Pt 3-4

UNIVERSITE PAUL SABATIER

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

ARRIVE LE 20 DEC. 2011 COURRIER

CABINET DU PRESIDENT


académie Toulouse

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DE LA VIE ASSOCIATIVE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

**Rectorat**

**Inspection Pédagogique Régionale**

Téléphone Secrétariat : 05 61 17 72 16
Télécopie 05 61 17 72 11

Courriel Secrétariat : ipr@ac-toulouse.fr
Contact Inspection - Martine RAYNAL : Martine.Raynal@ac-toulouse.fr
Contact Jean AYMES : jaymes@ac-toulouse.fr

**Place Saint-Jacques**
**31073 Toulouse cedex**


Toulouse, le 9 décembre 2011

Jean AYMES
Inspecteur pédagogique régional Mathématiques honoraire
Responsable de la cellule académique des Olympiades de Mathématiques

à **Monsieur Gilles FOURTANIER**
Président de l'Université Paul Sabatier

Monsieur le Président,

**Objet** : Olympiades académiques de Mathématiques 2012

Les Olympiades académiques de mathématiques vont connaître en 2012 leur douzième session ; celles-ci sont organisées sous la responsabilité de l'Inspection Générale et de la Direction Générale à l'Enseignement Scolaire comme facteur de stimulation de l'esprit de recherche.

Les épreuves auront lieu le mercredi 21 mars 2012 matin.

Cette compétition s'adresse à toutes les lycéennes et tous les lycéens volontaires élèves des classes de première de toutes les séries générales et technologiques. Elle est faite pour développer le sens de l'initiative, le goût de la recherche, le lien entre les mathématiques et les autres sciences. Elle s'inscrit dans la volonté de promouvoir le goût pour les Mathématiques, la culture scientifique, les motivations pour les poursuites d'études et le choix de carrières scientifiques. Valoriser le palmarès de l'Académie de Toulouse en le dotant de lots significatifs est important.

Lors des précédentes éditions, vous avez pu contribuer à cette dotation. Ceci a permis d'attribuer des récompenses particulièrement en rapport avec la signification scientifique de ce concours ainsi qu'avec les potentialités de la région en matière de recherche.

Je vous sollicite pour valoriser à nouveau la mobilisation et la performance des lauréats, d'autant plus, en cette douzième occurrence, de par la pérennité pour enrichir l'image des Mathématiques.

Pourriez-vous apporter votre concours à la dotation en prix des olympiades 2012 ? Ainsi, la reconduction de la subvention de 350 euros accordée en 2011 serait appréciée. La remise de prix aura lieu début juin.

Je vous remercie pour votre contribution au succès de cette opération.

Jean AYMES

Aymes

**P.J.** : sujet 2011 et extrait du compte rendu 2011.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DE LA VIE ASSOCIATIVE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

# « Olympiades académiques de Mathématiques »

## Bilan de la session 2011

Les olympiades académiques de Mathématiques sont organisées depuis 2001 sous la responsabilité de la Direction Générale à l'Enseignement scolaire et de l'Inspection Générale.
Elles ont pour but de promouvoir la culture scientifique, les motivations pour les mathématiques.
Elles s'adressent aux élèves volontaires des classes de première ; les élèves de toutes les séries générales et technologiques (voir http://pedagogie.ac-toulouse.fr/math/viedesmaths/olympiades).

**Les candidats à la session 2011**
Pour l'académie, 598 candidats : 395 garçons et 203 filles … deux fois plus que l'an dernier (276 candidats en 10) ; la grande majorité en première scientifique avec seulement 84 candidats des autres séries. Alors que ce concours est clairement ouvert à tous les lycéens de Première, la participation d'élèves des séries technologiques ou d'élèves des séries Economique et Sociale ou Littéraire reste toujours médiocre ; pourtant le sujet est réellement conçu pour leur permettre de figurer honorablement.
Les candidats se répartissent, un peu inégalement, sur les sept départements : Ariège (14 contre 10 en 2010), Aveyron (52 contre 62), Haute-Garonne (277 contre 109), Gers (11 contre 0), Lot (33 contre 23), Hautes-Pyrénées (74 contre 14), Tarn (130 contre 47), Tarn-et-Garonne (7 contre 11). En cela, l'accroissement de la participation dans certains départements reste attendue ; le défaut total, quelques fois habituel, de participation de certains lycées pourrait y contribuer …

Manifestement, il faut poursuivre l'effort pour :
- inciter les élèves de séries non scientifique à participer, alors que sujet et palmarès sont réellement adaptés pour qu'ils puissent significativement s'impliquer ;
- encourager la participation des jeunes filles ;
- amplifier l'implication de chaque lycée ; deux prix spéciaux pour les établissements ont été décernés cette session 2011.

