Modélisation Différentielle du Trafic et Simulation Hybride Distribuée

Jean-Marie Garcia* — David Gauchard* — Olivier Brun*
Pierre Bacquet — James Sexton*** — Eoin Lawless*****

* *LAAS-CNRS*
7, avenue du Colonel Roche, 31077 Toulouse
{jmg, gauchard, brun}@laas.fr

** *Delta Partners*
Immeuble ACTYS, Bât. 1, Voie 3- BP 341 - 31313 Labège
pba@delta.fr

*** *Trinity College of Dublin*
Dublin 2, Ireland
{sexton, eoin}@maths.tcd.ie

ABSTRACT. *This paper describes a new concept of distributed hybrid simulation for transient and stationary performance evaluation of large scale telecommunication networks. A global network model is established on the basis of traffic differential theory. Analytical nodes and simulated nodes are combined into this global framework. Parallelisation is twofold : a coarse grain level based on partitioning techniques and a fine grain level based on trajectory (sample) decomposition. Results on some test-bed networks show the accuracy of this approach and its fast computing capability.*

RÉSUMÉ. *Cet article décrit un nouveau concept de simulation hybride distribuée pour l'évaluation des performances des grands réseaux de télécommunications en régimes transitoires et stationnaires. Un modèle global du réseau est établi sur la base de la théorie différentielle du trafic. On obtient ainsi une approche globale dans laquelle le comportement de certains noeuds du réseau est calculé analytiquement tandis que celui des autres noeuds est obtenu par simulation. Cette approche est de plus très parallélisable. Les résultats obtenus sur des réseaux tests montrent l'intérêt de cette approche, aussi bien en terme de précision qu'en terme de temps de calcul.*

KEYWORDS: *Telecommunication networks, Performance evaluation, Queueing theory, Traffic differential modelling, Stochastic simulation, Parallel algorithm.*

MOTS-CLÉS : *Evaluation des performances, Réseaux de télécommunications, Files d'attente, Modélisation différentielle du trafic, Simulation stochastique à événements discrets, algorithmique parallèle.*

1. Introduction

Durant la dernière décennie, les réseaux de télécommunications ont connu un développement sans précédent qui s'est accompagné d'un accroissement important de leur complexité : augmentation de la taille des réseaux, intégration de technologies hétérogènes (MPLS, ATM, SDH, VoIP,. . .), etc. Pour la maîtrise de ces systèmes, il est nécessaire de disposer d'outils performants de planification de réseaux (topologie, dimensionnement, routage). Un aspect essentiel de la planification concerne le modèle d'évaluation de performances utilisé. A ce niveau, il faut disposer de modèles réseaux qui soient :

– suffisamment précis pour évaluer correctement la qualité de service de chaque trafic dans un grand réseau,

– capables de représenter la réponse transitoire du système à des perturbations du trafic et le fonctionnement en boucle fermée de certains protocoles (TCP, OSPF. . .),

– capables de prendre en compte les caractéristiques statistiques spécifiques du trafic généré par chaque source (voix, vidéo, web. . .),

– suffisamment rapides pour être utilisés dans des boucles d'optimisation itérative pour la planification de grands réseaux de télécommunications.

Les approches traditionnelles dans ce domaine sont le prototypage, la modélisation analytique et la simulation événementielle. Le prototypage est en général hors de coût même pour des réseaux de taille modeste. La modélisation analytique, basée sur la théorie des files d'attente, est une approche puissante mais dont la capacité à représenter finement certains mécanismes complexes, et notamment le comportement réactif des protocoles, reste limitée. Par conséquent, une modélisation analytique exacte ayant toutes les propriétés précédentes semble aujourd'hui complètement inenvisageable compte tenu de nos connaissances théoriques. En particulier, il est bien connu qu'une modélisation analytique des phénomènes transitoires dans les réseaux de files d'attente est très complexe et peu de résultats généraux existent dans ce domaine (cf. [ABA 87, KEL 85b, LEE 93, DSL 93, MUR 88, SAA 60, TAK 62, WAN 99]). Enfin, les modèles de simulation à événements discrets n'ont pas ces limitations, mais requièrent des temps de calcul prohibitifs pour des réseaux de taille réelle.

Pour dépasser ces limitations, l'approche présentée dans cette article consiste à construire un modèle fluide du réseau. Ce modèle est basé sur une approximation des équations différentielles exactes gouvernant le trafic moyen transitoire de chaque flot de communication dans le réseau. Cette approximation est obtenue en utilisant la notion de trafic fictif. Ce type de modélisation, qui a été introduit dans le logiciel commercial de planification de réseaux NetQUAD, a été beaucoup utilisé pour les réseaux à commutation de circuits (téléphonie) et a montré à la fois sa précision et sa rapidité.

Une caractéristique intéressante de cette modélisation différentielle est qu'elle offre un cadre théorique global permettant de combiner des modèles analytiques et des modèles de simulation à événements discrets. Ce nouveau concept, appelé simulation hybride, se révèle bien adapté à la modélisation des grands systèmes complexes de télécommunications et peut être efficacement parallélisé de manière à réduire considérablement les temps d'exécution. L'approche de simulation hybride a été développée dans le cadre du projet européen "$STAR_1$" qui avait pour objectif de porter la première partie du code de l'environnement de simulation de réseaux NetQUAD sur une plate-forme HPCN en utilisant le paradigme de l'échange de messages [STAR1].

Cet article est organisé de la façon suivante. Dans la partie 2, nous rappelons quelques résultats de la théorie différentielle du trafic qui constitue la base de la simulation hybride. La partie 3, est consacrée à la simulation hybride distribuée. Finalement, quelques résultats expérimentaux sont présentés dans la partie 4.

2. Théorie différentielle du trafic

La théorie différentielle du trafic a été développée au début des années 1980 par Garcia et Legall pour les réseaux à commutation de circuits [GAR 86, GAR 80]. Cette théorie a été récemment étendue aux réseaux à commutation de circuits multiclasses (ATM, STM) [BRU 00a] et aux réseaux à commutation de paquets [GAR 98, BRU 00a].

La théorie différentielle du trafic définie une méthodologie de modélisation analytique fluide qui permet l'étude du trafic sur les ressources d'un réseau aussi bien en régime stationnaire qu'en régime transitoire. Les modèles développés sont en général assez précis et d'une faible complexité calculatoire.

