Introduction à l'Algorithmique Distribuée/Répartie

François Vernadat
vernadat@laas.fr / vernadat@insa-toulouse.fr

INSA-DGEI – LAAS-CNRS

2015

INSA
TOULOUSE

Outline

1. Introduction
   - Terminologie, Exemples
   - Le Contrôle : centralisé Vs réparti
   - Propriétés attendues dans un Système Réparti
   - Qualité d'un algorithme réparti
   - Panorama du cours

Définitions

#1 "Un systéme distribué est un système qui s'exécute sur un ensemble de machines sans mémoire partagée, mais que pourtant l'utilisateur voit comme une seule et unique machine." – A. Tanenbaum

#2 "Un systéme réparti est un système qui vous empêche de travailler quand une machine dont vous n'avez jamais entendu parler tombe en panne" – L. Lamport *(ndlc : exemple NFS (Network file system)*

#3 "Un systéme réparti est un système (informatique) dans lequel les ressources (calcul, stockage, utilisateurs) et le **contrôle** *ne sont pas centralisés*" .

#4 " Ensemble d'agents sans mémoire commune *coopérant* via un système de communication asynchrone "
=> les agents ont des capacités de traitement (processeurs), de stockage (mémoire), de communication avec le monde extérieur (capteurs, actionneurs)

Introduction (suite)

Pourquoi répartir

- Besoin de communication et de partage d'informations (système géographiquement réparti)
- Partage de ressources (programmes, données, services)
- Besoin de systèmes à haute disponibilité
- possibilité d'évoluer, critère économique, ...

Exemples type :

Réseaux (ordinateurs, capteurs/actionneurs), WWW, NFS, Peer to peer, Contrôle aérien, Systèmes bancaires, ...

Introduction (suite)

Remarques

Systèmes souvent dynamiques :

Nombre d'agents et/ou Topologie du graphe de communication

Pas de Temps global

Systèmes vs Algorithmes ($\leftarrow$ terminaison)

Avantages Escomptés :

Exploitation du //

$\Uparrow$ Puissance de Calcul

$\Uparrow$ Meilleure utilisation des ressources

$\Uparrow$ Fiabilité (redondance)

Inconvénient :

COMPLEXITÉ

Problème de la connaissance mutuelle

Caractéristiques

1. Agents sans mémoire commune
   Connaissance sur les autres $\leftarrow$ Communication
2. Communication Asynchrone
   - communication +/- fiable,
   - délai arbitraire (fini mais non borné)

Conséquences

1. Connaissance d'un Agent sur les autres est toujours sujette à caution (informations possiblement périmées)
2. Pas de connaissance a priori de l'état global de son environnement (sa reconstruction est possible mais coûteuse)
   $\Rightarrow$ **Coopération <u>difficile</u>**

Paradoxe de la connaissance dans un contexte asynchrone

Pour coopérer, les agents doivent avoir une connaissance commune
Pour obtenir cette connaissance commune, ils doivent communiquer
Toute communication "asynchrone" affaiblit la connaissance commune

Le Contrôle

Nécessité d'un contrôle

Evolution du Système $\mapsto$ évolution en // des $\neq$ agents
PB : Interdépendances (entre agents, sur des ressources, sur des données) interdisent certaines évolutions

Exemples

- Exclusion mutuelle, Lecteurs/Ecrivains
  variable v partagée par deux agents ne peut être écrite et lue simultanément
- Producteur/Consommateur
  $NPP - NPC \leq Stockage\_Consommateur$

  Pb du choix distant
  Illustré en TP Systèmes Concurrents (semestre suivant)

Système distribué/réparti

Eléments du Système : Agents, Données, Réseau, Contrôle

Agents *répartis* géographiquement

Données *distribuées (dupliquées & réparties)* sur les agents

Contrôle lui-aussi distribué entre les agents (à suivre)

ex #1 : Duplication des données

	S_1	S_2	...	S_n
n copies de D	D_1	D_2	...	D_n

$\Uparrow$ Accès + facile, Tolérance aux pannes

$\Downarrow$ (Donnée Variable) Assurer la cohérence des copies multiples

ex # 2 : Répartition des données

	S_1	S_2	...	S_n
$E = \bigcup_{i \in I} e_i$	e_1	e_2	...	e_n

$\Uparrow$ Meilleure répartition, Confidentialité

$\Downarrow$ Accès à l'info (reconstitution)
Cohérence relative des données $\sum_{i \in I} e_i = Cste$

Contrôle centralisé Vs distribué

Contrôle Centralisé

Un site particulier (défini statiquement) joue le rôle central d'arbitre :

– L'arbitre prend toutes les décisions.

– Il a généralement besoin de connaissances disséminées dans le système.

Avantages/Inconvénients

(+) Trés Simple (modulo le **pb** de connaissance)

(-) // disparaît, possible goulot d'étranglement, panne de l'arbitre **fatale**

$\mapsto$ Les avantages escomptés de la distribution disparaissent

Contrôle Distribué

Pas de chef/arbitre statiquement défini

- Agents égaux en droit et en devoir

Avantages/Inconvénients

(+) Pannes possibles ($\mapsto$ fonctionnement dégradé), // "maximum"

(-) Complexe

$\mapsto$ Les avantages escomptés de la distribution persistent

Influence de la topologie :

Certaines topologies facilitent la répartition du contrôle (anneaux, arbres, ...)

$\exists$ Algorithmes répartis associés pour se ramener à ces topologies

Propriétés attendues dans un Système Réparti

Classification de Leslie Lamport

1. Propriété de sûreté (safety)
   Enoncé type : "*Rien de mauvais ne peut arriver*"
   ex : jamais deux agents écrivant simultanément la même ressource
   ex : deux philosophes adjacents ne peuvent manger simultanément
2. Propriété de vivacité (liveness)
   Enoncé type : "*Quelque chose de bon finira par arriver*"
   ex : un agent en attente pour écrire finira par écrire
   ex : absence de famine pour les philosophes

Propriété : Toute propriété d'un système réparti peut être exprimée comme une combinaison de propriétés de sûreté et de vivacité.

Leslie Lamport – Prix Dijkstra 2000, Prix Turing 2013

Chercheur américain spécialiste de l'algorithmique répartie
Safety/Liveness, Causalité & Horloges de Lamport (cf chapitre suivant)
Algorithmes répartis, Temporal logic of actions (TLA), Latex (!), ...

Qualité d'un algorithme réparti

Caractéristiques

Générales

- Simplicité
  structure de données sur chaque site, messages, ...
- Nombre de messages
  voir chapitres Mutex et gestion des données distribuées
- Taille des messages
- Résistance aux Pannes,
- Autostabilisant (se dit d'un système/algoritme qui après une défaillance revient de lui-même à un fonctionnement correct)

Spécifiques

- Exclusion mutuelle : Temps minimum entre deux C.S consécutives
- Diffusion : Temps de propagation
- ...

Rapide panorama du cours

Quelques problèmes classiques

- Election (Tirage au sort),
- Exclusion mutuelle,
- Gestion des données distribuées,
- Détection de la terminaison

Quelques Outils Génériques

- Temps causal,
- Phases,
- Vagues,
- Consensus, Quorums

Topologies d'intérêt

- Arbres couvrants (diffusion, terminaison, mutex)
- Anneaux (mutex, équité)

Outline

Introduction

Motivation

Absence de temps global/physique dans un système réparti (SR)

Temps Logique $\mapsto$ Permettre de reconstituer une notion de temps - et l'ordre associé entre les différents événements - dans un SR

Temps Logique/Causal

Temps logique calculé localement

$\rightarrow$ Ordonnancement local des événements

$\rightarrow$ Etablir des propriétés entre ceux-ci

$\rightarrow$ Simplifier le Contrôle

$\rightarrow$ Permettre de représenter graphiquement l'exécution **normalisée** d'un SR via des chronogrammes respectant la causalité/parallélisme

(ordonnée = ref du site / abscisse = horloge de Lamport)

Causalité

Modèle d'exécution d'un SR

– Système composé de n sites reliés par des canaux *fiables* (i.e. sans perte) mais avec délai d'acheminement arbitraire

– Exécution d'un système : Ensemble d'événements où
– Evénement : émission, réception, evt interne

Relation de Causalité (potentielle)

Relation régie par 2 contraintes "physiques"

C_1 : Les événements qui se déroulent sur un site sont totalement ordonnés (même si cet ordre est arbitraire)

C_2 : Pour un message M, l'événement associé à son émission précède l'événement associé à sa réception

Ordre Causal $\leadsto$

Définition de $\leadsto$

$A \leadsto B =_{def}$ "A est possiblement une cause de B" ssi

1. $\exists$ un message M tel que :
   – A corresponde à l'émission de M et
   – B corresponde à sa réception
2. A et B ont eu lieu sur le même site et A avant B
3. $\exists C : A \leadsto C$ et $C \leadsto B$ (transitivité)

Propriétés de $\leadsto$

- Relation d' **ordre strict** (i.e., transitif, irréflexif, antisymétrique) **partiel**

  Par ex pour les vecteurs, $\leq$ est un ordre partiel.

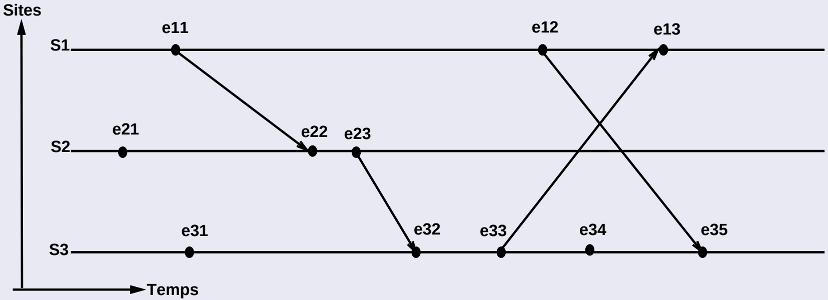
  Ainsi : $\left|\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right| \begin{array}{c} \not\leq \\ \not\geq \end{array} \left|\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right|$

Indépendance causale (notée $\wr$)

- $A \wr B$ ssi $\neg(A \leadsto B) \wedge \neg(B \leadsto A)$
- $\wr$ va permettre de rendre compte du parallélisme

Ordre Causal : Chronogrammes

Chronogramme



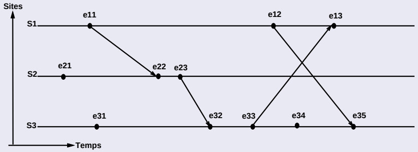
3 Sites (Agents) : S1, S2, S3

3 événements internes : e21, e31, e34

4 messages : e11-e12, e23-e32, e33-e13, e12-e35

Ordre Causal : Chronogrammes (suite)

Causalité



$$e11 \leadsto e32 \text{ car } \left| \begin{array}{l} e11 \leadsto e22 \ (1) \\ e22 \leadsto e23 \ (2) \\ e23 \leadsto e32 \ (1) \end{array} \right. \quad + \text{ transitivité } (3)$$

$e12 \wr e34$ car $e34 \not\leadsto e12$ et $e12 \not\leadsto e34$

- Chemin causal : suite d'événements directement contigus pour $\leadsto$

  Exemples : (e11, e12, e13), (e11, e22, e23, e33, e13), (e11, e22, e23, e33, e34, e35), etc

  nb : les preuves seront basées sur des récurrences sur la longuer des chemins causaux.

- Indépendance causale $\not\equiv$ Absence de Cause Commune

  Ainsi $e12 \wr e34$ et ($e11 \leadsto e34$ et $e11 \leadsto e12$)

Horloges Logiques de Lamport (1978)

Ordre de Lamport $\prec$

$\prec$: Ordre calculé de facon répartie par chaque site au fur et à mesure de l'exécution du système

$\prec$ est un ordre **total** "cohérent" avec l'ordre causal (qui lui est **partiel**)

cohérence : Si $A \leadsto B$ Alors $A \prec B$

Horloges de Lamport

Chaque site (i) dispose d'une horloge logique H_i (initialisée à 0)

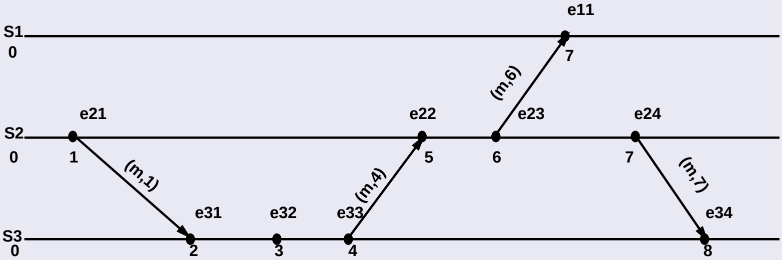
Tout message envoyé est estampillé par la valeur de l' horloge locale

Evolution des Horloges

- R_1 : Entre 2 événements locaux, un site incrémente son horloge locale de 1
  $H_i := H_i + 1$
- R_2 : A la réception d'un message estampillé par k, le site i recale
  son horloge ainsi : $H_i := Max(H_i, k) + 1$

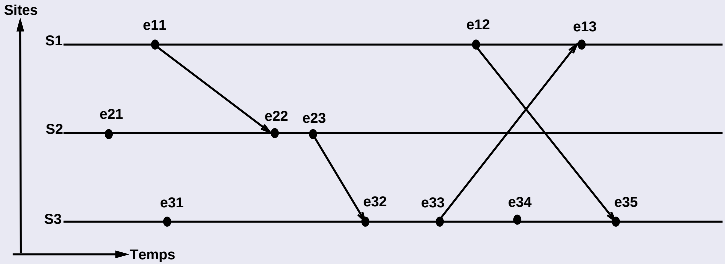
Horloges de Lamport

Exemple



Horloges de Lamport

Exercice



1. Donnez les horloges de Lamport des événements représentés ci-dessus
2. $e11$ et $e31$ sont-ils causalement ordonnés ?
3. Idem pour $e13$ et $e34$?
4. Quel rapport avec leurs estampilles ?

