$

de telle sorte que nous avons un polytope à $2^2 = 4$ sommets $a_i(s)$, $b_i(s)$ qui doit être stabilisé robustement.

Avec le choix $c(s) = (s + 1)^6$ comme polynôme central, la fonction `ptpdes` ne peut pas stabiliser l'ensemble du polytope. Cependant elle peut stabiliser chaque sommet $a_i(s)$, $b_i(s)$ individuellement avec des polynômes correcteur $x_i(s)$, $y_i(s)$. Les racines des polynômes caractéristiques correspondants $d_i(s) = a_i(s)x_i(s) + b_i(s)y_i(s)$ sont données dans la table 2. Le troisième sommet comporte les pôles

i	racines de $d_i(s)$
1	$-0, 4520 \pm j1, 8129; -0, 0365 \pm j0, 8954; -0, 0019 \pm j0, 2533$
2	$-0, 6161 \pm j1, 3829; -0, 2190 \pm j0, 6745; -0, 0237 \pm j0, 2136$
3	$-1, 0484; -0, 0917 \pm j2, 1598; -0, 0425 \pm j0, 5019; -0, 0004$
4	$-0, 2220 \pm j2, 0695; -0, 1695 \pm j0, 5354; -0, 0709 \pm j0, 0045$

Table 2. Satellite. Pôles en boucle fermée obtenus en stabilisant individuellement chaque sommet.

les plus proches de l'axe imaginaire, et donc semble le plus

problématique à stabiliser. Avec le choix

$$c(s) = d_3(s) = 0,0005 + 1,2439s + 1,6531s^2 + 5,6274s^3 + 5,2246s^4 + 1,3172s^5 + s^6$$

comme polynôme central, la fonction `ptpdes` résoud le problème de synthèse robuste après moins d'une seconde de calcul avec le correcteur

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{0,0181 + 0,0170s - 1,4048s^2}{3,6082 + 1,0237s + s^2}.$$

VII. ROBOT

Cet exemple démontre que des correcteurs d'ordres relativement élevés peuvent également être obtenus avec la fonction `ptpdes`.

Considérons le problème de synthèse d'un correcteur robuste pour le modèle ARMAX approché d'un processus de gravure de disque robotisé PUMA 762 [12]. Les coefficients du numérateur et dénominateur de la fonction de transfert identifiée changent en fonction de la position du bras robotisé. Nous considérons des variations de plus ou moins 20% autour des valeurs nominales des paramètres. Le modèle discrétisé de quatrième ordre est donné par

$$\frac{b(z^{-1}, q)}{a(z^{-1}, q)} = \frac{\begin{pmatrix} (0,0257 + q_1) + (-0,0764 + q_2)z^{-1} \\ +(-0,1619 + q_3)z^{-2} + (-0,1688 + q_4)z^{-3} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 - 1,914z^{-1} + 1,779z^{-2} \\ -1,0265z^{-3} + 0,2508z^{-4} \end{pmatrix}}$$

où

$$|q_1| \leq 0,00514; |q_2| \leq 0,01528; |q_3| \leq 0,03238; |q_4| \leq 0,03376.$$

Le polynôme caractéristique du système en boucle fermée est

$$d(z, q) = z^{12}[(1 - z^{-1})a(z^{-1}, q)x(z^{-1}) + z^{-5}b(z^{-1}, q)y(z^{-1})]$$

où le terme $1 - z^{-1}$ est introduit dans le dénominateur du correcteur afin d'annuler l'erreur de position lorsque les paramètres changent. Avec le polynôme central

$$c(z) = z^{19}$$

la fonction `ptpdes` renvoie après 14 secondes de calcul le correcteur robuste d'ordre 7

$$\frac{y(z^{-1})}{x(z^{-1})} = \frac{\begin{pmatrix} -0,2863 + 0,2928z^{-1} + 0,0221z^{-2} - 0,1558z^{-3} \\ +0,0809z^{-4} + 0,1420z^{-5} - 0,1254z^{-6} + 0,0281z^{-7} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 + 1,1590z^{-1} + 0,9428z^{-2} + 0,4996z^{-3} \\ +0,3044z^{-4} + 0,4881z^{-5} + 0,4003z^{-6} + 0,3660z^{-7} \end{pmatrix}}$$

Le lieu des racines robuste, obtenu en choisissant 1000 systèmes aléatoires dans le polytope d'incertitude, est représenté sur la figure 5.