Nous décrivons tout d'abord au paragraphe 2.1 le principe général de la modélisation différentielle. Puis nous montrons au paragraphe 2.2 comment cette technique peut être appliquée pour obtenir les modèles différentiels de quelques systèmes élémentaires markoviens. Comme montré au paragraphe 2.3, cette technique n'est toutefois pas uniquement limitée à des systèmes markoviens. Finalement, nous montrons comment elle peut être étendue à des réseaux de files d'attente au paragraphe 2.4.

2.1. *Principe général de la théorie différentielle du trafic*

Considérons le système représenté sur la figure 1. Soit $x(t)$ la variable aléatoire associée au nombre de paquets dans ce système. Notons $IR(t)$ et $OR(t)$ respectivement les débits instantanés d'entrée et de sortie du système.

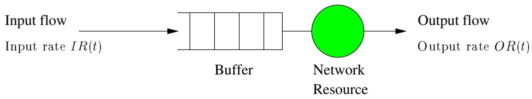


Figure 1. *Modèle de file d'attente d'une ressource réseau.*

L'idée fondamentale de la théorie différentielle du trafic est d'établir l'expression exacte de l'équation différentielle gouvernant le trafic moyen transitoire $X(t) = E[x(t)]$. Cette équation est obtenue par une analyse du processus markovien ou semi-markovien associé à $x(t)$. La forme générale de cette expression est la suivante (où $P[x(t)]$ est la probabilité de l'état $x(t)$):

$$\frac{dX(t)}{dt} = \sum_{x(t)} x(t) \frac{dP[x(t)]}{dt} = IR(t) - OR(t) \quad , \; X(t_0) \, \text{donné} \qquad [1]$$

Cette expression est très générale : elle exprime tout simplement que la variation du nombre moyen de paquets dans le système est donnée par la différence entre le débit instantané d'entrée $IR(t)$ et le débit instantané de sortie $OR(t)$.

Des expressions explicites de l'équation différentielle 1 ont été obtenues pour tout une batterie de modèles de files d'attente élémentaires (markoviens ou non). Ces équations différentielles font toujours intervenir des probabilités d'états transitoires dont l'expression analytique n'est en général pas connue. La théorie différentielle du trafic procède alors à une approximation de ces équations différentielle exactes en utilisant une relation implicite entre les probabilités d'états et le trafic moyen dans le système. On peut ainsi obtenir le comportement en régime dynamique et à l'équilibre du système en utilisant une méthode d'intégration numérique (méthode d'Euler ou de Runge-Kutta par exemple).

2.2. *Modèles dynamiques de systèmes markoviens élémentaires*

Dans ce paragraphe, nous considérons les files d'attente suivantes: $M/M/1/\infty$, $M/M/1/N$ et $M^K/M^K/1/\infty$.

2.2.1. *Modèle dynamique de la file $M/M/1/\infty$*

La file $M/M/1/\infty$ est un modèle très simple qui est souvent utilisé pour représenter un lien de transmission. Il s'agit d'un modèle à capacité infinie. Les clients arrivent suivant un processus de Poisson de paramètre λ. Ils sont servis suivant la discipline PAPS (Premier Arrivé Premier Servi) et la durée du service de chaque client est une variable aléatoire exponentiellement distribuée de moyenne $1/\mu$.

Si nous prenons pour variable d'état $x(t)$ le nombre de clients dans le système, alors la chaîne de Markov associée est un processus de naissance et de mort ergodique de paramètres λ et μ à condition que le taux d'utilisation $\rho = \lambda/\mu < 1$. Notons $P_i(t)$ la probabilité que $x(t) = i$. Il est bien connu qu'à l'équilibre, on a :

$$X(\infty) = \frac{\rho}{1-\rho} \quad \text{et} \quad P_i(\infty) = \rho^i(1-\rho) \quad i = 0 \ldots \infty \tag{2}$$

L'équation différentielle exacte du trafic moyen transitoire $X(t)$ de la file $M/M/1/\infty$ s'écrit:

$$\dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{\infty} i\,\dot{P}_i(t) \;=\; \lambda - \mu(1 - P_0(t)) \tag{3}$$

Malheureusement, cette équation fait intervenir la probabilité transitoire $P_0(t)$ qui a l'expression complexe suivante (où i représente le nombre initial de clients) [KLE 75]:

$$P_k(t) \;=\; e^{-(\lambda+\mu)t}\left[\rho^{\frac{k-i}{2}} I_{k-i}(at) + \rho^{\frac{k-i-1}{2}} I_{k+i+1}(at) + (1-\rho)\rho^k \sum_{j=k+i+2}^{\infty} \rho^{\frac{-j}{2}} I_j(at)\right]$$

$$\text{où} \qquad a = 2\mu\sqrt{\rho} \quad \text{et} \quad I_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{k+2m}}{(k+m)!m!} \quad k = -1 \ldots \infty$$

En pratique, cette expression analytique ne peut être utilisée pour calculer la valeur exacte de $P_0(t)$ car elle fait intervenir des sommes infinies. Une autre possibilité serait de calculer le vecteur de probabilités par intégration numérique de la chaîne de Markov. Mais là encore cette solution est limitée par la dimension infinie de l'espace d'états. Bien que dans les deux cas des approximations soient possibles en tronquant les calculs, les approximations résultantes ne sont pas très efficaces d'un point de vue numérique (ce qui est essentiel pour de grands réseaux).

La solution proposée dans le cadre de la théorie différentielle du trafic consiste à transformer l'équation différentielle associée à $X(t)$ en une équation différentielle autonome en utilisant une approximation basée sur une relation implicite entre le trafic moyen $X(t)$ et $P_0(t)$. Plus précisément, on observe qu'à l'équilibre la relation suivante est vérifiée :

$$\rho = 1 - P_0(\infty) = \frac{X(\infty)}{1 + X(\infty)} \tag{4}$$

L'idée est alors d'étendre la validité de cette relation au régime transitoire :

$$1 - P_0(t) = \frac{X(t)}{1 + X(t)} \tag{5}$$

On obtient ainsi l'approximation dynamique suivante pour la file $M/M/1/\infty$:

$$\dot{X}(t) \approx \lambda - \mu \frac{X(t)}{1+X(t)} \quad , X(t_0) \text{ donné} \qquad [6]$$

Il s'agit d'une équation différentielle autonome qui permet de calculer efficacement $X(t)$ par intégration numérique. Il est facile de montrer que cette approximation différentielle converge vers la valeur stationnaire exacte $X(\infty) = \rho/(1-\rho)$. Remarquons également que bien que l'équation 6 permette d'obtenir une expression explicite de $X(t)$, il est plus intéressant en pratique d'utiliser cette forme "entrée/sortie" (cf. paragraphe 2.4).