Ordre de Lamport

Définition de $\prec$

Estampillage de Lamport $\mathcal{E} : Evt \mapsto \mathbb{N}$ Estampillage de Lamport
$A \mapsto \mathcal{E}(A)$

$\prec (\subset Evt \times Evt) =_{def} A \prec B$ ssi $\mathcal{E}(A) < \mathcal{E}(B)$

Propriété de cohérence

Si $A \rightsquigarrow B$ Alors $A \prec B$ preuve par récurrence sur "$| \rightsquigarrow |$"

Corollaire

$\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(B) \Rightarrow A \wr B$
(car $\mathcal{E}(A) \geq \mathcal{E}(B) \Rightarrow \neg(A \rightsquigarrow B)$)

En résumé

$\prec$ est un ordre total (large) cohérent avec la causalité
$\mapsto$ ordre total **strict** (en incorporant l'identité des sites)

Ordre total strict dynamiquement calculé $\mapsto$ Résolution distribuée de conflicts

Application à la résolution distribuée de conflits

Algorithme (schéma) d'exclusion mutuelle à base de permissions (bloquantes)

– Pour entrer en section critique (SC), un site demande la permissions des autres sites.

– Il entre en section critique lorsqu'il a obtenu toutes les permissions. Il libère tous les sites à sa sortie de section critique.

– Un site *oisif* accorde sa permission et se bloque en attente d'un message de libération

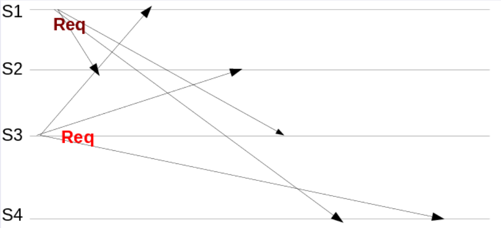
Propriétés à garantir

– Respect de l'exclusion mutuelle : un processus, au plus, présent en section critique (SC) (sûreté)

– Un processus en attente de SC, l'obtient en temps fini (vivacité)

Application à la résolution distribuée de conflits (suite)

Quid des requètes concurrentes ?



S3 et S1 sont en conflits pour l' accès à la CS

$\mapsto$ "Interblocage" car le protocole ne prévoit rien

S1 attend l'autorisation de S3 tandis que S3 attend l'autorisation de S1

Interblocage

L'interblocage se produit lorsque deux (ou plus) processus concurrents s'attendent mutuellement : ici S1 et S3

nb : Un interblocage conduit à un blocage mais tout blocage ne procède pas d'un interblocage.

Application à la résolution distribuée de conflits (suite)

Résolution de l'interblocage par des priorités

Priorité **statique** :

+ Utiliser le nom des sites pour établir une priorité entre ceux-ci
+ Signer les messages émis

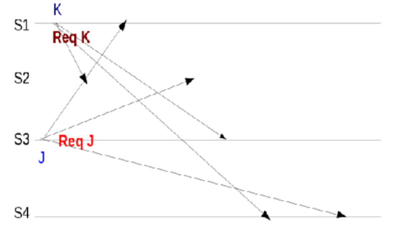
Résolution : S1 est plus prioritaire que S3. Il considère la requète de S3 comme sa permission. S3 sait que sa requète est moins prioritaire que celle de S1 ; il se bloque jusqu'à la réception du message de libération.

Ca fonctionne mais ... mécanisme **inégalitaire** !

Priorité **dynamique** (à l'aide de compteurs ou d'horloges de Lamport)

les requètes sont estampillées par la valeur de l'Horloge de Lamport

ses valeurs sont utilisées pour décréter les priorités des requètes



Horloges de Lamport (fin)

Horloges de Lamport / Compteurs

+ Solution générique et répartie pour résoudre les conflits
  Alternative par "Tirage au sort" vue plus tard
- Comment borner les compteurs/horloges ?
  (Ricart & Aggrawala, Lamport, ...)

Lamport Variante

Incrémentation des horloges ($inc > 0$)

$+d$ dans R_1 où d durée de l'événement associé

$+c$ dans R_2 où c durée de la communication

$\mapsto h \approx$ temps nécessaire à la réalisation de l'événement associé.

Bilan provisoire (1979)

$\rightsquigarrow$, la relation de causalité est un ordre partiel

$\prec$, l'ordre de Lamport, est total !

Propriété de cohérence : $A \rightsquigarrow B \Rightarrow A \prec B$ Quid de $\Leftarrow$?

Horloges vectorielles (Fidge & Mattern (88/89)

Principe

Chaque site est doté d'un vecteur d'horloges $Vh_i[1 \ldots n]$

Tout message est estampillé par le vecteur d'horloges de l'émetteur

Interprétation : $Vh_i(j) \approx$ "Connaissance" du site i sur le "comportement" du site j

Evolutions des Horloges

R_1 : Avant tout événement, S_i incrémente la composante de son horloge $Vh_i(i) := Vh_i(i) + 1$

R_2 : A la réception d'un message estampillé par VH, le récepteur (i) recale son vecteur d'horloges ainsi : $\forall j \in [1..n]$: $Vh_i(j) := Max(Vh_i(j), VH(j))$

Ordre de Fidge & Mattern (FM) $\prec$

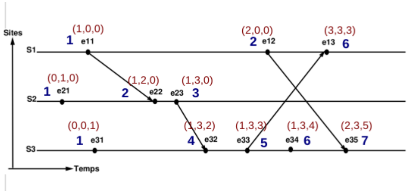
Estampillage de FM : $\gamma : Evt \mapsto \mathbb{N}\ A \mapsto \gamma(A)$

$< (\subset Evt \times Evt) =_{def} A < B$ ssi $\gamma(A) < \gamma(B)$ ($<$ est un ordre partiel)

Propriété Adéquation : $A \rightsquigarrow B$ ssi $A < B$ par récurrence sur "$| \rightsquigarrow |$"

Corollaire : $\gamma(A) \# \gamma(B) \Leftrightarrow A \wr B$

Horloges vectorielles FM : Exemple



Rappel

$$e11 \rightsquigarrow e32 \text{ car } \left| \begin{array}{l} e11 \rightsquigarrow e22 \ (1) \\ e22 \rightsquigarrow e23 \ (2) \\ e23 \rightsquigarrow e32 \ (1) \end{array} \right. + \text{transitivité } (3)$$

$e12 \wr e34$ car $e34 \not\rightsquigarrow e12$ et $e12 \not\rightsquigarrow e34$

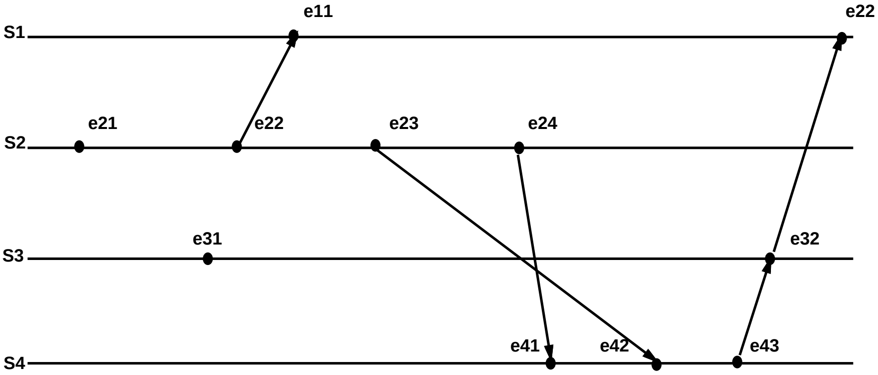
Exercice : Que peut-on dire des couples d'événements suivants ?

$e21\&e11$ $e21\&e32$ $e22\&e32$

$e11\&e32$ $e11\&e23$

Comparatif O.G, Lamport F&M (exercice)

où **O.G est un Observateur Global qui voit/note tout**



O.G, Lamport F&M : Renseigner le tableau ci-dessous

	e21	e31	e22	e11	e23	e24	e41	e42	e43	e32	e22
L											
F & M											
O.G											

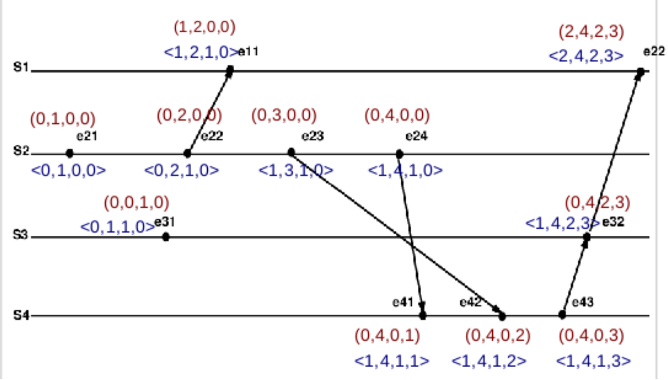
Moralité

F&M offre la meilleure observation

Paradoxalement, une vision centrale n'aide pas ! ! ! !

Application de F&M au debbuging réparti

où **O.G est un Observateur Global qui voit/note tout**



Autre application de F&M : Diffusion causale

Ordre Causal : Propriété caractérisant la diffusion des messages

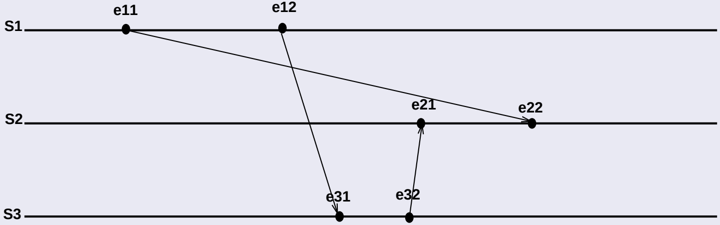
Medium $\models$ Ordre Causal ssi

$\forall P_i, P_j, P_k, \forall m_1$ émis sur $c_{ij}, \forall m_2$ émis sur c_{kj} :

$emission_i(m_1) \prec emission_k(m_2) \Rightarrow reception_j(m_1) \prec reception_j(m_2)$

Prop : Ordre Causal $\Rightarrow$ Ordre Fifo (réciproque fausse)

Exemple de violation de l'ordre causal : e22 devrait arriver avant e21



Algos de "diffusion causale" basés sur F&M

Solution : e21 est mis en attente et ne sera délivré qu'après e22

Applications : Jeux distribués, Applications militaires

Outline

3. Synchronisation par Phases
   - Algorithmes à phases
   - Calcul phasé de tables de routages optimaux
   - Algorithme de Calcul des Tables de routages
   - Schéma Général

Synchronisation par phases

Définitions de Base

Synchronisation : Ens de Règles (mécanismes) permettant de contrôler l'évolution d'un S.R

Phases : Concept générique permettant de *résoudre* le contrôle réparti d'une *certaine classe* de calculs répartis.

Classe de calculs considérés :

P_1	P_2	$\dots$	P_n	N sites
d_1	d_2	$\dots$	d_n	N données

Calcul de $R_i = F(d_1, d_2, \dots d_n)$

- $R_i = R_j \quad \forall (i,j) \rightsquigarrow$ PB Election (Réunion, Négociation)
- $R_i \neq R_j \quad \rightsquigarrow$ Tables de Routage (optimaux)
Arbres de Recouvrement de poids minimaux

Algorithme $\mapsto$ Schéma d'algoritme

Gallager 1983 : Calcul de tables de routages dans les réseaux

Konig 1988 : Schéma général d'algorithme à "Phases"

Algorithmes par phases

Concept de Phases

- Tous les sites ont le même comportement
  (symétrie "$\rightsquigarrow$" Distribué)
- Phase : | a) Envoyer un message à chacun de ses voisins
  b) Recevoir un message de chacun d'eux
  c) Calcul local (en fonction de la connaissance acquise)

Algorithme par Phases

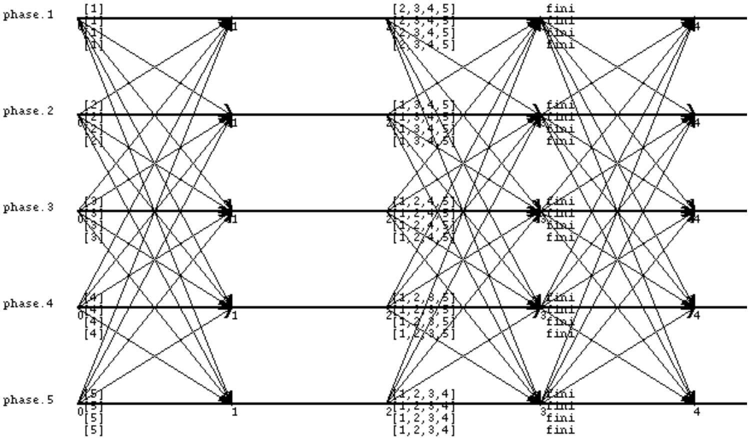
$$\left\{\begin{array}{ll} \text{I]} & \text{Initialisation} \\ \text{II]} & \text{Phases}^* \\ \text{III]} & \text{Terminaison} \end{array}\right. \qquad \approx \text{"Itération Répartie"}$$

Remarques

Exécution phasée $\rightsquigarrow$ Couplage) trés fort entre les $\neq$ sites :
S_i peut commencer la phase k avant $S_{"i+1"}$, mais S_i ne terminera pas la phase k sans que $S_{"i+1"}$ ne l'ait commencée.

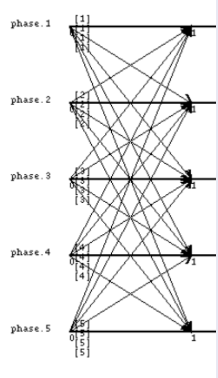
Résoudre la détection répartie de la **Terminaison**

Chronogrammes types d'Algorithmes par phases : Graphe Complet

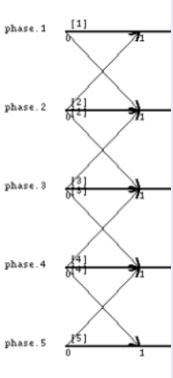


Chronogrammes d'algorithmes phasés et Topologie
exo : Retrouver la topologie à partir d'un chronogramme

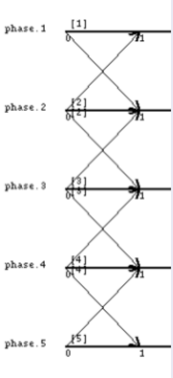
Graphe Complet



?