**Le sujet 2011**
Six exercices composent le sujet ; comme les années antérieures, le premier et le deuxième posés au plan national pour tous les candidats, les quatre autres proposés par la cellule académique pour permettre une différenciation selon les séries (autres que série S. et d'autre part série S.). Chaque participant a quatre exercices à résoudre.

Ces exercices sont des problèmes à chercher. Il faut aimer les problèmes, non pour ce qu'ils sont, mais pour ce qu'ils font faire, pour ce qu'ils éclairent de la saveur des Mathématiques ; c'est développer le sens de l'initiative, le goût de la recherche, les liens entre mathématiques et autres domaines. Cela vaut pour tous les élèves.

**Les lauréats**
• Pour l'académie, 42 lauréats sont retenus dont :
- Six lauréats pour les séries non scientifiques, série Sciences Economiques (trois), série Sciences et Techniques Industrielles (un), série Littéraire (un), série Sciences et Technologies de la Gestion (un) ; deux sont retenus dans le palmarès national (série L. et série S.T.G.).
- Trente-six lauréats pour la série Scientifique classés par ordre de mérite ; un est retenu dans le palmarès national.
- 24 lycées (contre 17 en 2010) ont cette année au moins un lauréat (sur les 115 de l'académie), c'est une bonne évolution.
- Les copies des premiers lauréats sont soumises au jury national, cette année encore l'académie voit des lauréats récompensés au plan national (trois, série L., série S.T.G., série S.).
• D'autre part, cette année, **deux prix spéciaux** a été créés pour les lycées :
- au titre des lycées nouvellement participants
- au titre du « challenge Olympiades académiques de Mathématiques » pour la fidélité, la diversité, l'ampleur, la valeur de la participation.
Un lot collectif consistant en un équipement de calculatrices fourni par la société Texas Instruments est attribué lors d'une remise de prix sur place.

**La remise des prix, les récompenses pour l'Académie en 2011 :**
La remise de prix académique est placée sous le patronage de Monsieur le Recteur.





Le trophée de l'Académie est décerné par Monsieur le Recteur au lauréat classé premier.
Chacun des lauréats reçoit le diplôme des Olympiades académiques 2011.
En confirmation de ce qui a eu lieu les années précédentes, divers partenaires ont contribué avec attention à la dotation en récompenses : Région, ISAE, Ecole des Mines d'Albi-Carmaux, Institut Mathématique de Toulouse, Département de Mathématiques, INSA, ENAC, Université Paul Sabatier, Faculté des Sciences Economiques, CNRS, LAAS, Observatoire Midi-Pyrénées, GREMAQ, AIRBUS, EADS ASTRIUM, CNES, Cité de l'Espace, Science Animation, sociétés CASIO, Texas Instruments, Microsoft, Union Régionale des Ingénieurs et Scientifiques de Midi Pyrénées, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, *« femmes et mathématiques »*.

Ceci permet d'attribuer des récompenses à signification essentiellement scientifique :
- Voyages à Paris avec accueil à l'Ecole Normale (département de Mathématiques) et au Palais de la Découverte (Ecole des Mines d'Albi-Carmaux, Institut Mathématique de Toulouse)
- Un ordinateur muni d'un logiciel mathématique offert par le LAAS (Laboratoire d'Architecture et d'Analyse des Systèmes)
- Prix spécifique de la Faculté de Sciences Economiques
- Accueil à l'ISAE (Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, laboratoires et vols d'essais)
- Accueil à l'INSA (école, palette exemplaire des formations d'ingénieur sciences appliquées)
- Accueil à l'ENAC (école, installations de l'instruction aviation civile)
- Séjour à l'Observatoire du Pic du Midi (installations scientifiques)
- Visite du plus important laboratoire de recherche du CNRS, le Laboratoire d'Architecture et d'Analyse des Systèmes.
- Accueil au GREMAQ, Groupe de Recherche en Economie Mathématique et Quantitative (Université Toulouse I, EHESS, CNRS)
- Matériel et ouvrages d'astronomie offerts par Science Animation
- Entrées à la Cité de l'Espace
- Ouvrages ou dvd scientifiques ou culturels (Région, Université Paul Sabatier, AIRBUS, ASTRIUM, CNES)
- Calculatrices offertes par la société CASIO et la société Texas Instruments
- Médaille de l'Union Régionale des Ingénieurs de Midi Pyrénées
- Recensions de problèmes des Olympiades académiques de Mathématiques offerts par Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