Le tableau 1 présente une comparaison des valeurs stationnaires de $X(t)$ obtenues en utilisant la formule exacte et en intégrant le modèle différentiel pour $\rho = 0.1$ et $\rho = 0.5$. On peut constater que le modèle différentiel converge bien vers les valeurs stationnaires exactes. Pour les mêmes valeurs de ρ, la figure 2 compare le comportement transitoire de $X(t)$ obtenu avec le modèle différentiel à celui obtenu avec 10000 simulations de Monte-Carlo. On peut voir que le modèle différentiel se révèle assez précis: pour $\rho = 0.1$, les erreur moyennes et maximales sur l'intervale $[0, 10]$ sont respectivement 3.3 % et 10 %, tandis que pour $\rho = 0.5$ ces erreurs sur l'intervalle $[0, 30]$ sont respectivement de 4.4 % et 8.1 %. Mais l'avantage principal du modèle différentiel est qu'il permet de déterminer la réponse dynamique du système à des variations de trafic, comme illustré sur la figure 3 (dans ce cas, l'erreur moyenne est de 4.4 % est l'erreur maximale de 13.4 %).

	Solution exacte	Modèle différentiel
$\rho = 0.1$	0.1111	0.1111
$\rho = 0.5$	1.0000	0.9999

Table 1. *Comparaison des valeurs de $X(\infty)$ obtenus avec la formule exacte et avec le modèle différentiel.*

On peut également comparer la précision de l'approximation 6 à celle d'une approximation par un processus de diffusion. Soit $z(t)$ le processus de diffusion approximant le nombre de clients dans une file d'attente ayant des durées inter-arrivées de moyenne μ_a et de coefficient de variation au carré c_a, et des durées de service de moyenne μ_s et de coefficient de variation au carré c_s. La densité de probabilité associée à $z(t)$ sachant que $z(0) = z_0$ est donnée par (cf. [KOB 74]) :

$$p(z,t;z_0,0) \quad = \quad (\partial/\partial x)\left\{\Phi\left(\frac{z-z_0-\beta t}{\sqrt{\alpha t}}\right) - \exp\left(\frac{2\beta z}{\alpha}\right)\Phi\left(-\frac{z+z_0+\beta t}{\sqrt{\alpha t}}\right)\right\}$$

où:

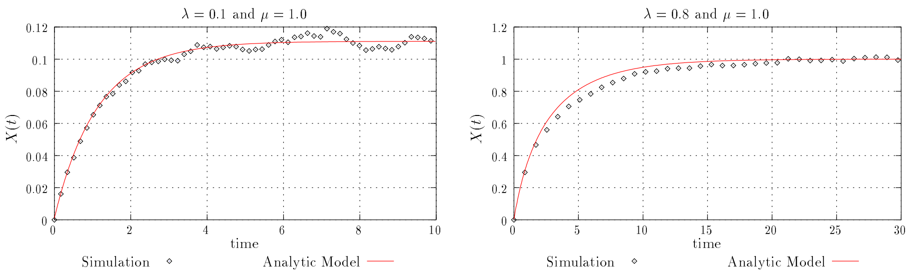


Figure 2. *$M/M/1/\infty$: comparaison entre le modèle analytique et des simulations.*

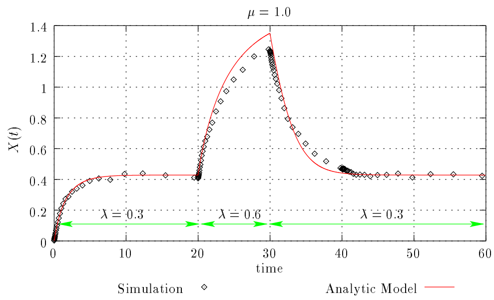


Figure 3. *$M/M/1/\infty$: comparaison entre le modèle analytique et des simulations dans le cas de variations de trafic.*

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}u^2)\, du \qquad \alpha = \frac{c_a}{\mu_a} + \frac{c_s}{\mu_s} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{\mu_a} - \frac{1}{\mu_s}$$

Des comparaisons des réponses transitoires obtenues avec le modèle différentiel 6, avec cette approximation diffusion et avec des simulations événementielles sont proposées sur la figure 4 dans le cas d'une file $M/M/1/\infty$ ayant pour état initial $x_0 = 0$. Pour $\rho = 0.8$, on peut observer que l'approximation diffusion est légèrement plus précise que l'approximation différentielle. Cependant, l'approximation diffusion est très grossière pour $\rho = 0.2$. Il s'agit là d'un défaut bien connu des approximations diffusion qui est dû à l'hypothèse sous-jacente d'indépendance des processus d'arrivées et de départs.

2.2.2. *Modèle dynamique de la file $M/M/1/N$*

Dans les réseaux à commutation de paquets, certaines ressources peuvent avoir des capacités finies conduisant à la perte de paquets. Le modèle $M/M/1/N$ permet

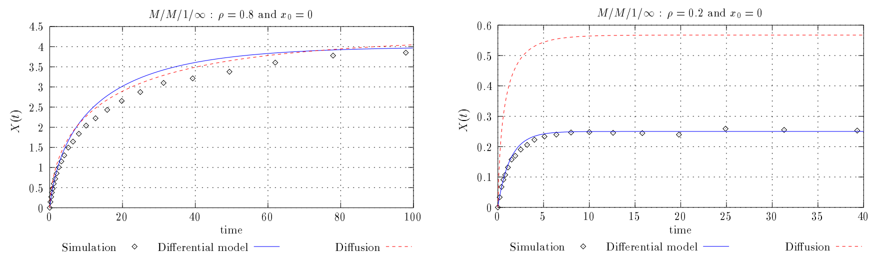


Figure 4. $M/M/1/\infty$*: réponses transitoires obtenues avec le modèle différentiel, l'approximation diffusion et avec des simulations événementielles quand* $x_0 = 0$.

d'étudier de tels systèmes.