A compléter pour obtenir un anneau



Calcul par phases des Tables de Routages Optimaux (Gallager 1983)

Hypothèses générales

- Communication fiable
- Sites interconnectés par des canaux (bi-directionnels)
- Chaque site connait "ses" canaux (les ports le reliant à l'extérieur)

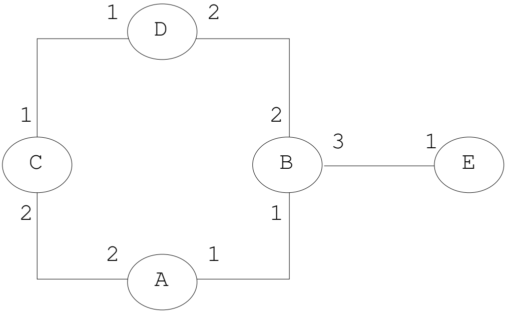
Table de Routage (locale) :

$$\boxed{\begin{array}{l} Tro : Canaux \mapsto 2^{Sites} \\ Tro(canal) = S \text{ où } \; S \subset Sites \end{array}}$$

Utilisation

Un site S_i recevant un message $(Mesg, Dest)$ avec $dest \neq S_i$ ré-expédie le message $(Mesg, Dest)$ sur un canal c tel que $Dest \in Tro(c)$ vérifiant : Pour un site A, $B \in Tro(c)$ ssi c est un canal à emprunter pour joindre B à partir de A en suivant le $+$ court chemin.

Exemple : Topologie et de Tables de routages associée



A	Sites
1	$\{B, E, D\}$
2	$\{C, \underline{D}\}$

C	Sites
1	$\{B, E, D\}$
2	$\{A, \underline{B}, \underline{E}\}$

E	Sites
1	$\{A, B, C, D\}$

B	Sites
1	$\{A, C\}$
2	$\{\underline{C}, D\}$
3	$\{E\}$

D	Sites
1	$\{A, C\}$
2	$\{\underline{A}, B, E\}$

Algorithme de Calcul des Tables de routages (préliminaires)

Notations : Pour un site S_i

$canaux_i$: canaux du site, $routage_i$: table du site

ph_i : compteur de phases

inf_i, new_i : Ensemble d'identité de sites
Informations apprises new_i / connues inf_i

Hypothèse simplificatrice : Chaque site connait le diamètre du graphe

nb : On *triche* pour simplifier la 1ere version, on lèvera ensuite cette hypothèse.

Rappels sur les Graphes

- *Distance* : $Sites \times Sites \mapsto \mathbb{N}$
  distance = longueur du + court chemin les reliant
  (+ court = nombre minimum d'arètes)
- *Excentricité : Sites* $\mapsto \mathbb{N}$
  Distance maximum entre le site et les autres
- *Diamètre d'un Réseau :*
  Maximum des Excentricités

Algorithme de Calcul des Tables de routages

Init :

$ph_i := 0; new_i := \{i\}; inf_i := \{i\};$

Phases*

Tant que $ph_i < diametre$ faire - - Simplification pour la terminaison

$ph_i := ph_i + 1;$

$\forall c \in canaux_i$: envoyer new_i sur c

$new_i := \emptyset$

$\forall c \in canaux_i$

{ recevoir m sur c

$Y = m - (inf_i \cup new_i)$

$routage_i(c) := routage_i(c) \cup Y$

$new_i := new_i \cup Y$ }

$inf_i := inf_i \cup new_i$

fin_tant_que

Term : $\emptyset$

Exemple d'exécution sur la topologie suivante $A.1 \leftrightarrow 1.B.2 \leftrightarrow 1.C$

Phase 1 sur B

$inf = \{B\}, new = \{B\}$

Emissions

! 1 {B} & ! 2 {B}

$new \leftarrow \emptyset$

Réceptions

? 1 {A} (Y = {A})

routage(1) := $\emptyset \cup$ {A}

$new \leftarrow \emptyset \cup \{A\}$

? 2 {C} (Y = {C})

routage(2) := $\emptyset \cup \{C\}$

$new \leftarrow \{A\} \cup \{C\}$

$inf = \{B, A, C\}$, $new = \{A, C\}$

Phase 1 sur A (Pour C s(A/C))

$inf = \{A\}, new = \{A\}$

Emissions

! 1 {A}

$new \leftarrow \emptyset$

Réceptions

? 1 {B} (Y = {B})

routage(1) := $\emptyset \cup$ {B}

$new \leftarrow \emptyset \cup \{B\}$

$inf = \{A, B\}$

$new = \{B\}$

Exemple d'exécution (suite) $A.1 \leftrightarrow 1.B.2 \leftrightarrow 1.C$

Phase 2 sur B

Emissions

! 1 {A,C} & ! 2 {A,C}

$new \leftarrow \emptyset$

Réceptions

? 1 {B} (Y $= \emptyset$)

? 2 {B} (Y $= \emptyset$)

$inf = \{B, A, C\}, new = \emptyset$

Phase 2 sur A (analogue pour C)

Emissions

! 1 {B}

$new \leftarrow \emptyset$

Réceptions

? 1 {A,C} (Y = {C})

routage(1) := $\{B\} \cup \{C\}$

$inf = \{B, A, C\}, new = \{C\}$

Remarques : Pour cette topologie, Diametre = 2

– B est en position centrale (il est d'excentricité minimale 1)

– B possède toute l'info à l'issue de la 1ère phase

– La seconde phase permet aux sites plus excentrés (A et C) d'obtenir à leur tour cette information

Terminaison d'un algorithme à phases

Cas général (sans tricherie)

Pas besoin de connaître le diamètre du graphe

- A l'issue de la k^{ieme} phase, le site i a tout appris des sites au plus distants de k
- Soit new_k la valeur de new à l'issue de la k^{ieme} phase
  Si $new_k = \emptyset$ alors $\forall p \geq k \quad new_p = \emptyset$
- L'algorithme est terminé pour le site i
  la première fois que new passe à $\emptyset$
- Pour un site i tq nb phases = Excentricite(i)
  le site i *sait tout* mais il ne le *sait pas*
  pour nb phases = Excentricite(i) + 1 alors new = $\emptyset$
  le site i *apprend qu'il sait tout*

Petit pb à régler

Les sites n'ont pas en général la même excentricité,
Ils ne terminent donc pas en même temps.
$\Rightarrow$ un site ne peut arrèter dés qu'il a fini (sinon interblocage)
Il va donc faire une phase en plus pour les autres

Schéma Général des Algos à Phase (1/2)

Données

Comme précédemment avec en plus

– `fini` : message envoyé – par un site sachant qu'il a terminé – aux sites qui sont plus excentrés que lui

– $canaux\_fermes_i$: ensemble des sites d'excentricité moindre

Init :

$ph_i := 0;$
$new_i := \{(d_i, i)\};$
$inf_i := \{(d_i, i)\};$
$canaux\_fermes_i := \emptyset$

Term :

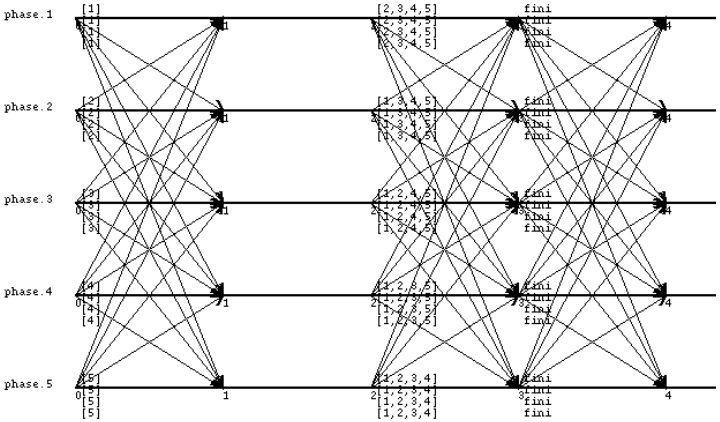
$R = canaux_i \setminus canaux\_fermes_i$
$\forall r \in R$: envoyer fini sur r
$\forall r \in R$: recevoir m sur r

Schéma Général des Algos à Phase (2/2)

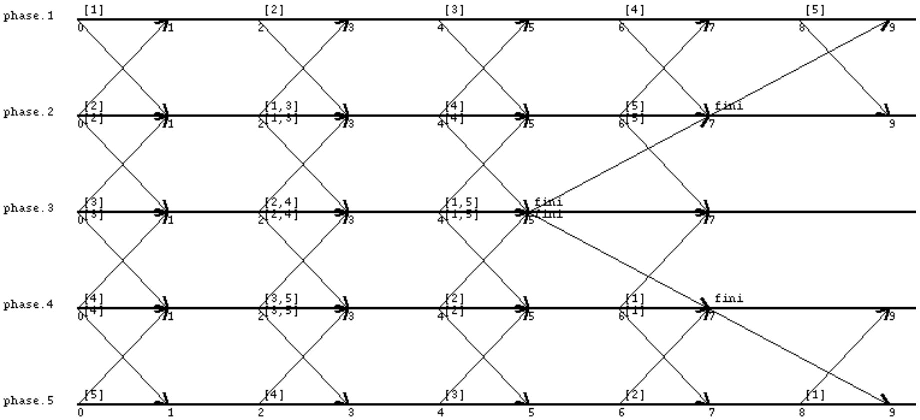
Phases*

Tant que $new_i \neq \emptyset$ faire
$ph_i := ph_i + 1$;
$\forall c \in canaux_i$: envoyer new_i sur c
$new_i := \emptyset$
$\forall c \in canaux_i$
{ recevoir m sur c
Si $m = fini$ alors
$canaux\_fermes_i := canaux\_fermes_i \cup \{c\}$
Sinon $new_i := new_i \cup (m \setminus inf_i)$
"Calcul dépendant de l'algorithme spécifique"
}
$inf_i := inf_i \cup new_i$
fin_tant_que

Calcul phasé de table de routages sur une clique



Calcul phasé de table de routages sur un bus



Outline

4. Synchronisation par Vagues
   - Construction répartie d'arbres couvrants
   - Algorithme de construction d'arbre couvrant
     - Exemples d'Exécution
   - Schémas généraux d'algorithmes à vagues
   - Exercice : Calcul des tables de routages optimaux dans une arborescence couvrante

Synchronisation par Vagues

Second schéma général d'algorithmes
Phases $\approx$ Itération répartie
Vagues $\approx$ Récursion répartie

Plan

1. Exemple Introductif :
   Construction répartie d'une arborescence couvrante à partir d'un réseau connexe
2. Schéma général d'un Algorithme par vagues
3. Application à la détection de la terminaison distribuée

Hypothèses Générales :

– Canaux bidirectionnels fiables,
– Site distingué (racine), un site ne connaît que ses voisins

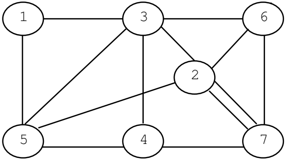
Arbres couvrants (1/2)

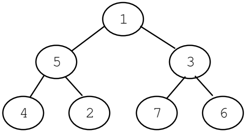
Arborescence couvrante (spanning tree)

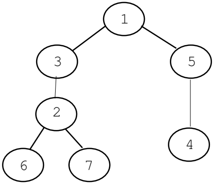
Partant d'un graphe connexe, on construit **un** arbre

- contenant tous les sommets du graphe
- les arcs de l'arbre sont des arcs du graphe

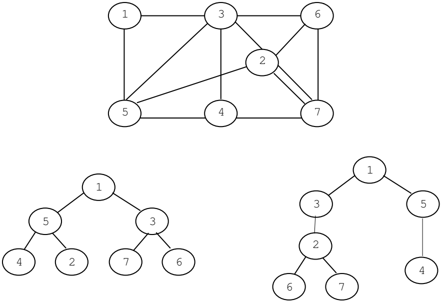
    en général plusieurs arbres couvrants pour un même arbe







Arbres couvrants (2/2)



Intérèt de cette topologie

1. Diffusion d'un message à tous les sites du réseau
   - $n-1$ messages (Optimal)
   - Temps de propagation en $2 \times p$
     ($p = Log\ \ n$ pour les arbres équilibrés)
2. Exclusion Mutuelle (Quorums en $Log\ \ n$)
   (cf arbres dynamiques Algo de Naimi-Trehel)
3. Détection répartie de la Terminaison

Construction d'arbre couvrant : Principes (1/2)

Racine

Seul processus initialement actif
Elle envoie un message *aller* à chacun de ses voisins (fils) et attend un message *retour* de chacun de ceux-ci
(vu de la racine, on a une **phase** de calcul)

Vagues

Un site recevant un message *aller*(k) est
atteint par la k^{ieme} vague,
Un site renvoyant un message *retour(k)*
termine la k^{ieme} vague

Construction de l'arbre

$\equiv$ Succession de phases synchronisées par la racine
A l'issue de la Phase $n \mapsto$ arborescence des $+$ courts chemins d'ordre n

Construction d'arbre couvrant : Principes (2/2)

Notations :

R la racine,
P_i un site quelconque
d_i la distance entre R et P_i

Invariants associés à l'algorithme

Pour tout site P_i et tout entier k (n^0 de vague)

- $d_i > k \rightarrow P_i$ n'est pas atteint par la vague n^0 k
- $d_i = k \rightarrow P_i$ va apprendre qu'il est dans l'arborescence en recevant message *aller*(k),
  Il connaitra aussi son père (expéditeur du message)
  et sa profondeur $(k+1)$.
- $d_i < k \rightarrow P_i$ connaît l'ensemble de ses fils dans l'arborescence

Construction d'arbre couvrant : Données

Messages Utilisés :

– *aller*(k) où k est le n^0 de vague
– *retour*$(resp)$ où $resp \in \{Continuer, Termine, Deja\_marque\}$

Connaissance Initiale :

– *voisins*$(\_lv)$: Voisins d'un site dans le réseau
– *privilege* : détenu uniquement par la racine
– *non_marque*

Données d'un Site :

– *vague*$(\_nv)$ & *prof*$(\_prof)$
– *marque* : vrai si le site est dans l'arborescence – *pere*$(\_p)$: identité du père du site
– *fils*$(\_status, \_fils)$: ensemble des fils d'un site
    $(\_status \in \{Prov, Def\})$
– *explore*$(\_nature, \_liste)$ où
    _nature $\in \{wait\_fils, wait\_pere, termine\}$
    et _liste sous-ensemble des fils du site

Construction d'arbre couvrant : algorithme (1/2)

Réception par le site P_i d'un message $aller(k)$ – émis par P_j

Site P_i, non-marqué

Il entre dans l'arborescence
Il apprend sa profondeur $(k+1)$, son père (P_j)
Soit $Fils = voisins - \{P_j\}$.
Si $Fils = \emptyset$ alors P_i renvoie à P_j $retour(termine)$
Sinon P_i renvoie à P_j $retour(Continuer)$
    F est l'ensemble provisoire des fils de P_i