Les lauréats, leurs professeurs, leurs chefs d'établissement sont reçus au Rectorat pour la remise de prix en présence des partenaires.

**Stimuler l'activité mathématique dans les classes, se préparer**
Dans le cadre de l'accompagnement personnalisé proposé au Lycée, la préparation aux Olympiades dans les établissements est un sujet particulièrement adapté. Cette exploitation des ressources produites par les Olympiades est une occasion complémentaire d'intéresser un large public (de toutes les sections des classes de premières) aux mathématiques, de détecter des talents, de créer des vocations scientifiques, de permettre une approche différente des problèmes mathématiques.

**Des brochures spécifiques de l'A.P.M.E.P. … un accès aux sujets antérieurs**
L'association des professeurs de Mathématiques produit chaque année une brochure qui propose le rapport de l'épreuve, tous les sujets et leurs solutions (très souvent multiples). Il s'agit de la brochure n° 142 pour 2001, n° 146 pour 2002, n°158 pour 2003, n° 163 pour 2004, n° 171 pour 2005, n° 177 pour 2006, n° 182 pour 2007, n° 186 pour 2008, n° 190 pour 2009 (**http://www.apmep.asso.fr**). C'est un outil précieux, riche en idées d'énoncés, de solutions, et largement utilisable dans les classes ; ainsi sont accrues les possibilités pour poser des problèmes en classe. Ces brochures sont un excellent moyen de s'entraîner, ou simplement de trouver du plaisir à faire des Mathématiques.

**Nouveauté, depuis 2009-2010** : la totalité des sujets proposés en 2009, 2010 et 2011 dans les académies est consultable en ligne par :
http://pedagogie.ac-toulouse.fr/math/viedesmaths/olympiades.
Le site national des Olympiades académiques est consultable à l'adresse :
http://eduscol.education.fr/cid46901/olympiades-academiques-de-mathematiques.html

# OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

**Académie de Toulouse et Agence pour l'enseignement français à l'étranger – zone ibérique**
SESSION 2011

**CLASSES DE PREMIÈRE**
DURÉE : 4 heures

*Avertissement : Le sujet propose six exercices indépendants.*
***Chaque candidat doit traiter seulement quatre exercices selon la répartition suivante* :**
- *candidats élèves de la série S. : traiter les exercices 1, 2, 5 et 6 ;*
- *candidats élèves des autres séries : traiter les exercices 1, 2, 3 et 4.*

*Les calculatrices sont autorisées.*
*Il est rappelé que la qualité des explications est un critère important d'appréciation.*
*D'autre part, les candidats sont aussi encouragés à rédiger sur la copie leurs tentatives de recherche même non abouties.*

**Exercice 1 (national) :** ***Essuie-glaces*** *(tous candidats)*
**Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes**

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-contre). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui-ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au $cm^2$ près.

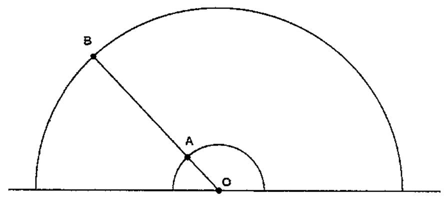


Fig. 1

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur $R$, l'un tournant autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que : OO' = $R$ (voir figure 2 ci-contre).

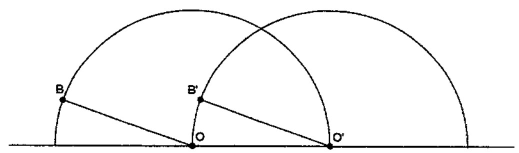


Fig. 2

Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

3. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-contre) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $\widehat{OCA} = 30°$, $CB = 4\,CA$ et $OC = \sqrt{3} \times CA$.
On pose CA = $a$.