La file $M/M/1/N$ est un système à capacité finie, avec $N-1$ positions d'attente. Les clients arrivent suivant un processus de Poisson de taux λ. Ils sont servis suivant la discipline PAPS et la durée du service est une variable aléatoire exponentiellement distribuée de moyenne $1/\mu$. Les clients qui à leur arrivée trouvent un système plein sont rejetés et n'ont plus aucune influence sur le système. Ainsi la capacité finie agit comme un régulateur sur le nombre de clients en attente et par conséquent aucune hypothèse sur le taux d'utilisation $\rho = \lambda/\mu$ n'est nécessaire.

La distribution de probabilités à l'équilibre est donnée par :

$$P_k(\infty) = \rho^k \, P_0(\infty) = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \, \rho^k & \text{si } \rho \neq 1 \\ \\ \dfrac{1}{N+1} & \text{si } \rho = 1 \end{cases} \qquad [7]$$

et le nombre moyen de clients dans le système à l'équilibre est,

$$X(\infty) = \sum_{k=1}^{N} k \, P_k(\infty) = \begin{cases} \dfrac{N\,\rho^{N+2} - (N+1)\,\rho^{N+1} + \rho}{1 - \rho - \rho^{N+1} + \rho^{N+2}} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \\ \dfrac{N}{2} & \text{si } \rho = 1 \end{cases} \qquad [8]$$

En appliquant la même technique que pour le modèle $M/M/1/\infty$, il est facile de prouver que l'équation différentielle exacte gouvernant le nombre moyen de clients en régime transitoire est:

$$\dot{X}(t) = \lambda \, [1 - P_N(t)] - \mu \, [1 - P_0(t)] \qquad [9]$$

Malheureusement, il n'existe pas d'expression simple de $P_0(\infty)$ et $P_N(\infty)$ en fonction de $X(\infty)$. Néanmoins, de façon à pouvoir appliquer le même principe que précédemment, on peut calculer numériquement $P_0(t)$ et $P_N(t)$ en fonction de $X(t)$. L'approximation différentielle est alors la suivante :

$$\dot{X}(t) \quad \approx \quad \lambda \left(\frac{1 - \rho^N(t)}{1 - \rho^{N+1}(t)} \right) \; - \; \mu \, \rho \left(\frac{1 - \rho^N(t)}{1 - \rho^{N+1}(t)} \right) \quad [10]$$

où $\rho(t)$ est solution de :

$$X(t) = f(\rho(t)) \quad = \quad \frac{N \, \rho^{N+2}(t) - (N+1)\, \rho^{N+1}(t) + \rho(t)}{1 - \rho(t) - \rho^{N+1}(t) + \rho^{N+2}(t)}$$

L'intégration numérique est effectuée en résolvant $\rho(t) = f^{-1}(X(t))$ à chaque pas d'intégration (en utilisant par exemple la méthode de Newton). Cette approche est très efficace numériquement et se révèle assez précise comme on le verra plus loin. Evidemment, une autre possibilité, exacte elle, serait d'intégrer numériquement les équations de Chapman-Kolmogorov. Cependant, compte tenu des tailles importantes des buffers dans les routeurs actuels, il est clair que cette approche est beaucoup trop coûteuse numériquement pour étudier des réseaux de taille réelle.

La figure 5 compare l'évolution transitoire de $X(t)$ obtenue avec le modèle analytique avec celle obtenue avec des simulations de Monte-Carlo (10000 réalisations). Là encore, on peut constater que l'approximation différentielle est relativement précise : pour ρ=0.2, 1.0 et 10.0, les erreurs moyennes sont respectivement de 2.2%, 1.5% et 0.1% tandis que les erreurs maximales sont de 8.1%, 6.3% et 2.0%.

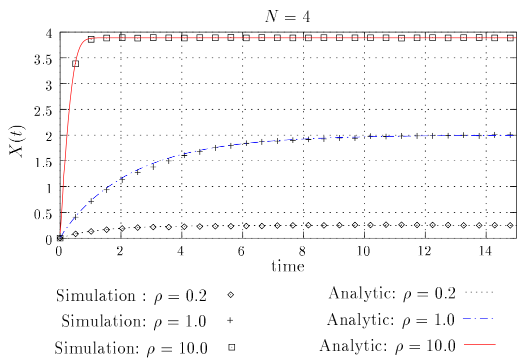


Figure 5. *$M/M/1/N$: comparaison entre le modèle analytique et des simulations.*

2.2.3. *Modèle dynamique de la file $M^K/M^K/1/\infty$*

Le trafic d'entrée dans un noeud du réseau est en général la superposition de différents flots de trafic. Chacun de ces flots a son propre taux d'arrivée de paquets et éventuellement son propre routage. De plus, il se peut que les besoins en ressource des différents flots soient très différents. Le modèle $M^K/M^K/1/\infty$ a été introduit pour représenter de telles situations.

Il s'agit d'un modèle avec un serveur et une file d'attente de capacité infinie. Le trafic d'entrée dans ce système est la superposition de K flots différents $k = 1 \ldots K$. Les clients du flot k arrivent suivant un processus de Poisson de taux λ_k. Ils sont servis avec ceux des autres flots suivant la discipline PAPS. La durée de service des clients du flot k est une variable aléatoire exponentiellement distribuée de moyenne $1/\mu_k$.