Site P_i, marqué, dont le père est $\neq P_j$

P_i renvoie à P_j $retour(deja\_marque)$

Site P_i, marqué, dont le père est P_j

P_i le propage à chacun de ses fils et passe en attente

Construction d'arbre couvrant : algorithme (2/2)

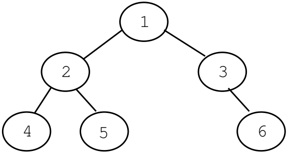
Bilan d'une Vague

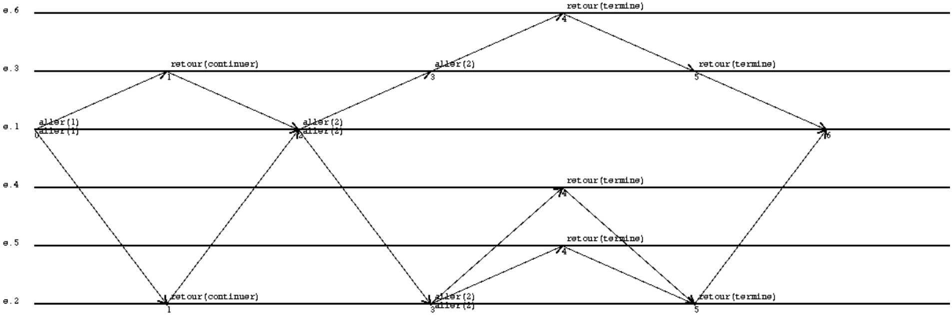
Site attend ($explore(wait\_fils, \_w)$) une réponse
$retour(resp)$ de chacun des éléments de $\_w$
Il recoit ces réponses et les traite $\mapsto < \_cont, \_term, \_dm >$
Si $\_cont = \emptyset$ c'est fini pour lui.
Si c'est la racine, l'algo est terminé
Sinon, il renvoie à son père $retour(termine)$
Sinon
Si c'est la racine, il renvoie à $\_cont$ $aller(\_Nv)$
Sinon, il renvoie à son père $retour(continuer)$

Gestion de ses Fils (fils(_status,_f))

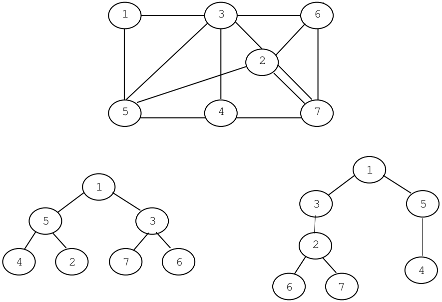
S'il connaissait déja exactement ses fils (_status = def)
Alors pas de chgt
Sinon (_status = prov)
$fils \leftarrow \_term + \_cont$ et $\_status \leftarrow def$

Exemples d'exécution :
Le graphe initial est déjà un arbre ! !

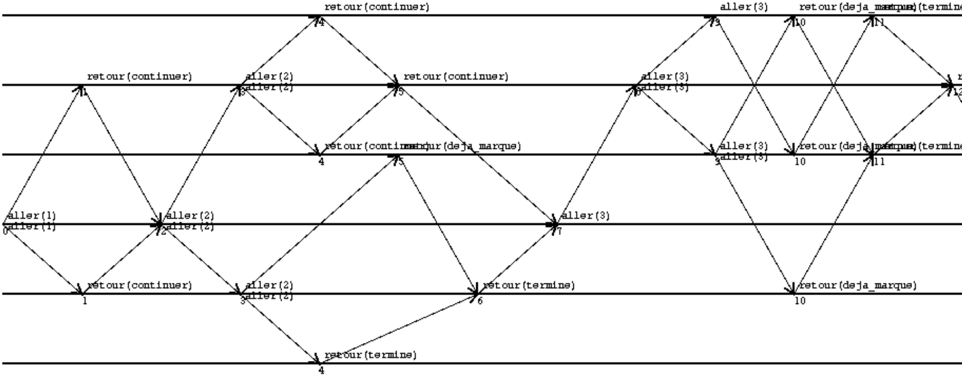




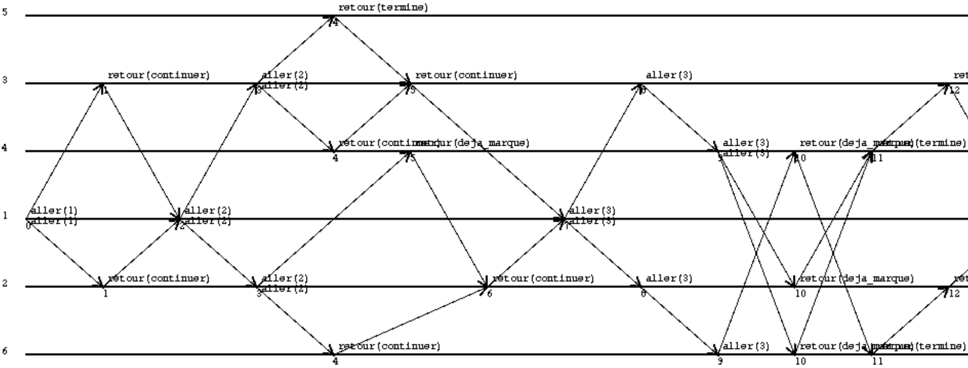
Exemples d'exécution : Un graphe et au moins 2 AC possibles (1/3)



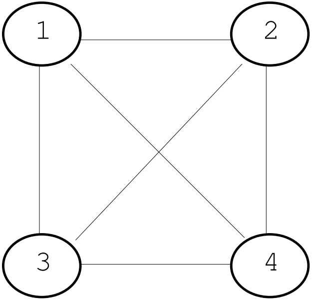
Exemples d'exécution : une première solution/exécution (2/3)

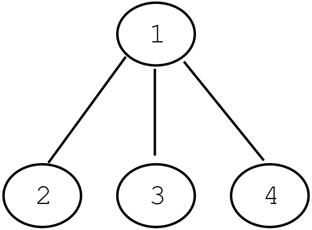


Exemples d'exécution : une première solution/exécution (3/3)

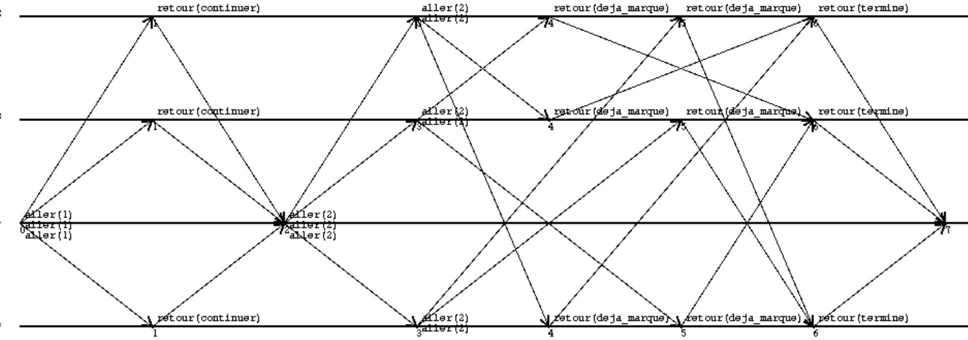


Exemples d'exécution : Le graphe est complet (1/2)





Exemples d'exécution : graphe complet (2/2)



Schémas généraux d'algorithmes à vagues : Arborescence

Site Quelconque P_i

j $:= 0$;
Repeter
  attendre $aller(diffuse)$
  $recu := diffuse$
  $\forall f \in Fils$: **envoyer** $aller(diffuse)$ à f
  $res := \emptyset$
  $\forall f \in Fils$:
    attendre $retour(collecte)$ de f
    $res := res \cup collecte$
  $j := j + 1$
  $collecte := collecte \cup D$
  envoyer $retour(collecte)$ à $pere$
Jusqu'à Condition de terminaison

Schémas généraux d'algorithmes à vagues : Anneaux

Initiateur de la Vague : P_α

diffuse := valeur à diffuser
recu := *diffuse* ; j := 1 ;
envoyer *jeton*(*diffuse*, $\emptyset$) à *succ*
Repeter
  attendre *jeton*(*diffuse*, *collecte*)
  diffuse := *F*(*collecte*)
  recu := *diffuse* ; j := j + 1 ;
  envoyer à *succ*
    jeton(*diffuse*, *collecte*)
Jusqu'à Condition de terminaison

Site Quelconque P_i

j := 0 ;
Repeter
  attendre *jeton*(*diffuse*, *collecte*)
  recu := *diffuse* ; j := j + 1 ;
  collecte := *collecte* $\cup$ *D*
  envoyer à *succ*
    jeton(*diffuse*, *collecte*)
Jusqu'à Condition de terminaison

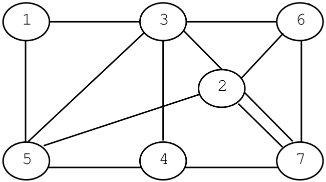
Symétrique

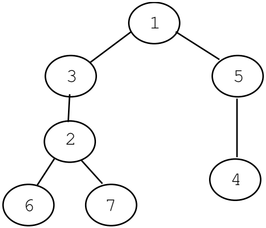
$Jeton(< D_1, C_1 >, \ldots < D_n, C_n >)$

"TD" : Calcul des tables de routages optimaux dans une arborescence couvrante

Hypothèses

Communication bi-directionnelle fiable
Réseau connexe
Arborescence couvrante de ce réseau

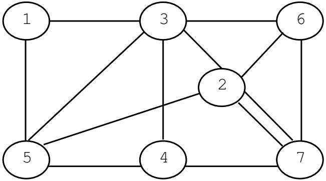


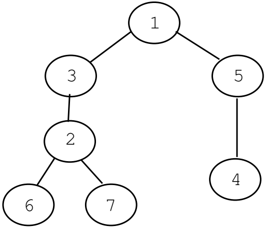


Enoncé

Proposer un algorithme distribué permettant de construire pour chacun des sites les tables de routage optimaux associés à cette arborescence.

"TD" : Calcul des tables de routages optimaux dans une arborescence couvrante : résultat attendu





Site	1
1	1
2	3
3	3
4	5
5	5
6	3
7	3

Site	2
1	3
2	2
3	3
4	3
5	3
6	6
7	7

Site	3
1	1
2	2
3	3
4	1
5	1
6	2
7	2

Site	4
1	5
2	5
3	5
4	4
5	5
6	5
7	5

Site	5
1	1
2	1
3	1
4	4
5	5
6	1
7	1

Site	6
1	2
2	2
3	2
4	2
5	2
6	6
7	2

Site	7
1	2
2	2
3	2
4	2
5	2
6	2
7	7

"TD" : Calcul des tables de routages optimaux dans une arborescence couvrante : données (1/2)

Représentation des tables de routage

TR, ensemble de couples $(x, y) \in Sites \times Sites$
avec la signification suivante :
Pour un site $S, (x, y) \in TR_S$ ssi le site S pour envoyer un message au site x doit l'envoyer au site y.

Initialisation des tables :

Sur chaque site S, ayant pour père PS et possédant un ensemble de fils FS

`debut`
$TR \leftarrow \emptyset$
`Pour chaque` $e \in FS \cup \{S, PS\}$ `:`
$TR \leftarrow TR \cup \{(e, e)\}$
`fin`

Convention

La racine est son propre père.

"TD" : Calcul des tables de routages optimaux dans une arborescence couvrante : données (2/2)

Connaissance initiale d'un site :

Chaque site connaît son père et ses fils directs dans l'arborescence.
i.e la connaissance obtenue à l'issue de la construction de l'A.C

Quatre états : *wait_pere*, *wait_fils*, *wait_fin* et *termine*.

Les sites sont initialement dans l'état *wait_pere*.

Messages utilisés : (messages signés par leur Exp)

- *debut_calcul* déclenche le calcul des tables.
  Il est envoyé initialement par la racine à chacun de ses fils et sera propagé vers les feuilles de l'arbre.
- *Fils*(*ensemble_de_fils*) est envoyé par un noeud à son père pour lui indiquer l'ensemble de ses fils (au sens large)
- *Sites*(*ensemble_de_sites*) est envoyé par la racine à tous ses fils pour leur indiquer l'ensemble de tous les sites de l'arborescence.
  Ce message sera propagé dans tout l'arbre.

"TD" : Calcul des tables de routages .... : Schéma Général : Flux

Principe

Les tables de routage peuvent être construites en une vague et demi :
"1 vague pour que la racine obtienne toute la connaissance
+ une demi-vague pour que le reste des sites ait aussi cette connaissance."

Flux : Racine $\mapsto$ Feuilles

- La racine, dans l'état *wait_pere*, lance la première vague en envoyant le message *debut_calcul* à chacun de ses fils, elle se place en attente de ses fils *wait_fils*.
- Une Feuille, dans l'état *wait_pere*, recevant *debut_calcul* renvoie à son père le message $Fils(\emptyset)$ et passe dans l'état *wait_fin*.
- Un noeud intermédiare, dans l'état *wait_pere*, recevant *debut_calcul* le propage à chacun de ses fils et passe en *wait_fils*

"TD" : Calcul des tables de routages .... : Schéma Général : Reflux (retour vers la racine)

Noeud Intermédiaire :

Un noeud S, dans l'état *wait_fils*, ayant FS pour fils directs attend un message du type $Fils(ensemble\_de\_fils)$ de chacun de ses fils.
A la réception, il exécute le calcul suivant :

$F \leftarrow \{S\} \cup FS$

`Pour chaque fils` $f \in FS$ `:`

    `attendre` $Fils(ensemble\_de\_fils)$ `de` f

    $F \leftarrow F \cup ensemble\_de\_fils$

    `Pour chaque` $e \in ensemble\_de\_fils$:

        $TR \leftarrow TR \cup \{(e, f)\}$

  fin

`Envoyer` $Fils(F)$ `à son pere`

`Passer dans l'état` *wait_fin*

Racine :

Comportement identique : Par contre, au lieu d'envoyer à son père le message $Fils(F)$, elle renvoie le message $Sites(F)$ à chacun de ses Fils et passe dans l'état *termine*.

"TD" : Calcul des tables de routages .... : Schéma Général : Fin de la demi-vague

Comportement d'un site S, dans l'état *wait_fin* à la réception du message $Sites(ensemble\_de\_sites)$ venant de son père PS.