VIII. OPTIMISATION DE LA MARGE DE STABILITÉ

Finalement nous montrons comment la marge de stabilité robuste peut être améliorée par un choix adéquat du polynôme central.

Nous considérons comme dans [5, §11.3] le problème de stabilisation robuste du système

$$\frac{b(s, q)}{a(s, q)} = \frac{q(s-1)}{(s+1)(s-2)}$$

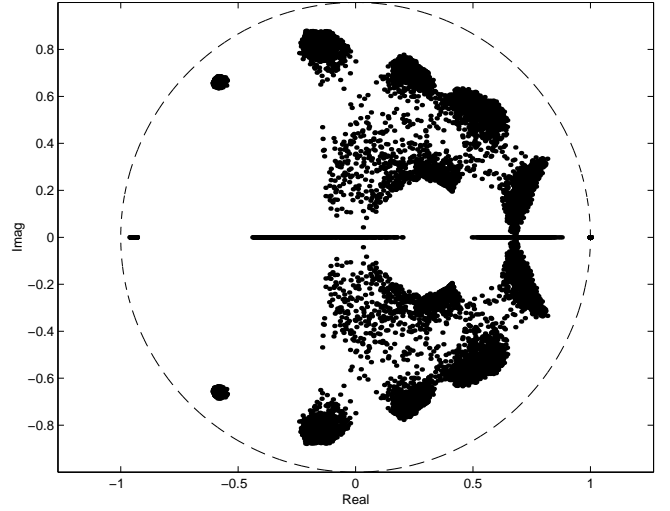


Figure 5. Robot. Lieu des racines robuste.

pour tout gain réel q dans l'intervalle $[1; k_1]$. Le polytope d'incertitude est donc constitué de 2 sommets seulement. Dans [5] il est démontré qu'un correcteur robuste (d'ordre arbitrairement élevé) existe si et seulement si $k_1 < 4$. La méthode de synthèse proposée, basée sur l'interpolation de Nevanlinna-Pick, résulte généralement en des correcteurs d'ordres très élevés. Dans [5] un correcteur d'ordre huit est calculé pour $k_1 = 3,5$.

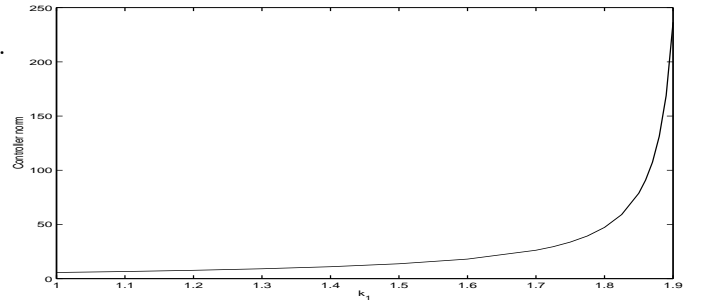


Figure 6. Norme du correcteur de premier ordre en fonction de la borne supérieure de gain k_1 pour le polynôme central $c(s) = (s+1)^3$.