Soit $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$. Le taux d'utilisation global du serveur est $\rho = \sum_k \rho_k$. Si $\rho < 1$, il existe une distribution de probabilités stationnaire dont l'expression a été déterminée par Marie et Rubino [MAR 86]. En particulier, le nombre moyen de clients de la classe k présents dans le système à l'équilibre est donné par :

$$X_k(\infty) = \frac{\rho_k}{1-\rho} \left[1 + \sum_{i=1}^{K} (\frac{\mu_k}{\mu_i} - 1)\, \rho_i \right] \quad k = 1 \ldots K \qquad [11]$$

L'équation différentielle associée au trafic moyen $X_k(t)$ de la classe k est :

$$\dot{X}_k(t) = \lambda_k \; - \; \mu_k \, Q_k(t) \quad k = 1 \ldots K \qquad [12]$$

où $Q_k(t)$ est la probabilité qu'un client de classe k soit en service à l'instant t. A l'équilibre, cette probabilité est donnée par :

$$Q_k(\infty) = \rho_k = X_k(\infty) \;/\; \left[1 + \sum_{i=1}^{K} \frac{\mu_k}{\mu_i} X_i(\infty) \right] \quad k = 1 \ldots K \qquad [13]$$

En prolongeant la validité de cette dernière relation au régime transitoire on obtient l'approximation différentielle suivante de $X_k(t)$:

$$\dot{X}_k(t) \approx \lambda_k \; - \; \mu_k \, \frac{X_k(t)}{1 + \sum_{i=1}^{K} \frac{\mu_k}{\mu_i} X_i(t)} \quad k = 1 \ldots K \qquad [14]$$

La figure 6 présente une comparaison entre cette approximation différentielle et 10000 simulations de Monte-Carlo. Dans cet exemple, il y a $K = 2$ classes de clients avec les caractéristiques suivantes : $\mu_1 = 4$, $\lambda_1 = 2$, $\mu_2 = 16$ and $\lambda_2 = 4$. On peut vérifier que le modèle différentiel fournit une assez bonne approximation de la réponse transitoire du système (pour la classe 2, l'erreur moyenne est de 7% alors que l'erreur maximale est de 24.3%). Là encore, il est important de noter que cette approximation est très peu coûteuse en temps calcul.

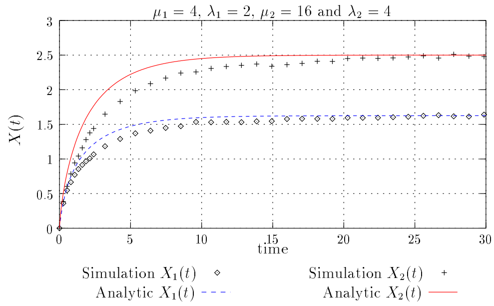


Figure 6. $M^K/M^K/1/\infty$*: comparaison entre le modèle analytique et des simulations.*

2.3. *Modèles dynamiques de systèmes élementaires non-markoviens*

Dans cette partie, nous montrons que la théorie différentielle du trafic s'applique également à des systèmes n'ayant pas la propriété markovienne. On étudie en particulier les files d'attente $M/D/1/N$ et $M/G/1/\infty$.

2.3.1. *Modèle dynamique de la file* $M/D/1/N$

Pour l'évaluation des performances des architectures de télécommunications modernes, on utilise souvent des modèles de files d'attente à durée de service déterministe et à capacité finie. Ainsi, par exemple, de tels modèles sont utilisés dans l'étude des multiplexeurs ATM. En fonction du problème étudié, différents modèles ont été considérés (cf. [ROB 96, VIC 96, GRA 90]) : $M/D/1/N$, $Geo^K/D/1/N$, $K * D/D/1/N$ et $\sum D_i/D/1/N$. La file d'attente $M/D/1/N$ représente de loin le plus simple et le plus général de ces modèles [KLE 75].

La file d'attente $M/D/1/N$ est un modèle à capacité finie, avec $N-1$ positions d'attente. Les clients arrivent suivant un processus de Poisson de taux λ. Ils sont servis suivant la discipline PAPS et la durée de service est une constante T. Comme pour le modèle $M/M/1/N$, aucune hypothèse sur le taux d'utilisation $\rho = \lambda T$ n'est nécessaire.

Bien que ce modèle soit étudié depuis très longtemps et qu'il soit bien résolu d'un point de vue algorithmique, il n'existait pas jusqu'à récemment de résultats analytiques pour cette file d'attente (en dehors du cas particulier $N = 1$, connu sous le nom de modèle d'Erlang B). Dans [BRU 00b], nous déterminons la solution analytique du modèle $M/D/1/N$. En particulier, on prouve le résultat suivant :

$$P_0 = \frac{1}{1+\rho b_{N-1}} \quad [15]$$

$$P_j = \frac{b_j - b_{j-1}}{1+\rho b_{N-1}} \quad , \; j = 1 \ldots N-1 \quad [16]$$

$$P_N = 1 - \frac{b_{N-1}}{1+\rho b_{N-1}} \quad [17]$$

où les coefficients b_n sont donnés par $b_0 = 1$ et,

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}(n-k)^k e^{(n-k)\rho} \rho^k \; , \forall n \geq 1 \quad [18]$$

Dans [BRU 00b] est également proposé un algorithme efficace pour le calcul des coefficients b_n. En utilisant cette expression des probabilités stationnaires, on détermine aisément $\overline{X}$, le nombre moyen de clients dans le système à l'équilibre :

$$\overline{X} = N - \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k}{1+\rho b_{N-1}} \quad [19]$$

Les résultats précédants donnent la solution de la file $M/D/1/N$ en régime stationnaire. Dans [GAR 00], nous développons une procédure numérique simple pour le calcul exact de la distribution de probabilités transitoire d'une file $M/D/1/N$. On montre que l'équation différentielle du trafic moyen transitoire $X(t)$ est :

$$\dot{X}(t) = \lambda \left[1 - P_N(t)\right] - d(t) \quad [20]$$

Là encore, cette dernière équation exprime que la variation du nombre moyen de clients durant un petit intervalle de temps Δt est donnée par la différence entre le nombre de clients qui entrent effectivement dans le système $\lambda \left[1 - P_N(t)\right] \Delta t$ et le nombre de clients qui en sortent $d(t)\,\Delta t$. Ainsi $d(t)$ est le taux instantané de départ à l'instant t et son expression est donnée par l'équation suivante :

$$\forall r \geq 1 \, , \forall \tau < T \, , \quad d(rT+\tau) = \lambda \, P_0(\tau) \; - \sum_{n=1}^{r-1} \frac{dP_0(nT+\tau)}{d\tau} \quad [21]$$

Dans [GAR 00], une approche numérique permettant le calcul récursif de $d(t)$ est proposée. Les résultats analytiques et les algorithmes proposés dans cet article fournissent la solution transitoire exacte de la file $M/D/1/N$. Cependant, en pratique, l'approximation différentielle suivante s'avère suffisante (et nettement moins coûteuse en temps calcul) :

$$\dot{X}(t) \approx \lambda\,[1 - P_N(t)] - \frac{1}{T}\,[1 - P_0(t)] \qquad [22]$$

$$\approx \frac{b_{N-1}(\rho(t))}{1+\rho(t)\,b_{N-1}(\rho(t))}\left[\lambda - \frac{\rho(t)}{T}\right] \qquad [23]$$

où $\rho(t)$ est solution de

$$X(t) = f(\rho(t)) = N - \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k(\rho(t))}{1+\rho(t)\,b_{N-1}(\rho(t))}$$

Comme pour la file $M/M/1/N$, l'intégration numérique s'effectue en résolvant à chaque pas de temps $\rho(t) = f^{-1}(X(t))$.