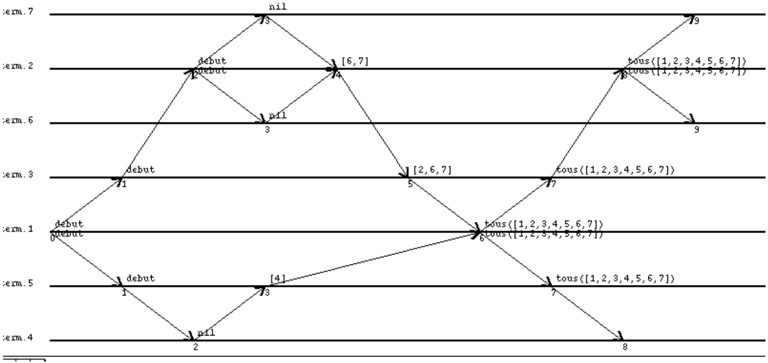
Noeud intermédiaire

Noeud S ayant PS pour père,
A sa réception, il exécute le calcul suivant :
Pour chaque $s \in ensemble\_de\_sites$:
  Si $(s, x) \notin TR$ Alors $TR \leftarrow TR \cup \{(s, PS)\}$
Il envoie ensuite le message $Sites(ensemble\_de\_sites)$ et passe dans l'état *termine*.

Feuille

Même traitement qu'un noeud intermédiaire, par contre passage direct dans l'état *termine*.

"TD" : Calcul des tables de routages .... : Schéma Général : Exécution = 1 phase et demi



"TD" : Calcul des tables de routages .... : Schéma Général : Exécution coté sites

Etat des sites à l'issue de la première vague

```
term.1([TR([(1 , 1),(2 , 3),(3 , 3),(4 , 5),(5 , 5),(6 , 3),(7 ,
3)]),fils([3,5]),pere(1),status(wait)])
term.2([TR([(2 , 2),(6 , 6),(7 , 7)]),fils([6,7]),pere(3),status(wait)])
term.3([TR([(2 , 2),(3 , 3),(6 , 2),(7 , 2)]),fils([2]),pere(1),status(wait)])
term.4([TR([(4 , 4)]),fils(nil),pere(5),status(wait)])
term.5([TR([(4 , 4),(5 , 5)]),fils([4]),pere(1),status(wait)])
term.6([TR([(6 , 6)]),fils(nil),pere(2),status(wait)])
term.7([TR([(7 , 7)]),fils(nil),pere(2),status(wait)])
```

Etat des sites à l'issue de l'algortihme

```
term.1([TR([(1 , 1),(2 , 3),(3 , 3),(4 , 5),(5 , 5),(6 , 3),(7 ,
3)]),fils([3,5]),pere(1),status(wait)])
term.2([TR([(1 , 3),(2 , 2),(3 , 3),(4 , 3),(5 , 3),(6 , 6),(7 ,
7)]),fils([6,7]),pere(3),status(termine)])
term.3([TR([(1 , 1),(2 , 2),(3 , 3),(4 , 1),(5 , 1),(6 , 2),(7 ,
2)]),fils([2]),pere(1),status(termine)])
term.4([TR([(1 , 5),(2 , 5),(3 , 5),(4 , 4),(5 , 5),(6 , 5),(7 ,
5)]),fils(nil),pere(5),status(termine)])
term.5([TR([(1 , 1),(2 , 1),(3 , 1),(4 , 4),(5 , 5),(6 , 1),(7 ,
1)]),fils([4]),pere(1),status(termine)])
term.6([TR([(1 , 2),(2 , 2),(3 , 2),(4 , 2),(5 , 2),(6 , 6),(7 ,
2)]),fils(nil),pere(2),status(termine)])
term.7([TR([(1 , 2),(2 , 2),(3 , 2),(4 , 2),(5 , 2),(6 , 2),(7 ,
7)]),fils(nil),pere(2),status(termine)])
```

Outline

5. Terminaison Répartie
   - Description du problème
   - Principe de la solution par “Vagues“
   - Schéma d'algorithme
   - Exécutions

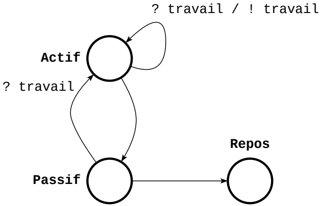
Terminaison Répartie : description du problème

Comportement des sites/agents régit par 3 états

Passif : *L'agent attend qu'on lui confie du travail*

Actif : *L'agent effectue le travail qui lui a été confié*

Repos : *L'agent a cessé le travail*



"Boucle sur Actif" : un agent actif peut se décharger sur ses voisins

Problème de la terminaison

Comment un agent peut-il détecter que l'on ne lui confiera plus de travail et qu'il peut se mettre au repos ?

Terminaison Répartie : difficulté du problème

Problème de la terminaison (suite)

Comment un agent peut-il détecter qu'il a terminé ...

Pb rencontré dans tous les **calculs** !

par ex lors du calcul des tables de routage

nb : Terminaison $\equiv$ ramasse-miettes

A trouver une condition de terminaison ...

Nécessaire et Suffisante et **Locale**

Recherche d'une C.N.S

C1 : Tous les agents sont passifs

Nécessaire oui

Suffisant ? **Non** !

C2 : Aucune requète de travail n'est en transit

$CNS = C1 \wedge C2$

C.N.S **globale** : état des agents et des voies de communication ! !

Terminaison Répartie : $\neq$ cas de figure

Bonne terminaison

Un algorithme sera dit bien terminé si l'on atteint **inévitablement** *un état global du système où :*

– *Tous les agents sont au repos*

– *Il n'y a pas de requète de travail en transit*

Terminaison non détectée

Le système atteint un état où tous les agents sont passifs alors qu'il n'y a pas de requète en transit

$\approx$ Interblocage

Détection erronée de la terminaison

Le système atteint un état où tous les agents sont au repos alors qu'il y a encore des requètes en transit

$\approx$ Blocage

Terminaison Répartie : Algorithme de détection par vagues

Principe général

Superposer à l'application – dont on veut assurer la bonne détection de la terminaision – un algorithme de détection de la Terminaison
Pb : Veiller à éviter les interférences entre les deux algorithmes.

Solution par "Vagues"

1. Construire une arborescence couvrante
2. L'application utilisera la topologie de l'AC
3. Lorsque la racine est passive, elle lance une vague de détection

Hypothèses habituelles : Canaux fiables & **fifo**

Terminaison Répartie : Algorithme (1/4)

Etats d' un agent

Passif : site ne fait rien

Actif : site travaille

Wait : site informé qu'une vague de détection de la terminaison est en cours ; il attend le résultat

Terminé : site sachant que la terminaison est détectée

Flux : Messages Racine $\mapsto$ Feuilles

Fini ? : pour initier/propager une vague de détection de la terminaison

Terminé : pour signifier que la terminaison a été détectée

Reflux : Feuilles $\mapsto$ Racine

Pas_Fini : pour signifier la non terminaison

Ok_Fini : pour signifier la terminaison "locale"

Terminaison Répartie : Algorithme (2/4)

Lancement d'une vague

La racine **passive** lance une vague de détection : elle envoie le message Fini ? à chacun de ses fils et passe dans l'état wait.

Terminaison d'un site

Un site passif recevant le message *termine* de son père sait que la terminaison est atteinte, il en informe ses fils et passe à l'état **termine**

Réception d'une vague

Un site reçoit le message **Fini ?** de son père
    Si il est passif alors il le propage à ses fils
        et passe en attente de ses fils
    Sinon il reste actif et
        renvoie le message *pas_fini* à son père

Terminaison Répartie : Algorithme (3/4)

Bilan d'une vague

Un site ayant propagé une vague de terminaison
reçoit les réponses de chacun de ses fils
$Mesg \in Messages\_Application \cup \{ok\_fini, pas\_fini\}$
Il les traite $\mapsto < work, passif, actif >$
Si $work = \emptyset$ & $actif = \emptyset$

Alors
Succès

Si c'est la racine
alors l'application est terminée,
elle renvoie le message **termine** à chacun de ses fils
et termine elle-même
Sinon il renvoie le message **ok_fini** à son père et attend

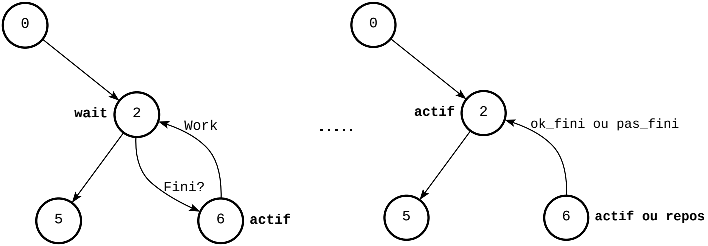
Sinon
Echec

Le site repasse en **actif** ou **passif**
suivant que **work** est vide ou non
Si c'est la racine alors **rien**
Sinon le site renvoie le message *pas_fini* à son père

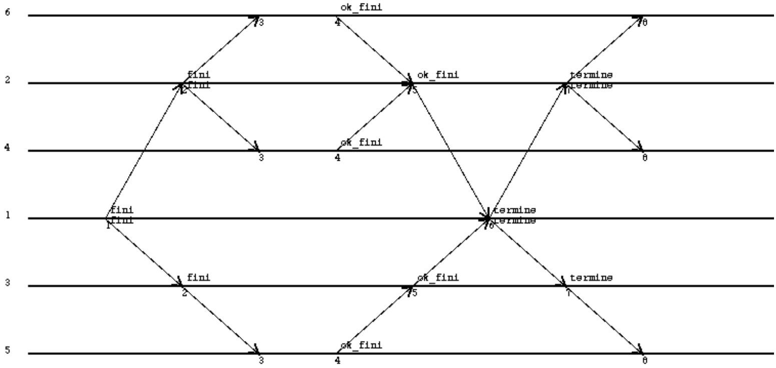
Terminaison Répartie : Algorithme (4/4)

Interférences entre la terminaison et l'application

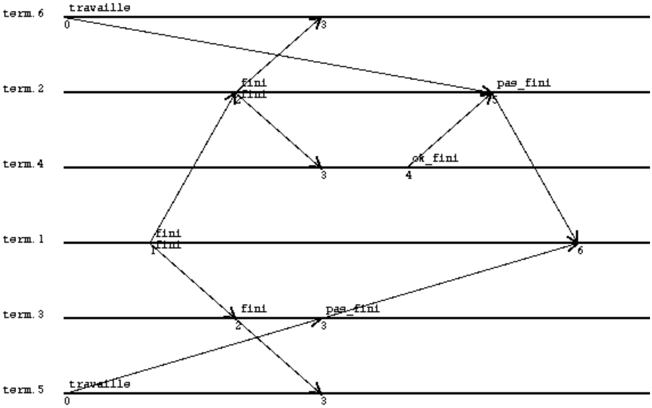
Croisement entre une requête de travail et une vague de détection
Le site 2 ayant lancé une vague reçoit un message de l' application de la part de son fils 6, il recevra **ensuite** la réponse de celui-ci quant à sa propre terminaison ; A ce moment la, le site 2 n' est plus dans l'état wait, le message de 6 doit donc être ignoré.



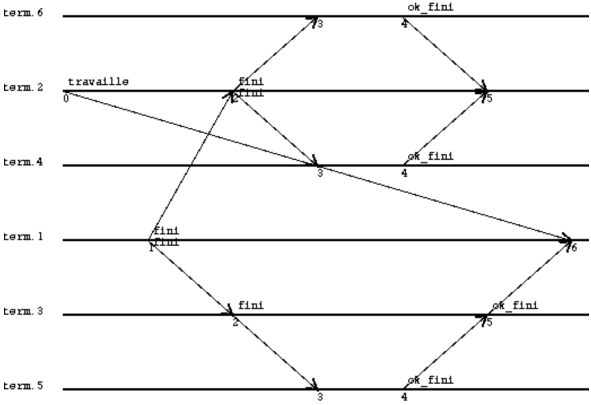
Terminaison Répartie : Succès



Terminaison Répartie : Echec (1/2)



Terminaison Répartie : Echec (2/2)



Outline

6. Tirage au Sort Réparti
   - Introduction
   - Algo #1 : Tirage au sort d'un vainquer entre *n* compétiteurs
   - Algo #2 : Tirage au sort parmi *c* entre *n* sites
   - Algo #3 : Obtention d'un ordre total entre les compétiteurs

Tirage au Sort Réparti

⇝ Mécanisme Distribué pour résoudre des Conflicts

Conflicts sont résolus
- de manière équitable
- avec un résultat **imprédictible**

⇝ façon Symétrique de casser la Symétrie

Alternative aux
- Priorités statiques
- Messages Datés (Horloges)

Tirage au Sort Réparti

Algorithmes Symétriques

- *chaque site exécute le même code*
- *aucun site ne bénéficie d'un privilège connu statiquement*
- *chaque site est impliqué également dans le résultat final*

Symétrie d'un tirage au sort ?

Degré de symétrie évalué en termes de Probabilités

Propriétés attendues du tirage au sort

1. Probabilité pour un site de gagner soit **indépendante** de ses **choix** de son **identificateur**
2. Résultat imprédictible

Tirage au Sort Réparti : 3 Algorithmes

Algo #1

1. Election d'un vainqueur entre les *n* Agents

Algo #2

Sélection d'un vainquer parmi *p* compétiteurs dans une configuration globale de *n* Agents.

1. Déterminaison des Compétiteurs
2. Election d'un vainqueur entre les compétiteurs

Algo #3

Obtention d'un Ordre total entre *p* compétiteurs dans une configuration globale de *n* Agents.

1. Déterminaison des Compétiteurs
2. Obtention d'un Ordre total entre les compétiteurs

Pour les 3 algos, chaque site doit connaître le résultat.