A l'aide du critère de stabilité d'Hurwitz, nous pouvons vérifier qu'il n'y a pas de correcteur statique stabilisant le système. Nous essayons donc le polynôme central $c(s) = (s+1)^p$ avec $p \geq 3$ comme argument d'entrée de la fonction `ptpdes` afin d'obtenir un correcteur d'ordre $p-2 \geq 1$. Pour $p = 3$ nous représentons sur la figure 6 la norme Euclidienne du correcteur de premier ordre obtenu en fonction de k_1 . Il est rappelé que la fonction `ptpdes` est conçue pour minimiser la norme Euclidienne sur l'ensemble des correcteurs possibles. Sur la figure 7 nous représentons en fonction du degré p la valeur maximale de k_1 pour laquelle la fonction `ptpdes` renvoie un correcteur robuste lorsque le polynôme central est fixé à $c(s) = (s+1)^p$. Pour des valeurs de p supérieures à 15 nous atteignons les limites du solveur SeDuMi, et la fonction échoue pour des raisons numériques.

Par la suite nous décrivons une heuristique pour améliorer la marge de stabilité à l'aide de correcteurs

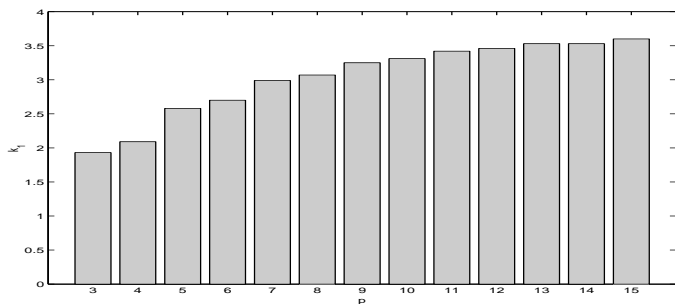


Figure 7. Valeur maximale de la borne supérieure de gain k_1 pour laquelle un correcteur robuste de premier ordre est obtenu à partir du polynôme central $c(s) = (s + 1)^p$.

d'ordres faibles. Soit $k_1 = 2$. D'après les résultats ci-dessus, nous savons que $c(s) = (s + 1)^3$ n'est pas un choix adéquat de polynôme central. Cela peut signifier que les racines du polynôme central $c(s)$ ne sont pas bien choisies. Si l'on essaye de déplacer une racine vers l'axe imaginaire, comme par exemple dans $c(s) = (s + 1)^2(s + 0,1)$, la fonction `ptpdes` échoue également. Par contre, en essayant la direction opposée, par exemple $c(s) = (s + 1)^2(s + 10)$, la fonction renvoie un correcteur robuste de premier ordre

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{254,9 + 348,1s}{-327,9 + s}.$$

En conservant ce choix de polynôme central $c(s)$, la fonction `ptpdes` renvoie un correcteur de premier ordre jusqu'à $k_1 = 2,38$, et donc nous avons amélioré la marge de stabilité sans augmenter l'ordre du correcteur. En suivant cette stratégie et en déplaçant les racines de $c(s)$ de manière appropriée, nous avons été capables de stabiliser robustement le système pour $k_1 = 2,59$ et $c(s) = (s + 0,5)(s + 1)(s + 100)$ avec le correcteur de premier ordre

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{1292 + 1773s}{-1731 + s}.$$

Cette marge de stabilité pourrait éventuellement être améliorée avec d'autres essais.

À l'aide de la même démarche, nous avons pu stabiliser robustement le système pour $k_1 = 3,5$ avec un correcteur de troisième ordre

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{240,8 + 755,5s + 871,7s^2 + 420,1s^3}{-423,5 - 739,8s - 409,5s^2 + s^3}$$

et

$$c(s) = (s + 0,5)^3(s + 10)(s + 100)$$

comme polynôme central.

IX. CONCLUSION

Comme l'illustrent tous les exemples numériques, le choix du polynôme central est fondamental pour effectuer une synthèse robuste avec la fonction `ptpdes`. De manière schématique, on peut dire qu'un choix raisonnable de polynôme central consiste en un polynôme caractéristique atteignable en boucle fermée, et duquel le système incertain ne s'éloignera pas trop. Il est bien sûr parfois difficile de trouver le bon polynôme central, et afin d'éviter une recherche aveugle certaines connaissances sur la dynamique

du système pourront s'avérer utiles. Malheureusement, le problème qui consiste à déterminer à la fois les polynômes correcteur $x(s), y(s)$ et le polynôme central $c(s)$ est un problème difficile d'optimisation non convexe.