La figure 7 présente les résultats obtenus avec le modèle analytique exact, avec l'approximation différentielle et avec 10000 simulations de Monte-Carlo. On y a tracé les courbes obtenues pour $X(t)$ pour différentes valeurs de λ. Dans cet exemple, on a $N = 2$ et $T = 1.0$. On peut noter que, pour les grandes valeurs de ρ, le trafic moyen est sujet à des oscillations (cf. [GAR 00]), qui ne sont pas obtenues avec le modèle différentiel. Néanmoins, il est possible de vérifier que l'approximation différentielle donne bien l'évolution de la moyenne temporelle du nombre de clients.

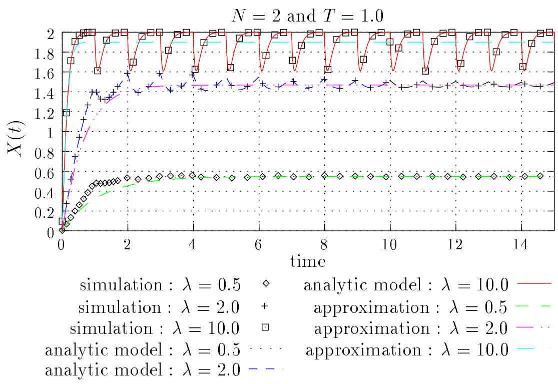


Figure 7. *$M/D/1/N$: comparaison du modèle différentiel avec le modèle analytique exact et des simulations.*

2.3.2. *Modèle dynamique de la file $M/G/1/\infty$*

Nous nous intéressons maintenant à la file de capacité infinie $M/G/1/\infty$ [COH 69]. Soit $B(x)$ la distribution (arbitraire) du temps de service. Notons $\overline{x^k}$ le $k^{\text{ème}}$ moment de cette distribution. En particulier, on notera $T = \overline{x}$ la moyenne de la durée de service. Dans la suite, on supposera que le taux d'utilisation du serveur $\rho = \lambda T < 1$. Enfin, on notera $C_b^2 = (\overline{X^2} - T^2)/T^2$ le carré du coefficient de variation de la durée du service.

On peut proposer l'approximation suivante pour l'équation différentielle régissant le trafic moyen transitoire $X(t)$:

$$\dot{X}(t) = \lambda - \frac{1}{T}\,[1 - P_0(t)] \qquad [24]$$

Comme d'habitude, cette équation fait intervenir la probabilité transitoire $P_0(t)$ qui n'a pas d'expression analytique connue. Cependant, on peut observer qu'à l'équilibre on a :

$$P_0(\infty) = 1 - \rho \quad \text{et} \quad X(\infty) = \rho + \frac{\lambda^2\,\overline{x^2}}{2\,(1-\rho)} \qquad [25]$$

Ainsi on obtient,

$$(C_b^2 - 1)\,\rho^2 \;+\; 2\,[1 + X(\infty)]\,\rho \;-\; 2\,X(\infty) \;=\; 0 \qquad [26]$$

L'approximation proposée pour $P_0(t)$ est alors (en supposant que $C_b^2 \neq 1$) :

$$P_0(t) \approx 1 - \rho(t) = 1 - \frac{-2(1 + X(t)) \;+\; \sqrt{4(1 + X(t))^2 \;+\; 8X(t)(C_b^2 - 1)}}{2(C_b^2 - 1)} \qquad [27]$$

On obtient ainsi l'approximation différentielle suivante du trafic moyen $X(t)$:

$$\dot{X}(t) \approx \lambda \;-\; \frac{1}{T}\,\rho(t) \qquad [28]$$

où,

$$\rho(t) = \frac{-2(1 + X(t)) \;+\; \sqrt{4(1 + X(t))^2 \;+\; 8X(t)(C_b^2 - 1)}}{2(C_b^2 - 1)} \qquad [29]$$

Prenons comme premier exemple celui d'une file $M/M/1/\infty$. On sait que le coefficient de variation de la distribution exponentielle est 1. Par conséquent, l'équation 26 donne :

$$\rho(t) = \frac{X(t)}{1+X(t)} \Rightarrow \dot{X}(t) \approx \lambda - \frac{1}{T}\frac{X(t)}{1+X(t)} \qquad [30]$$

qui est identique à l'équation 6 et justifie, dans ce cas, les approximations précédentes. Dans la suite, nous proposons différentes comparaisons entre le modèle différentiel et des simulations de Monte-Carlo (10000 trajectoires) pour des distributions de service déterministe et Gamma.

1. **Distribution déterministe.** On considère ici une file $M/D/1/\infty$. Dans ce cas, on a clairement $C_b^2 = 0$ et donc (avec l'équation 29)

$$\rho(t) = 1+X(t)-\sqrt{1+X(t)^2} \Rightarrow \dot{X}(t) \approx \lambda - \frac{1}{T}\left[1+X(t)-\sqrt{1+X(t)^2}\right] \qquad [31]$$

On a comparé cette approximation différentielle avec 10000 simulations de Monte-Carlo. Les résultats sont représentés sur la figure 8.