Plan

Hypothèses

Communication

M_1 : Chaque site peut communiquer avec les autres

M_2 : Délais de transmission sont finis

M_3 : Médium de transmission est fiable

Sites

A_1 : Chaque site connaît tous ses partenaires
Soit $Agents = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$

A_2 : Chaque site est identifié par un identificateur
Soit *Code* la bijection de $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ sur {1,...,n}

A_3 : Chaque site connaît un ensemble de valeurs noté *Choix*

Schéma général des 3 algorithmes

Communication **réduite** à une phase

Chaque site

- choisit **aléatoirement** une valeur $\in$ *Choix*
- l'envoie à chacun de ses partenaires
- attend leurs réponses

Complexité : $O(n^2)$ messages

A l'issue de la phase

Un **même** ensemble (**EV**) des n valeurs echangées
est **connu** par **tous** les sites

Calcul Local

Election $<->$ Vainqueur :	$Choix^n \mapsto Competiteurs$	
	$EV \mapsto Vainqueur(EV)$	
Ordre $<->$ bijection	B_{EV} : $Competiteurs \mapsto \{1, ..c\}$	
	$B_{EV} \mapsto <_{B_{EV}}$ Ordre Canonique	

Propriétés des algorithmes

Qualitatives

Terminaison de l'algorithme dans un état **consistant**

- Un site et un seul gagne, les autres perdent
- Le vainqueur est un compétiteur

Tous les sites connaissent le vainqueur

Probabilistes

- Equiprobabilité **faible** de gagner pour chacun des sites :
  Chaque site à la même chance de gagner
  En posant $P(I)$: probabilité de gain pour le site I
  (P1) $\forall I, J \in Agents : P(I) = P(J)$
- Equiprobabilité **forte** de gagner pour chacun des sites :
  Chaque site est traité de la même façon : Ses chances de gain sont indépendantes : de son identificateur ou de la valeur choisie
  En posant $P(I, v)$: probabilité que i gagne avec la valeur v
  (P2) $\forall I, J \in Agents, \forall v, w \in Choix : P(I, v) = P(J, w)$

Une solution avec deux sites

Données

$Agents = \{A, B\}$
$Choix = \{\text{v1,v2}\}$

Détermination du vainqueur

$Vainqueur : Choix^2 \mapsto Agents$

$$Vainqueur((x, y)) = \left|\begin{array}{l} \text{A iff } x = y \\ \\ \text{B otherwise} \end{array}\right.$$

Distribution des valeurs

$\{v1, v2\}^2$	Vainqueur
(v1,v1)	A
(v1,v2)	B
(v2,v1)	B
(v2,v2)	A

PropriétéS d'équiprobabilté satisfaites

P(A) = P(B) = 1 / 2
P(A,v1) = P(A,v2) = P(B,v1) = P(B,v2) = 1 / 4

Algo #1 : Tirage au sort d'un vainquer entre n compétiteurs

Données

On se donne arbitrairement une Bijection *Code*
$Code : Agents \mapsto \{1, ..n\}$ $\quad (Competiteurs = Agents)$ $Choix = \{1, ..n\}$

Détermination du vainqueur

Calcul annexe
Soit $w : \{1, .., n\}^n \mapsto \{1, .., n\}$, l'application

$$w((a_1, \cdots, a_n)) = 1 + [(\sum_{j=1}^{j=n} a_j) \ \ mod \ (n)]$$

Calcul principal
Soit $Vainqueur : \{1, .., n\}^n \mapsto Agents$
$Vainqueur((a_1, \cdots, a_n)) = A$ ssi $Code(A) = w((a_1, \cdots, a_n))$

Algo #1 : Cas de deux sites

Choix de la bijection Code

Agents = {A,B}
et on pose **arbitrairement** Code(A) = 1 Code(B) = 2

Résultats

$\{1,2\}^2$	w	Vainqueur
(1,1)	1	A
(1,2)	2	B
(2,1)	2	B
(2,2)	1	A

Probabilités

P(A) = P(B) = 1 / 2
P(A,1) = P(A,2) = P(B,1) = P(B,2) = 1 / 4

Ces probabilités sont bien indépendantes du choix de la bijection `Code`

Algo #1 : Eléments de preuve

Propriété d'Equiprobabilité forte : $P(i,v) = P(j,w)$

$Card(Choix) = Card(Agents) = n$

Soit A_n^n, l'ensemble de tous les arrangements, on a $Card(A_n^n) = n^n$

$C(i,v)$: l'ensemble des arrangements où i choisit v et gagne.

$P(i,v) = Card(C(i,v))/Card(A_n^n)$

$Card(C(i,v)) = Card(A_n^{n-2}) = n^{n-2}$ A montrer !

$\Rightarrow P(i,v) = n^{n-2}/n^n = 1/n^2$ (indépendant de i et de v)

$Card(C(i,v)) = n^{n-2}$

Lemme : Soit $(a_1, \cdots, a_{n-1})$, n-1 valeurs $\in A_n^{n-1}$, $\forall A \in Agents$,

$\exists$ un <u>unique</u> $a_n \in \{1, \cdots, n\}$: $Vainqueur((a_1, \cdots, a_{n-1}, \mathbf{a_n})) = A$

$$preuve \ : \ \mathbf{a_n} = [\mathbf{Code(A)} - (1 + \sum_{k=1}^{k=n-1} a_k)] \ \ mod \ (n)$$

Finalement, $\forall i \in Agents, \forall v \in \{1, \cdots, n\}, \forall (a_1, \cdots, a_{n-2}) \in A_n^{n-2}$

$\exists$ a <u>unique</u> $a_n \in \{1, \cdots, n\}$: $Vainqueur((a_1, \cdots, a_{n-2}, v, \mathbf{a_n})) = i$

Algo #2 : Tirage au sort parmi c entre n sites (1/2)

Solution triviale : $2 * n^2$ messages

– On fait une première phase pour connaître les compétiteurs
– On renumérote les compétiteurs et on applique l'algo #1
Défi : résoudre algo #2 au même coût qu'algo #1

Inchangé

Pour Card(Agents) = n, on dispose de Code bijection de Agents $\mapsto [1, n]$

$1^{\text{ères}}$ Modifications

$Choix = \{0\} \cup \{1, \ldots, n!\}$ **($n!$ discuté plus tard)**
Ajout de la valeur 0 pour les non compétiteurs

Déterminaison des Compétiteurs

On note toujours EV, l'ensemble des valeurs échangées
$Competiteurs = \{A \in Agents : v_A \neq 0\}$
On note $c = Card(Competiteurs)$

Algo #2 : Tirage au sort parmi c entre n sites (2/2)

Déterminaison du vainqueur

$Vainqueur : \{1, \ldots, n!\}^n \mapsto Competiteurs$

$$w((a_1, \cdots, a_n)) = 1 + [(\sum_{j=1}^{j=n} a_j) \mod (c)]$$

$Vainqueur((a_1, \cdots, a_n)) = C$ iff $\mathbf{Ecode(C)} = w((a_1, \cdots, a_n))$

Où $Ecode : Competiteurs \mapsto \{1, \ldots c\}$

$Ecode(C) = Code(C) - Card(\{P \in Passif : Code(P) < Code(C)\})$

Exemple avec 5 sites dont 3 compétiteurs seulement

$EV =< 0, 2, 3, 0, 1 > \& w = 1 + (6 \mod 3) = 1$

Agents	A1	A2	A3	A4	A5
Code	1	2	3	4	5
Values	0	2	3	0	1
Compétiteur	non	oui	oui	non	oui
Ecode	/	1	2	/	3
Vainqueur	/	oui	/	/	/

Algo #2 : Eléments de preuve

Propriété d'Equiprobabilité forte

$Competiteurs = \{c_1, \cdots, c_c\} \quad Card(Competiteurs) = c$

On note $P(Competiteurs, I, V)$, la probabilité pour que I gagne avec la valeur $V \in \{1, \cdots, n!\}$

$P(Competiteurs, I, V) = 1/(n! \times c)$

Choix de $n!$

On va compter le nombre d'éléments de $C_{\uparrow <Competiteurs>}$ de deux façons

(1) $Card(C_{\uparrow <Competiteurs>}) = c \times Card(C_{\uparrow <Competiteurs>}(c_i))$
(A cause de la Pté d'équiprobabilité faible)

(2) $Card(C_{\uparrow <Competiteurs>}) = B^c \quad (B = Card(Choix))$

(1) & (2) $\Rightarrow B^c = c \times Card(C_{\uparrow <Competiteurs>}(c_i))$
ie B^c *doit être un* <u>*multiple*</u> *de* c *pour chaque* $c \in \{1, \cdots, n\}$
d'où $Card(B) = n!$ (ou plus généralement $Ppcm(1, ..n)$)

Algo #3 : Obtention d'un Ordre Total entre les compétiteurs (1/2)

Solution triviale

Appliquer 1 fois Algo #2 puis c fois Algo #1 où c est le nombre de compétiteurs
Coût factoriel

Solution retenue

Itérer l'élection **avec les mêmes messages échangés**

- Le premier site dans l'ordre est le site vainqueur (au sens de algo #2)
- Après cela, les autres compétiteurs le considèrent comme passif.
- Un nouveau vainqueur est déterminé avec les valeurs restantes pour obtenir le second dans l'odre, etc ...

Coût - en terme de communication - inchangé wrt Algo #2

Algo #3 : Ordre Total entre les compétiteurs (2/2)

Principe sur un exemple ....

Agents	A1	A2	A3	A4	A5
Valeurs	0	2	3	0	3
f_2(Valeurs)	0	2	3	0	0
f_3(Valeurs)	0	2	0	0	0

B	
1	A5
2	A3
3	A2

Ordre associé : $A5 < A3 < A2$

... ou plus formellement

$B(1) = S_i$ ssi $w(v_1, v_2, \cdots, v_n) = Ecode(S_i)$

$B(k) = S_i$ ssi $w(f_k(v_1), f_k(v_2), \cdots, f_k(v_n)) = Ecode(S_i)$

où les f_k $(2 \leq k \leq c)$ sont définis comme suit :

$f_k(v_i) = 0$ ssi $v_i = 0$ ou $\exists p < k$ tel que $B(p) = S_i$

$f_k(v_i) = v_i$ sinon

Propriétés

B est bijective

On définit $<_b$ par $X <_b Y$ ssi $b(X) < b(Y)$

$<_b$ est un ordre total strict sur *Competiteurs*

Outline

7. Gestion des Donnés Dupliquées
    - Paradigme des lecteurs/écrivains
    - Protocole de Base : "Write all, Read one"
    - Algorithmes par Vote (consensus)
    - Généralisation par des Quorums

Gestion des Donnés Dupliquées

Données dupliquées

Sites	S_1	S_2	$\ldots S_n$
Donnée D	D_1	D_2	$\ldots D_n$

Objectif

Améliorer les performances en lecture (//)
la résistance aux défaillances
Prix à payer : Assurer la cohérence mutuelle des copies

Paradigme des lecteurs/écrivains – 2 Opérations : *lire(d)*, *ecrire(d)*

R_1 : Toute exécution de *ecrire(d)* exclut toute autre opération

R_2 : Les exécutions de *lire(d)* peuvent être simultanées

R_3 : La valeur rendue par *lire(d)* est la dernière valeur produite par *ecrire(d)*

A suivre : Différents algorithmes permettant de limiter la complexité (message)

Algo #1 "Write all, Read one"

Principe de base

- Tout site lit sa copie de facon indépendante
- Pour écrire un site doit :
  (a) demander leur permission à **tous** les autres.
  (b) leur communiquer ensuite la nouvelle valeur.

Propriétés

R_1, R_2 & R_3 sont trivialement satisfaites.

Interblocage possible ($\leftarrow$ Horloges de Lamport, Tirage au sort, ...)

Caractéristiques

Intéressant si
(1) Lecture/Ecriture est grand
(2) Peu de défaillances

défaillance d'un site :
- au minimum interdit toute écriture
- dans le pire des cas, peut être fatale au système

Algo #2 : Algorithmes par Vote (consensus) (1/2)

Principe de base

- Un site pour lire doit obtenir la permisson de R sites
- Un site pour écrire doit obtenir la permisson de W sites.
  Il les libère aprés l'écriture

Conditions sur R et W pour assurer R_1 et R_2

$C_1 : R + W > N$ & $C_2 : 2 \times W > N$
où N est le nombre total de sites

Pour assurer R_3 : n^o de versions

A chaque copie D_i de D est associée un n^o de version
$S_i : D_i \mapsto NV_i(D_i)$
La copie "courante" doit être affectée par le plus grand n^o

NB : Il peut y avoir plusieurs copies ayant le même n^o
Invariant : $NV_i(D_i) = NV_j(D_j) \Rightarrow D_i = D_j$

Algo #2 : Algorithme (1/2)

Principe général

Lecture : Un site demande la permission et "leur" valeur à R sites
Il prend en compte la valeur associée au plus grand n^o

Ecriture : Même chose que pour lecture mais à W sites
Il produit la nouvelle valeur D' et son n^o N'
Il communique aux W sites (D', N')

Données

Etat d'un agent $= idle|frozen|wait$
Variable : $< NV, D >$
Messages : $reqLecture, reqEcriture, < NV, D >, Lib(D, NV)$

Autorisation d'un site

Site idle reçoit une requete (lecture/ecriture)
Il renvoie $< NV, D >$ et devient frozen

Algo #2 : Algorithme (2/2)

Libération d'un site

Réception de $Lib(D', N')$
$D \leftarrow D'; NV \leftarrow N'$. Le site passe de frozen à idle

Lire(D) : Sur un site S_i, choisir un ensemble L de R sites

$\forall s \in L$: envoyer à s requete_lecture
Attendre les R réponses $< NV_l, D_l >$
Soit $nv_{max} = Max\{NV_l : l \in L\}$ et D' la donnée associée
$D \leftarrow D'; NV \leftarrow nv_{max}$
$\forall s \in L$: envoyer $Lib(NV, D)$ à s

Ecrire(D) : Sur un site S_i, choisir un ensemble E de W sites

$\forall s \in E$: envoyer à s requete_ecriture
Attendre les W réponses $< NV_l, D_l >$
Soit $nv_{max} = Max\{NV_l : l \in L\}$ et D' la donnée associée
$D \leftarrow F(D'); NV \leftarrow nv_{max} + 1$
$\forall s \in W$: envoyer $Lib(D, NV)$ à s

Algo #2 : Exemple d'Exécution

"Quorums" fixes : on fixe ici arbitrairement les ensembles Q_R & Q_W

$S = \{A, B, C, D\}, N = 4$
On choisit : $W = 3,\ R = 2$

Sites	A	B	C	D
Q_R	{A,B}	{B,C}	{C,D}	{D,A}
Q_W	{A,B,C}	{B,C,D}	{C,D,A}	{D,A,B}

nb : Chaque site appartient à ses quorums de lecture et d'écriture
$\mapsto$ un message économisé

Etat Initial

	A	B	C	D
D	d	d	d	d
n^o	0	0	0	0

Algo #2 : Exemple d'exécution (suite)

A veut écrire

$\forall s \in Q_w(A)$: envoyer à s requete_lecture
Attendre les réponses
$Resp = \{(B, 0, d), (C, 0, d)\} \cup \{(A, 0, d)\}$
$Max(n^o) := 0$; $Vc(D) := d$
$d' ; = F(d)$; $nv := Max(n^o) + 1$
$\forall s \in Q_w(A)$: envoyer à s $Lib(D, d', nv)$

. . . Après réception de *Lib* par les sites $\in Q_w(A)$:

	A	B	C	D
D	d'	d'	d'	d
n^o	1	1	1	0

D veut lire

$Q_R(D) = \{A, D\}$
D s'adresse à A qui possède la valeur courante .../...