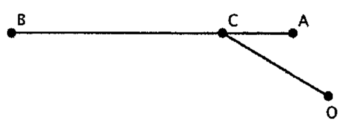


Fig. 3

a. Démontrer que le triangle AOC est isocèle.



b. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-contre).
En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.

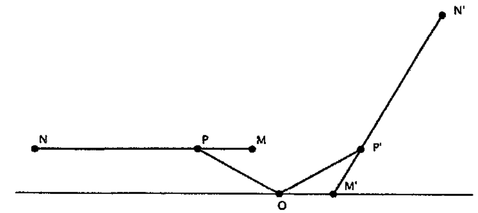


Fig. 4

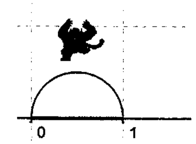
Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de $a$ l'aire de la surface essuyée par le balai.

**Exercice 2 (national) :** ***Le singe sauteur*** *(tous candidats)*

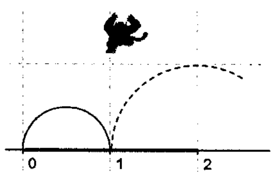
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre $n$ est dit ***atteignable*** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse $n$ en **exactement** $n$ bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, $n$ (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment [0 ; $n$].

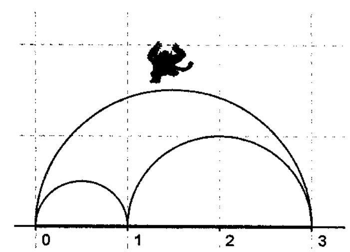
*Par exemple* : Le nombre 1 est atteignable en un bond.




Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle [0 ; 2].




Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle [0 ; 3]) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.




**Questions**
1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.

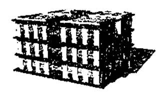
2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis.*

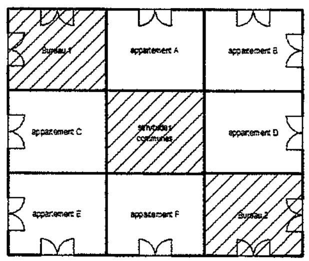
3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier $m$, on a : $1+2+3+\dots+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.
5. a) Montrer que si le nombre entier $n$ est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier $n$ pour qu'il soit atteignable.
   b) La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?
6. On suppose $N \geq 6$ et atteignable par une séquence qui commence par 1+2+3 … Montrer que $N+4$ est aussi atteignable.



**Exercice 3 (académique) : *L'immeuble*** *(candidats élèves des séries autres que la série S.)*

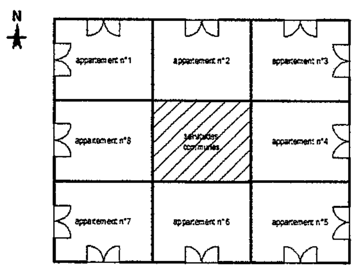



1. Six familles vivent au premier étage d'un immeuble dans les appartements A, B, C, D, E, F disposés selon le plan ci-contre. En tout vingt personnes habitent ces six appartements et il y a au moins deux personnes dans chaque appartement.

De plus, la famille occupant l'appartement A compte deux fois moins de membres que la famille occupant l'appartement F, et si on réunit ces deux familles, on obtient un nombre impair de personnes.

La famille BRUHAT est la famille la plus nombreuse parmi celles habitant l'étage.

Quel appartement habitent les BRUHAT ? Combien sont-ils ?




2. Au deuxième étage de ce même immeuble vivent également vingt personnes réparties dans huit appartements disposés selon le plan ci-contre.

Les heureux élus qui ont vue à l'Est, sur le stade, sont, hélas deux fois moins nombreux que ceux dont la vue, au Sud, donne sur l'usine d'incinération, mais deux fois plus nombreux que ceux qui, au Nord, font face à la prison.

Quant à ceux qui regardent l'Ouest, exactement le tiers de ceux qui font face au Sud, ils peuvent se distraire avec l'animation du centre commercial.

Aucun appartement n'est vide.

L'appartement comptant le plus grand nombre d'occupants est habité par la famille TITS.

Au fait, quel appartement habitent les TITS et combien sont-ils ?