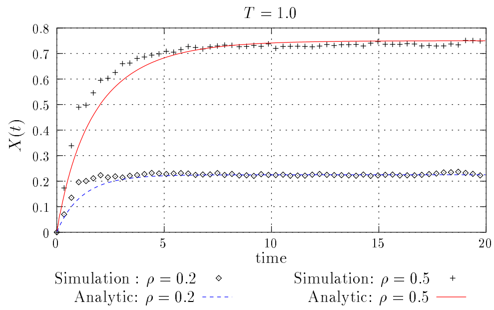


Figure 8. *$M/D/1/\infty$: comparaison entre le modèle différentiel et des simulations.*

2. **Distribution Gamma.** Prenons pour second exemple celui de distributions de service Gamma. Rappelons que la distribution Gamma a une densité de probabilité $f_{\alpha,\beta}(x)$ donnée par :

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta^{\alpha}\, x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, exp(-\beta\, x) \quad x \geq 0 \qquad [32]$$

La moyenne T et la variance v de cette distribution sont données par $T = \alpha/\beta$ et $v = 1/\beta$. Les valeurs utilisées pour les paramètres α et β ainsi que les courbes correspondantes pour la densité $f_{\alpha,\beta}(x)$ sont précisées dans la figure 9. On peut noter que la dernière distribution est sur-variante ($C_b > 1$).

La figure 10 compare les réponses transitoires obtenues avec le modèle différentiel et avec des simulations événementielles.

T	v	C_b	α	β
5.0	0.5	0.14	50.0	10.0
5.0	1.0	0.20	25.0	5.0
5.0	10.0	0.63	2.5	0.5
5.0	100.0	2.00	0.25	0.05

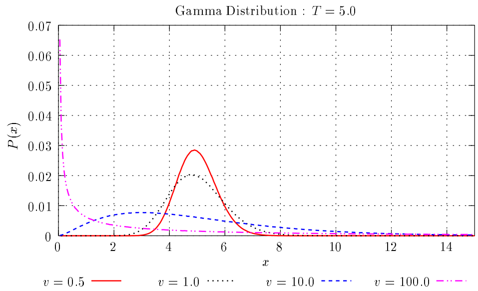


Figure 9. *Paramètres des distributions Gamma.*

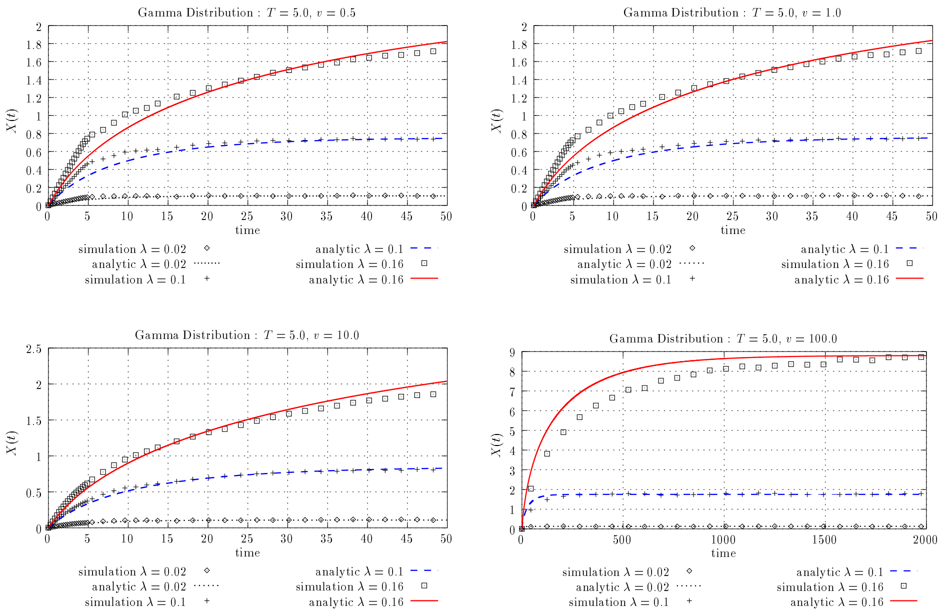


Figure 10. $M/G/1/\infty$: *réponses transitoires pour des distributions de service Gamma de moyenne* $T = 5.0$ *et de variance* $v = 0.5$, 1.0, 10.0 *et* 100.0.

On peut remarquer que l'approximation différentielle est assez grossière quand $C_b > 1$. Dans ce cas, la convergence vers l'état stationnaire est beaucoup plus lente.

2.4. *Modèles dynamiques de réseaux de files d'attente*

Une hypothèse classique pour de grands réseaux et de supposer des arrivées suivant le processus de Poisson et des durées de service exponentiellement distribuées en chaque noeud. Les files d'attente peuvent être à capacités finies ou infinies.

Sous ces hypothèses considérons un réseau de n noeuds. Chaque noeud reçoit du trafic direct (éxogène) et du trafic sortant des autres noeuds. Notons :

– λ_i le taux d'arrivée du trafic direct au noeud i. On suppose que les paquets arrivent suivant un processus de Poisson.

– μ_i le taux de service au noeud i. On suppose que les durées de service sont des variables aléatoires exponentiellement distribuées.

– $r_{i,j}$ le paramètre de routage donnant la proportion de trafic sortant du noeud i qui est envoyée vers le noeud j.

2.5. *La forme produit*

Soit a_j le taux d'arrivées au noeud j (trafic direct et trafic provenant des autres noeuds) :

$$a_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{n} a_i \, r_{i,j} \tag{33}$$

L'état du système est décrit par le nombre k_i de clients au noeud i. La distribution stationnaire Π associée à cet espace d'état est une distribution du type "forme produit" [KLE 75]. En d'autres termes, la probabilité d'un état global du réseau est le produit des probabilités des états des différents noeuds pris isolément :

$$\Pi(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \rho_i) \, {\rho_i}^{k} \quad \text{où} \quad \rho_i = \frac{a_i}{\mu_i} \tag{34}$$

Ce résultat est très intéressant dans la mesure où il fournit une expression analytique de la distribution à l'équilibre de l'état global du réseau. Une conséquence importante de la forme produit est que le comportement de chaque noeud du réseau est similaire à celui d'une file $M/M/1$. En effet, même si le trafic sortant en chaque noeud ne suit plus la loi de Poisson, la forme produit de la solution reste valide. Par conséquent, le trafic moyen stationnaire $X_i(\infty)$ au noeud i a l'expression suivante :

$$X_i(\infty) = \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} \quad i = 1 \ldots n \tag{35}$$

2.6. *Modèle différentiel d'un réseau*

Soit $X_i(t)$ le nombre moyen de paquets au noeud i à l'instant t et $\dot{X}_i(t)$ sa dérivée. Puisque chaque noeud se comporte comme une file $M/M/1/\infty$ isolée, le modèle différentiel développé au paragraphe 2.2.1 peut être appliqué. Evidemment, il est nécessaire d'introduire le couplage entre les différents noeuds.