Il est nécessaire de souligner que le problème d'optimisation de marge de stabilité tel qu'il est posé pour l'exemple du paragraphe VIII ne présente qu'un intérêt pratique très limité. En effet, on peut démontrer qu'il n'est pas possible d'obtenir une marge de phase satisfaisante pour ce système, et donc on peut difficilement qualifier de robuste le correcteur obtenu en maximisant seulement la marge de gain [2]. De manière générale, on peut affirmer que la robustesse en boucle fermée ne peut pas être assurée uniquement par placement de pôles. Il faut aussi considérer d'autres critères, comme par exemple la norme des fonctions de sensibilité [8].

Nous travaillons actuellement sur une application de ces techniques aux systèmes linéaires affectés par des incertitudes de type ellipsoïdal ou bornées en norme. Ces idées peuvent également s'étendre sans problème aux systèmes multivariables, c'est-à-dire aux matrices polynomiales [7], et nous pensons que c'est un domaine de recherche prometteur.

REMERCIEMENTS

Un grand merci à M. Šebek et Z. Hurák pour avoir testé la routine décrite dans cet article. Merci aussi à V. Kučera, M. Kvasnica, D. Arzelier et D. Peaucelle pour de nombreuses et fructueuses discussions. Les commentaires constructifs des rapporteurs ont été également appréciés.

RÉFÉRENCES

- [1] J. Ackermann. Robust Control. Systems with Uncertain Physical Parameters. *Springer Verlag*, Berlin, 1993.
- [2] K. J. Åström. Limitations on Control System Performance. *European Journal of Control*, Vol. 6, No. 1, pp. 2-20, 2000. Voir également www.control.lth.se/~kja/limitations.pdf
- [3] B. R. Barmish. New Tools for Robustness of Linear Systems. *MacMillan*, New York, 1994.
- [4] V. D. Blondel, J. N. Tsitsiklis. A Survey of Computational Complexity Results in Systems and Control. *Automatica*, Vol. 36, pp. 1249-1274, 2000. Voir également www.inma.ucl.ac.be/~blondel/publications/99BT-survey.pdf
- [5] J. C. Doyle, B. A. Francis, A. R. Tannenbaum. Feedback Control Theory. *MacMillan*, New York, 1992.
- [6] G. J. Franklin, J. D. Powell, A. Emani-Naeini. Feedback Control of Dynamic Systems. *Addison-Wesley*, Reading, 1986.
- [7] D. Henrion, D. Arzelier, D. Peaucelle. Positive Polynomial Matrices and Improved LMI Robustness Conditions. Rapport LAAS-CNRS No. 01389, Toulouse, France, Septembre 2001. Disponible à l'adresse www.laas.fr/~henrion/papers/varadd.ps.gz
- [8] J. Langer, I. D. Landau. Combined Pole Placement/Sensitivity Function Shaping Method using Convex Optimization Criteria. *Automatica*, Vol. 35, No. 6, pp. 1111-1120, 1999.
- [9] PolyX Ltd. The Polynomial Toolbox for Matlab version 2.5. Prague, République Tchèque, Janvier 2001. Consulter www.polyx.cz
- [10] J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a Matlab Toolbox for Optimization over Symmetric Cones. *Optimization Methods and Software*, Vol. 11-12, pp. 625-653, 1999. La version 1.5 est disponible à l'adresse fewcal.kub.nl/sturm/software/sedumi.html
- [11] D. Peaucelle, D. Henrion, Y. Labit. User's Guide for SeDuMi Interface 1.01 : Solving LMI Problems with SeDuMi. Rapport LAAS-CNRS No. 01445, Octobre 2001. Disponible à l'adresse www.laas.fr/~peaucell/sedumiint.html
- [12] Y. Tong, N. K. Sinha. A Computational Technique for the Robust Root Locus. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 41, No. 1, pp. 79-85, 1994.