**Exercice 4 (académique) : *Le Mathothon en Borelie*** *(candidats élèves des séries autres que la série S.)*

On organise chaque année en Borelie un Mathothon télévisé : des émissions mettant en valeur les nombreuses facettes de l'activité mathématique sont diffusées tout au long d'un week-end et les foyers qui le souhaitent peuvent promettre d'effectuer un don unique de 30 euros. Ils ne tiennent pas nécessairement leur promesse par la suite hélas. Heureusement, certains des foyers n'ayant rien promis effectuent, eux, un don de 30 euros.

L'objectif du Mathothon est de récolter des fonds pour financer des projets scientifiques.



1. En 2010, on dénombrait 772 000 foyers en Borelie. Lors du Mathothon de cette année là, 36% des foyers ont fait une promesse de don (on les appelle les « prometteurs »).
   a) Cela avait-il permis d'espérer une recette d'au moins 8 000 000 euros ? Pourquoi ?
   b) On a récolté en tout 7 954 560 euros ; on estime alors que 30 % des promesses n'ont pas été tenues, alors que des foyers n'ayant rien promis (on les appelle les « non prometteurs ») se sont résolus à donner. Quel a été, en 2010, le pourcentage de donateurs parmi les foyers « non prometteurs » ? Arrondir la réponse au dixième près.
2. Lors du Mathothon 2011, le nombre de foyers s'élève à 784 000 et 34% d'entre eux ont fait une promesse de don. On attend d'un moment à l'autre les résultats définitifs du Mathothon 2011.
   a) Cela permet-il d'espérer une recette d'au moins 8 000 000 euros ? Pourquoi ?
   b) Les résultats viennent de tomber : la somme effectivement récoltée en 2011 est de 7 962 540 euros. On considère que le pourcentage des « prometteurs » n'ayant pas fait de don est le double de celui des « non-prometteurs » qui en ont fait un. Déterminer ces pourcentages ; arrondir la réponse au dixième près.

**Exercice 5 (académique) : *Interdiction de doubler*** *(candidats élèves de la série S.)*

Un ensemble $A$ de nombres réels est dit "sans double" ( ou SANDO en abrégé) quand aucun élément de $A$ n'est le double d'un élément de $A$.

Un SANDORI est un SANDO constitué d'une Réunion d'Intervalles inclus dans l'intervalle [0 ; 1] sans élément commun. Par exemple : $[0{,}11 ; 0{,}22[ \cup [0{,}45 ; 0{,}9[$ est un SANDORI.

La longueur d'un SANDORI est la somme des longueurs des intervalles qui le constituent. Par exemple : $[0{,}11 ; 0{,}22[ \cup [0{,}45 ; 0{,}9[$ est un SANDORI de longueur 0,56.

On cherche les SANDORI les plus longs possibles.

1. a) Justifier soigneusement que $[0{,}11 ; 0{,}22[ \cup [0{,}45 ; 0{,}9[$ est bien un SANDORI de longueur 0,56.

   b) Trouver un SANDORI de la forme $[0{,}11 ; a[ \cup [b ; c[$ avec $a < b < c$ dont la longueur est supérieure ou égale à 0,61.
2. a) S'il existe un SANDORI de longueur $L$, montrer qu'il existe un autre SANDORI de longueur supérieure ou égale à $L$ contenant l'intervalle $]0{,}5 ; 1]$.
   b) En déduire que les SANDORI les plus longs possibles ont une longueur comprise entre 0,5 et 0,75.
3. S'il existe un SANDORI de longueur $L$, contenant l'intervalle $]0{,}5 ; 1]$, montrer qu'il existe un autre SANDORI de longueur supérieure ou égale à $L$ contenant les intervalles $]0{,}5 ; 1]$ et $]0{,}125 ; 0{,}25]$
   En déduire un nouvel encadrement de la longueur des SANDORI les plus longs.
4. Déterminer un SANDORI dont la longueur dépasse 0,65.
5. Déterminer une valeur approchée au centième près de la longueur des SANDORI les plus longs.

**Exercice 6 (académique) : *Tableaux de Hadamard*** *(candidats élèves de la série S.)*

On désire remplir un tableau de $n$ lignes et de $n$ colonnes (avec $n$ entier strictement supérieur à 1) avec des " 1 " ou des " -1 " ; on appelle coefficients les nombres figurant dans un tel tableau.