Algo #2 : Exemples de chronogrammes d'exécution

Exemple avec 6 sites

On choisit $R = 3$ & $W = 4$
nb : chaque site appartient implicitement à ses quorums

Quorums

Site	Q_R	Q_W
1	{2,3}	{2,3,4}
2	{1,3}	{1,3,4}
3	{1,2}	{1,2,4}
4	{5,6}	{3,5,6}
5	{4,6}	{3,4,6}
6	{4,5}	{3,4,5}

Chrono 1

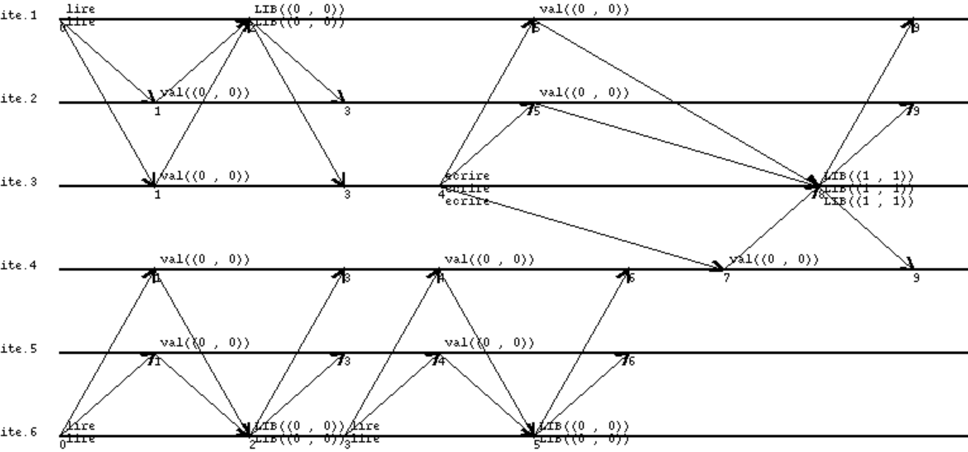
2 lectures en //
1 Lecture + 1 Ecriture demandées en //
Lecture **puis** Ecriture

Chrono 2

2 lectures en //
1 Lecture + 1 Ecriture demandées en //
Ecriture **puis** Lecture

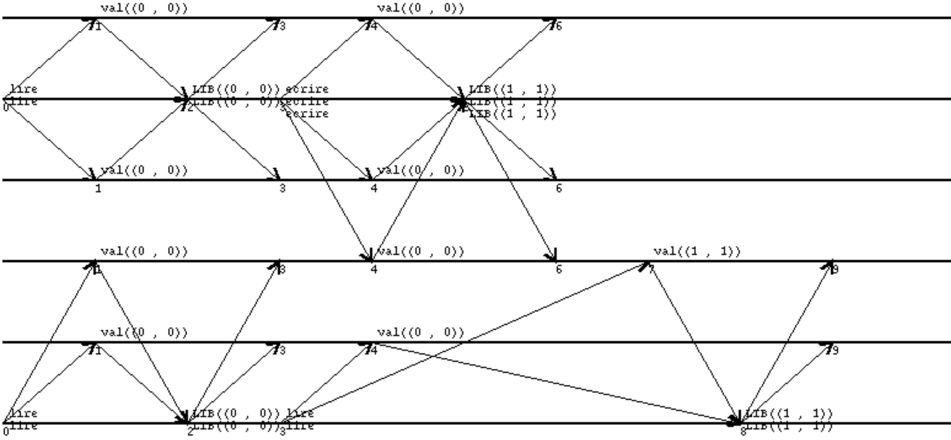
Algo #2 : Exécution Chrono #1

(2 lectures en //) (demandes // Lecture et Ecriture) (Lecture **puis** Ecriture)



Algo #2 : Exécution Chrono #1

(2 lectures en //) (demandes // Lecture et Ecriture) (Ecriture **puis** Lecture)



Algo #2 : Schéma de preuve

I Accès Simultanés : R_1 & R_2

$$\left.\begin{array}{l} C_1 : R + W > N \\ C_2 : 2 \times W > N \end{array}\right\} \Rightarrow R_1 \wedge R_2$$

II Cohérence Mutuelle des copies : R_3

lemme : Si $R \subset S : |R| = r$ et $W \subset S : |W| = w$
Alors $R + W > n \Rightarrow R \cap W \neq \emptyset$

preuve :

- Soit W' le dernier quorum d'écriture
  Tout site $s \in W'$ possède la version courante et le n^o correct
- Pour lire, un site s'adresse **<u>nécessairement</u>** à un site ayant appartenu au dernier quorum d'écriture.
  $\rightarrow$ Lecture de la valeur courante

Idem pour l'écriture

Algo #3 : Généralisation Algo #2 via des Quorums

Vers les quorums

Soient $\begin{array}{l} Q_W : S \mapsto 2^S \\ s \mapsto Q_W(s) \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} Q_R : S \mapsto 2^S \\ s \mapsto Q_R(s) \end{array}$

$$\text{vérifiant } \forall s, t \in S \begin{cases} Q_R(s) \cap Q_W(t) \neq \emptyset \\ Q_W(s) \cap Q_W(t) \neq \emptyset \end{cases}$$

Algo #3

On remplace dans algo #2 :

- R sites par $Q_R(s)$
- W sites par $Q_W(s)$

preuve : identique à celle d'algo #2

Apercu des Quorums

- Q_R et Q_W sont des **quorums sur** S
  Quorum : $Q \subset 2^S$ tq $\forall e, f \in Q : (e \not\subset f)$ et $(f \not\subset e)$
- Q_W est une **côterie** $\forall e, f \in Q_W : e \cap f \neq \emptyset$
- Q_R et Q_W sont **complémentaires** : $\forall e \in Q_W, \forall f \in Q_R : e \cap f \neq \emptyset$

Quorums à Grille ($\sqrt{n}$) – Maekawa 85

Exemple de quorums complémentaires dont l'un est une côterie

$$Q_R(A) = Q_R(B) = \{A, B\}$$
$$Q_R(C) = Q_R(D) = \{C, D\}$$
$$Q_R(E) = \{E\}$$

$$Q_W(A) = \{A, B, C, E\}$$
$$Q_W(B) = \{A, B, D, E\}$$
$$Q_W(E) = \{A, C, E\}$$
$$Q_W(C) = \{A, C, D, E\}$$
$$Q_W(D) = \{B, C, D, E\}$$

Grille

A	B
C	D
E	*E*

Propriété des grilles

Définition de Q_W & Q_R

$$\text{Site} \quad s \mapsto \begin{cases} Q_R(s) = ligne(s) \\ Q_W(s) = ligne(s) \cup colonne(s) \end{cases}$$

propriété : $\forall s, t : ligne(s) \cap colonne(t) \neq \emptyset$

corollaires : $\forall s, t$:

$Q_R(s) \cap Q_W(t) \neq \emptyset$
(complémentarité de Q_R et Q_W)

$Q_W(s) \cap Q_W(t) \neq \emptyset$ (Q_W est une côterie)

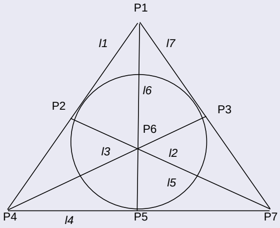
Quorums (suite)

Retrouver les protocoles associés aux grilles représentées

A	B	C	D	E

A
B
C
D
E

Côterie engendrée par un plan projectif



Côterie	associée
Q_1	$\{1, 2, 4\}$
Q_2	$\{2, 6, 7\}$
Q_3	$\{3, 6, 4\}$
Q_4	$\{4, 5, 7\}$
Q_5	$\{5, 2, 3\}$
Q_6	$\{6, 1, 5\}$
Q_7	$\{7, 1, 3\}$

Outline

8. Fragmentation & Duplication
   - Fragmentation & Duplication Symétrique
   - Protocole Associé : Aggrawal et El Abbaddi (1990)

Fragmentation & Duplication

Cas général

1 Donnée D et n sites de stockages $S_1, S_2, \dots S_n$

- **Partition** de $D = D_1 \bigoplus D_2 \dots \bigoplus D_c$ (c fragments de D)
- Chaque fragment est **dupliqué** sur **certains** sites

Matrice de Distribution

- c : nombre de fragments & n : nombre de sites
- $D[1 \dots c, 1 \dots n] : \{0, 1\}$
- $D(i, j) = 1$ ssi le fragment i est stocké sur le site j

Difficultés

Celles de la duplication
$+$ reconstitution de la donnée avec des fragments **cohérents**
NB : La matrice de distribution est une donnée globale "inconnue"

Fragmentation & Duplication Symétrique

Conditions symétriques

- Fragmentation : $|D| = c \times |D_i| \quad \forall i \in \{1, \dots c\}$
- Duplication : $RD_1 \ \ \& \ \ RD_2$

  RD_1 : Chaque fragment est stocké sur s sites
  (distribution égale pour chaque fragment)

  RD_2 : Chaque site stocke le même nombre de fragments
  (charge équilibrée entre les différents sites)

Conséquences de la symétrie

- $RD_1 \ \ \& \ \ RD_2 \Leftrightarrow MD_1 \ \ \& \ \ MD_2$
- $$MD_1 : \forall j : \Sigma_{i \in \{1, \dots c\}} D(I, J) = m$$

  Tout site stocke m fragments
- $$MD_2 : \forall i : \Sigma_{j \in \{1, \dots n\}} D(I, J) = s$$

  Tout fragment est stocké sur s sites

Exemples de Fragmentation/Duplication symétrique

Rappel

s = nombre de sites de stockage pour un fragment
m = nombre total de fragments par site

1er Exemple : 3 sites & 3 fragments

	S_1	S_2	S_3
D_1	0	1	1
D_2	1	0	1
D_3	1	1	0

$\rightarrow \quad s = m = 2$

Sd Exemple : 6 sites & 4 fragments

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
D_1	1	0	1	0	1	0
D_2	1	0	0	1	0	1
D_3	0	1	1	0	0	1
D_4	0	1	0	1	1	0

$\rightarrow \quad s = 3$ **&** $m = 2$

Remarques

Si $c = s = m = n$ Alors chaque site stocke tous les fragments (inutile)
Si $c = n$ et $s = m = 1$ Alors Fragmentation (pure)

Fragmentation & Duplication Symétrique (suite)

Contraintes sur (n, c, m, s) liées à la Symétrie

$\mapsto$ Compter (NF) le nombre total de fragments dans le système

c fragments, chaque fragment est sur s sites $\mapsto NF = c \times s$

n sites et chaque site stocke m fragments $\mapsto NF = n \times m$

$\mapsto$ **Symétrie possible** ssi $c \times s = n \times m$

Retour sur les exemples précédents

1er : $(2 \times 3 = 3 \times 2)$ & Sd : $(4 \times 3 = 6 \times 2)$

$3^{\text{ème}}$ Exemple : 3 sites & 4 fragments

Trouver (les plus petits) m et s tels que $4 \times s = 3 \times m$

$\mapsto s = 3$ et $m = 4$

Duplication Pure

$\mapsto$

	S_1	S_2	S_3
D_1	1	1	1
D_2	1	1	1
D_3	1	1	1
D_4	1	1	1

Intérêt de la Symétrie : Facteur de Reconstitution

Egalitaire

Chaque site participe de facon égale au stockage
Chaque fragment à le même nombre de "stockeurs"

Facteur de Reconstitution (FR)

Définition : FR correspond au nombre **minimal** de sites qu'il faut interroger pour reconstituer dans le **pire des cas** la donnée initiale

Symétrie **permet** une expression **analytique** de FR : $FR = (n - s) + 1$

Preuve

1. $FR > n - s$ (par l'absurde)
   Fragment f_1, $Stock(f_1)$ les s sites de stockage de f_1
   $U = Sites \setminus Stock(f_1)$
   On a $|U| = n - s$ et U ne permet pas d'obtenir f_1
2. $FR = (n - s) + 1$
   lemme : Si $A \subset E$ et $B \subset E$ Alors $|A| + |B| > |E| \Rightarrow A \bigcap B \neq \emptyset$
   Soit U : $|U| = (n - s) + 1$ on a $U \bigcap Stock(f) \neq \emptyset \quad \forall$ fragment f

Protocole Associé : Aggrawal et El Abbaddi (1990)

Lire(x)

1) Obtenir les fragments et les numéros de versions de R sites
2) Soit $vmax$ le plus grand numéro de version
3) Parmi les R sites du quorum, extraire les fragments
   issus de FR d'entre-eux estampillés par $vmax$
4) Reconstituer x et 5) Libérer le quorum

Ecrire(x)

1) Obtenir les fragments et les numéros de versions de W sites
2) Soit $vmax$ le plus grand numéro de version
3) Parmi les W sites du quorum, extraire les fragments
   issus de FR d'entre-eux estampillés par $vmax$
4) Reconstituer x, calculez Nx ($NV = vmax + 1$)
5) Fragmenter Nx et envoyer à tout site du quorum "son" fragment et le NV

Conditions sur W et R :

$C_1 : FR \leq R \leq n \;\&\; FR \leq W \leq n$

$C_2 : W + W > n$

$C_3 : n + FR \leq R + W \leq 2n$

Exemple d'exécution (1/3)

Configuration

6 sites, 4 fragments – Chaque fragment est stocké sur 3 sites (s=3)
$FR = (6-3)+1 = 4$, On prend $R = 5$, $W = 5$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
D_1	d_1 0		d_1 0		d_1 0	
D_2	d_2 0			d_2 0		d_2 0
D_3		d_3 0	d_3 0			d_3 0
D_4		d_4 0		d_4 0	d_4 0	

Ecriture de S_2 : Interrogation de $Q_W(S_2) = S_1, \ldots S_5$)

S_2?

$$
\begin{array}{ll}
(S_1,(d_1,0),(d_2,0)) & Vmax = 0 \\
(S_2,(d_3,0),(d_4,0)) & D = d_1 \bigoplus d_2 \bigoplus d_3 \bigoplus d_4 \\
(S_3,(d_1,0),(d_3,0)) & D' = F(D) \\
(S_4,(d_2,0),(d_4,0)) & D' = d_1' \bigoplus d_2' \bigoplus d_3' \bigoplus d_4' \\
(S_5,(d_1,0),(d_4,0)) & \text{NV} = 1
\end{array}
$$

Exemple d'exécution (2/3)

Ecriture de S_2 (suite) : libération de $Q_W(S_2)$

$S_2!$

$$
\begin{array}{l}
S_1 : ((d'_1, 1), (d'_2, 1)) \\
S_2 : ((d'_3, 1), (d'_4, 1)) \\
S_3 : ((d'_1, 1), (d'_3, 1)) \\
S_4 : ((d'_2, 1), (d'_4, 1)) \\
S_5 : ((d'_1, 1), (d'_4, 1))
\end{array}
$$

Mise à jour après libération du quorum

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
D_1	d'_1 1		d'_1 1		d'_1 1	
D_2	d'_2 1			d'_2 1		d_2 0
D_3		d'_3 1	d'_3 1			d_3 0
D_4		d'_4 1		d'_4 1	d'_4 1	

Exemple d'exécution (3/3)

Lecture par S_6 $(S_2 \ldots S_6)$

$$S_6? \qquad \begin{array}{l} (S_2,(d'_3,1),(d'_4,1)) \\ (S_3,(d'_1,1),(d'_3,1)) \\ (S_4,(d'_2,1),(d'_4,1)) \\ (S_5,(d'_1,1),(d'_4,1)) \\ (S_6,(d_2,0),(d_3,0)) \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{l} Vmax = 1 \\ D' = d'_1 \bigoplus d'_2 \bigoplus d'_3 \bigoplus d'_4 \\ \mathrm{NV} = 1 \end{array}$$

Après lecture par S_6

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
D_1	d'_1 1		d'_1 1		d'_1 1	
D_2	d'_2 1			d'_2 1		d'_2 1
D_3		d'_3 1	d'_3 1			d'_3 1
D_4		d'_4 1		d'_4 1	d'_4 1	

Schéma de preuve

Rappel des conditions sur W et R :

C_1 : $FR \leq R \leq n$ & $FR \leq W \leq n$
C_2 : $W + W > n$
C_3 : $n + FR \leq R + W \leq 2n$

preuve

- $C_1 \mapsto$ Tout quorum de lecture (d'écriture) est **suffisamment grand** pour récupérer **chaque fragment** de la donnée
  (! ! pas nécessairement le plus récent)
- $C_2 \mapsto$ **Pas d'écritures simultanées**
- $C_{3\_}a \mapsto W + R > n$ **Lecture et Ecriture sont exclusives**
- $C_{3\_}b \mapsto W + R \geq n + FR \Rightarrow |W \bigcap R| \geq FR$
  Tout quorun de lecture **intersecte** tout quorum d'écriture sur au moins FR sites
- C_1 et $C_{3\_}b \mapsto$ **Tout quorum** (lecture ou écriture) permet de récupérer l'**exemplaire le plus récent** de **chaque** fragment de la donnée

Outline

9. Exclusion Mutuelle Répartie : taxinomie des algorithmes
   - Algorithme à base de Jeton
   - Anneau à Jeton Circulant (Token Ring)
   - Algorithmes à Base de Permissions
   - Algorithme de Trehel-Naimi (1987) : Jeton à la demande

Exclusion Mutuelle Répartie : taxinomie des algorithmes (M. Raynal 1988)

Rappel : Problèmes à résoudre (cf L. Lamport)

Safety : Au plus une CS en cours

Liveness : Tout agent en attente de CS y accèdera en un temps fini.

Taxinomie des algorithmes d'Exclusion Mutuelle

1. Algorithmes à base de Jetons (Le Lann 1977)
2. Algorithmes à base de Permissions (Lamport 1978)

Remarques sur l'exclusion mutuelle

– Problématique déja rencontrée dans les algos de gestion des données dupliquées et illustration des horloges de Lamport.
Algos déja vus sont à base de permission
$\neq$ variantes en vue de minimiser le nombre de messages

– Un des pbs les plus étudiés de l'algorithmique répartie.
Pas forcément le moins intéressant.

Algorithmes à base de jeton

Principe : Droit d'accès en SC est matérialisé par un "Jeton"

- Unicité du Jeton ⇔ Exclusion Mutuelle (safety)
- Accès Equitable au Jeton ⇔ Absence de Famine (liveness)
  1. Mouvement Perpétuel (Jeton bouge spontanément ex :anneaux)
  2. Mouvement à la demande (Jeton ne bouge que s'il est demandé)

     Focus sur Naimi-Trehel 87 Arbre Reconfigurable dynamiquement

Algo hybride hors classe :
Exclusion Mutuelle Centralisée

Jeton (token-asking)
Permission (1 site possède toutes les suffrages)

Anneau à Jeton Circulant (Token Ring)

Le pour et le contre

Pour :

- Simplicité
  (simplicité "relative" cf tp Systèmes concurrents semestre suivant)
- Taille des messages (0)
- Nombre de Messages (0 ?)
- Panne d'un site "facilement" récupérable

Contre :

- Communication Permanente
  (liée à la circulation du jeton)
- Tous les sites participent même ceux inactifs
  (intérêt de Naimi-Trehel vu un peu plus loin)
- Temps minimum entre deux C.S consécutives
  indépendant de l'activité
  dépend des positions respectives des sites

Algorithmes à Base de Permissions : rappels

Principe général (safety)

- Site : oisif, attente, section critique
  - Un site oisif envoie une requête (**signée**) "aux autres" et passe en attente
  - Un site oisif recevant une requête répond *ok* et reste oisif
  - **Verdict** : Si toutes les réponses sont ok $->$ entrée en SC
    Sinon **Conflit et Inter-blocage**

Résolution des conflits (liveness)

nb : solution **simple** si tous les sites en conflit se **connaissent**
– Déterminer un ordre sur l'ensemble des sites en conflit

- Statique (basé sur l'identité des sites)
- Dynamique (basé sur l'exécution du système)
  cf compteurs de requêtes, Horloges de Lamport
- Aléatoire (cf tirage au sort)

– Résolution basée sur l'ordre obtenu : 1^{er} dans l'ordre passe en CS ; lorsqu'il sort, il prévient le second dans l'ordre .... etc
$\mapsto$ Résolution **Inter-blocage + Famine**

Algorithmes à Base de Permissions : Panorama

Algorithmes

Classiques : Lamport 78, Ricart & Aggrawala 81
Evolutions : Votes (85), Quorums (85.....)
$\Downarrow$ Nombre de Messages
$\Uparrow$ Résolution Inter-blocage & Famine
(Maekawa 85) Complexité $c \times \sqrt{n}$ messages où $3 \leq c \leq 5$
& Horloges non bornées

Qualités

- Nombre de Messages : $c \times \sqrt{n}$ à $2 \times n$
  Taille des messages : bornée ou non bornée
  Simplicité : dépend de la résolution des conflits
- Temps minimum entre deux C.S consécutives :
  - dépend du nombre de messages et de la résolution les conflits
  - indépendant de la position dans la topologie

Algorithme de Trehel-Naimi (1987) : Taxinomie : Algo à base de demande de Jeton

Principe Général

- **Arborescence dynamique** des sites
- La racine possède le **privilège** (jeton)
- La position de racine est **temporaire**
- Chaque site connaît son prédécesseur dans l'arbre (*dernier*)
- Une demande d'un site S_i va transiter (via la relation *dernier*) jusqu'à la **racine** de l'arbre
- L'arbre **évolue** au fur et à mesure des demandes d'entrée en CS ;
- Les sites inactifs se retrouvent progressivement en position de feuille

Intérêt de Naimi-Trehel

Résolution **Conjointe :** Exclusion Mutuelle + Famine
Complexité *moyenne* en $log(n)$

Description de l'algorithme de Trehel-Naimi

Contexte d'un site

Etat d'un site :

Application : *oisif*, *attente*, *CS* (mutuellement exclusifs)

Gestion de l'Arbre : *privilege*, *dernier*(*_autre*)

(_autre = *nil* si le site est une racine)

Communication : Chaque site a deux files de communication : *req* et *ack*

Sur *req* réception des requêtes (requêtes "*signées*")

Sur *ack* réception de l'autorisation

Conditions Initiales : Sites = (S_i) $\;i \in [1..n]$

Tous les sites sont dans l'état *oisif*

S_1 est la racine initiale

$S_i \neq S_1 \rightarrow \mathit{dernier}(S_1)$ est vrai, privilège est faux

Pour S_1, privilège est vrai, dernier(nil) est vrai

$\mapsto$ **Configuration d'étoile centrée en S_1**

Description de l'algorithme de Trehel-Naimi : Comportement d'un site (1/2)

Emission d'une Requête

Un site oisif
  n'étant pas la racine (dernier(@ref))
  envoie sa requête à son père (@ref)
  passe en état d'attente et positionne dernier à nil.
  – *Il se considère ainsi comme la prochaine racine !*

Entrée en C.S

Un site en attente recevant un message ok entre en CS

Sortie de C.S

Un site en CS quitte la CS retourne à l'état oisif
Il positionne privilege à vrai

Description de l'algorithme de Trehel-Naimi : Comportement d'un site (2/2)

Transit d'une requête via un noeud intermédiaire

Un site oisif ayant pour père @ref (dernier(@ref))
recevant la requête du site *i*, transmet cette requête à son père (@ref)
il reste oisif mais positionne dernier à *i*
– *le site de transit "sait" que le site demandeur deviendra la racine ;*
il change de père au profit de la prochaine racine

Réception d'une requête par la racine

La racine (dernier(nil)), oisive
recevant la requête du site *i*
lui renvoie le message ok
reste oisif et positionne dernier à *i* (change de père)

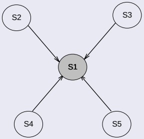
Entrée en C.S de la racine

La racine (dernier(nil)) oisive
"n'étant pas soumise à une requête "
entre en CS

Description de l'algorithme de Trehel-Naimi : Exemples d'exécution (1/3)

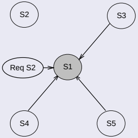
Etat initial

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Dernier	nil	S_1	S_1	S_1	S_1
Privilege	V	F	F	F	F
Etat	oisif	oisif	oisif	oisif	oisif
Req	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
Ack	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$



S_2 a demandé à entrer en CS

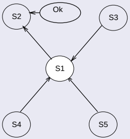
	S_1	S_2
Dernier	nil	nil
Privilege	V	F
Etat	Oisif	Attente
Req	[2]	$\emptyset$
Ack	$\emptyset$	$\emptyset$



Description de l'algorithme de Trehel-Naimi : Exemples d'exécution (2/3)

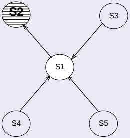
Réception par S_1 & Envoi d'un ack

	S_1	S_2
Dernier	S_2	nil
Privilege	F	F
Etat	Oisif	Attente
Req	$\emptyset$	$\emptyset$
Ack	$\emptyset$	[ok]



Réception du ack et passage en CS

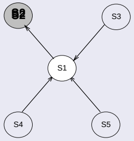
	S_1	S_2
Dernier	S_2	nil
Privilege	F	F
Etat	Oisif	CS
Req	$\emptyset$	$\emptyset$
Ack	$\emptyset$	$\emptyset$



Description de l'algorithme de Trehel-Naimi : Exemples d'exécution (3/3)

Retour à Oisif

	S_1	S_2
Dernier	S_2	nil
Privilege	F	V
Etat	Oisif	Oisif
Req	$\emptyset$	$\emptyset$
Ack	$\emptyset$	$\emptyset$



Quid de la complexité ?

$Log(n)$ **en moyenne /** n **dans le pire des cas**

voir exemple illustratif à la suite

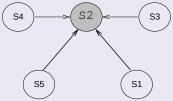
Variante Arbre "Equilibré" Helary-Raynal (94) $Log(n)$

"AVL" distribué : la topologie est nettement moins dynamique !

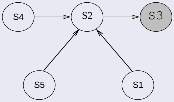
Modification de la topologie : Illustration du pire cas (1/2)

On choisit initalement le pire cas

Requète de S_2 et Accès en CS

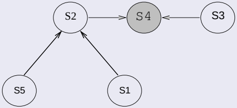


Requête de S_3 et Accès en CS



Modification de la topologie : Illustration du pire cas (2/2)

Requête de S_4 et Accès en CS



Retour au pire cas ...

Après une requête de S_5

Après une requête de S_1

Après une requête de S_2

Exclusion Mutuelle : bilan comparatif

Complexité

n	Ricart & Agrawala $2 \times (n-1)$	Maekawa $3\sqrt{n}$	Trehel $Log(n)$
100	198	30	5,2
1000	1998	93	7,5
10000	19998	300	9.8

Vivacité (absence de Famine)

	Ricart & Agrawala	Maekawa	Trehel
	Compteurs (bornés)	Horloges (Lamport) Non-Bornées	Intégré

Outline

10. Epilogue
    - Conclusion
    - Bibliographie
    - Table des Matières

Rapide bilan

Quelques Outils Génériques

- Temps causal,
- Phases,
- Vagues,
- Consensus, Quorums, Systèmes de votes, ...

Quelques problèmes classiques

- Election (Tirage au sort),
- Exclusion mutuelle,
- Gestion des Données Distribuées,
- Calcul d'arbre couvrant
- Calcul de tables de routages
- Détection de la Terminaison
- Diffusion causale
- Etat Global Réparti, ...

Bibliographie

Computer Networks A.S Tannenbaum – Prentice Hall

Elements of Distributed Algorithms :
Modeling and analysis with Petri Nets
W. Reisig – Springer

Concurrent Programming : Algorithms, Principles and Foundations
M. Raynal – Springer

Distributed Algorithms for Message-Passing Systems
M. Raynal – Springer

Communication et le temps dans les réseaux et les systémes répartis
Synchronisation et état global dans les systémes répartis
Gestion des données réparties : problémes et protocoles
M. Raynal – Collection E.D.F, Eyrolles - 1992

Table des Matières

Table des Matières

Table des Matières