On dira que deux colonnes du tableau sont orthogonales quand, en effectuant la somme des produits de leurs coefficients successifs, on obtient 0. Voici à titre d'exemples des colonnes orthogonales ou non orthogonales :

Deux colonnes orthogonales de quatre lignes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | ⟶ | 1 x 1 |
| -1 | 1 | ⟶ | + (-1) x 1 |
| 1 | 1 | ⟶ | + 1 x 1 |
| 1 | -1 | ⟶ | + 1 x (-1) |
| | | | = 0 |

Deux colonnes non-orthogonales de quatre lignes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | ⟶ | 1 x 1 |
| -1 | 1 | ⟶ | + (-1) x 1 |
| 1 | -1 | ⟶ | + 1 x (- 1) |
| 1 | -1 | ⟶ | + 1 x (-1) |
| | | | = -2 |

On étudie s'il est possible de remplir un tableau de $n$ lignes et de $n$ colonnes (avec $n$>1) avec des " 1 " ou

des " -1 " de façon à ce que les colonnes du tableau soient **deux à deux** orthogonales.
Un tel tableau est appelé " un tableau de Hadamard " de taille $n$.

1. a) Le tableau ci-contre est un tableau de Hadamard. Expliquer pourquoi.

| | | | |
|---|---|---|---|
| -1 | 1 | -1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | -1 | -1 |
| 1 | -1 | -1 | 1 |

b) Dresser la liste de tous les tableaux de Hadamard de taille $n=2$.

c) Peut-on trouver des tableaux de Hadamard de taille $n=3$ ? Expliquer.

2. On suppose que l'entier $n$ est strictement supérieur à 3 et qu'il existe un tableau de Hadamard $H_1$ de taille $n$.

a) Expliquer pourquoi $n$ est pair.

b) Si le premier coefficient de la première colonne de $H_1$ est "-1", expliquer comment modifier les coefficients de la première ligne de $H_1$ pour obtenir un tableau de Hadamard dont le premier coefficient de la première colonne soit "1".

c) Expliquer comment on peut obtenir, à partir de $H_1$, un tableau de Hadamard dont tous les coefficients de la première colonne sont des "1".

3. On suppose toujours que l'entier est $n$ est strictement supérieur à 3 et qu'il existe un tableau de Hadamard $H_1$ de taille $n$ ; par conséquent $n$ est pair ; on pose $n=2p$.

a) Montrer qu'on peut construire un tableau de Hadamard $H_2$ dont la première colonne ne contient que des "1" et dont la deuxième colonne contient des "1" aux $p$ premières lignes et des "-1" aux lignes suivantes (voir schéma ci-contre).

Soit, en seconde colonne, en descendant :

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | |
| 1 | 1 | $p$ valeurs " 1 " |
| ... | ... | |
| ... | 1 | |
| ... | -1 | |
| ... | -1 | $p$ valeurs " -1 ". |
| ... | ... | |
| 1 | -1 | |

b) En déduire que s'il existe un tableau de Hadamard de taille $n$ ($n>3$), alors $n$ est un multiple de 4.

4. Comment peut-on, à partir du tableau du 1. a), construire un tableau de Hadamard de taille 8 ?

5. Faire le bilan des questions précédentes en indiquant :
- quelles sont les valeurs de l'entier $n$ pour lesquelles on sait qu'il existe un tableau de Hadamard,
- quelles sont les valeurs de l'entier $n$ pour lesquelles on sait qu'il n'en existe pas,
- un exemple de valeur de l'entier $n$ pour laquelle on ne sait pas s'il existe un tableau de Hadamard.

Remarques : Jacques HADAMARD (1865-1963) est un mathématicien français. D'une part, la " conjecture de Hadamard " est un problème mathématique toujours ouvert à l'heure actuelle. Elle s'énonce ainsi : " il existe un tableau de Hadamard de taille $4k$ pour tout entier $k>0$. " Depuis la construction d'un tableau de Hadamard de taille 428, en 2004, le premier entier pour lequel on ne sait pas s'il en existe est $n=668$. D'autre part, ces tableaux interviennent en Mathématiques appliquées. Lors d'une expérimentation pour acquérir de nouvelles connaissances en contrôlant plusieurs paramètres d'entrée, il est précieux de parvenir à réduire le nombre d'essais ; ces tableaux interviennent dans la théorie des plans d'expérience dont le propos est d'optimiser la suite ordonnée d'essais d'une expérimentation.