$$\dot{X}_i(t) = \lambda_i + \sum_{j=1}^{n} r_{j,i}\,\mu_j\,\left[1 - P_j^0(t)\right] \;-\; \mu_i\,(1 - r_{i,i})\,\left[1 - P_i^0(t)\right] \qquad [36]$$

où $P_i^0(t)$ est la probabilité que le noeud i soit vide à l'instant t. Ces probabilités peuvent être approximées de la même façon qu'au paragraphe 2.2.1. On obtient alors l'approximation différentielle du trafic transitoire $X_i(t)$ au noeud i :

$$\dot{X}_i(t) \approx \lambda_i + \sum_{j=1}^{n} r_{j,i}\,\mu_j\,\left(\frac{X_j(t)}{1 + X_j(t)}\right) \;-\; \mu_i\,(1 - r_{i,i})\,\left(\frac{X_i(t)}{1 + X_i(t)}\right) \qquad [37]$$

Ce modèle différentiel est un modèle dynamique : à chaque instant t on obtient l'évolution de l'espérance $X_i(t)$ du nombre de clients en chaque noeud. Si les taux d'arrivées et les paramètres de routage sont stationnaires, alors le système d'équations différentielles couplées converge vers l'état moyen du système à l'équilibre.

Deux approches sont possibles pour résoudre ce système d'équations différentielles du premier ordre :

– via des techniques classiques d'intégration numérique si l'on s'intéresse à la solution transitoire. En général, la méthode d'Euler est suffisamment précise.

– via un algorithme d'approximation successive si l'on s'intéresse uniquement à la solution stationnaire.

Cette modélisation dynamique du réseau peut être étendue à des réseaux dont le routage dépend des flots en utilisant des files $M^K/M/1$ et à des réseaux multiclasses en utilisant des files $M^K/M^K/1$ [BRU 00a].

2.7. *Réseau test (réseau double X)*

Considérons le réseau décrit sur la figure 11. Ce réseau a 6 noeuds $M/M/1/\infty$ et 8 flots. Les trafics directs entrant aux noeuds 2 et 3 et destinés aux noeuds 4 et 5 n'ont qu'une seule route : le lien direct. Mais les trafics entrant aux noeuds 0 et 1 et destinés aux noeuds 4 et 5 peuvent être routés suivant deux chemins différents : 50 % du trafic est envoyé sur chacun de ces chemins (routage par partage de charge).

Les valeurs des paramètres λ_{ij} et μ_i sont précisées dans les tableaux 2 et 3.

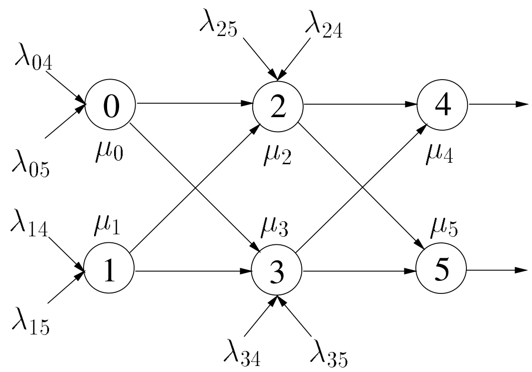


Figure 11. *Le réseau double X.*

λ_{04}	λ_{05}	λ_{14}	λ_{15}	λ_{24}	λ_{25}	λ_{34}	λ_{35}
2	3	3	2	2	1	1	2

Table 2. *Valeurs des taux d'arrivées* λ_{ij}

Dans le tableau 4, on compare les valeurs exactes des nombres moyens de clients avec celles obtenues par intégration du modèle différentiel et avec celles obtenues par des simulations de Monte-Carlo. Les résultats montrent la très bonne estimation obtenue avec le modèle différentiel. Les simulations événementielles prennent bien sûr un temps de calcul considérable et sont assez peu précises. De plus, comme on peut le remarquer sur la figure 12, la réponse transitoire du modèle différentiel fournit une assez bonne approximation de la dynamique du système.

3. Simulation hybride distribuée

3.1. *Pourquoi la simulation hybride ?*

Une modélisation de bout-en-bout complète d'un réseau de télécommunications, incluant toute la chaîne des traitements effectués (commutation, transmission, propa-

μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
10	10	15	15	10	10

Table 3. *Valeurs des taux de service* μ_i

	Exact	Differential Model	Simulations
$X_0(\infty)$	1.000	1.000	0.999
$X_1(\infty)$	1.000	1.000	1.014
$X_2(\infty)$	1.142	1.142	1.168
$X_3(\infty)$	1.142	1.142	1.193
$X_4(\infty)$	4.000	4.000	4.038
$X_5(\infty)$	4.000	3.999	4.104

Table 4. *Nombres moyens de clients à l'équilibre dans chaque noeud.*

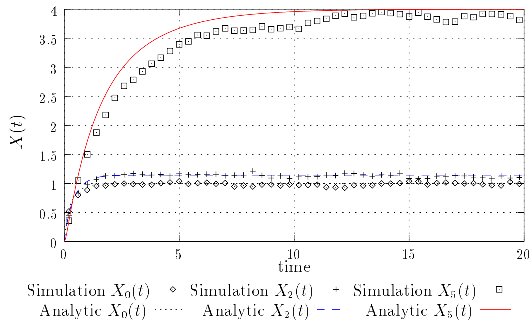


Figure 12. *Trafics moyens transitoires des noeuds 0, 2 et 5.*

gation) ainsi que les différents protocoles utilisés, est une tâche très complexe qui ne peut être accomplie qu'en utilisant un environnement de simulation puissant. Cependant, pour des réseaux réels, les temps de calcul de ces simulation deviennent extrêmement importants. En général, cette complexité calculatoire provient de la taille des réseaux, des matrices de trafic, de la complexité des traitements réalisés dans le réseau ou encore des intervalles de confiance nécessaires pour une estimation correcte.

Au niveau de l'ingénierie du réseau, que ce soit dans le cadre de la conception d'un nouveau réseau ou pour une tâche de planification périodique (pour adapter le réseau à une modification de la demande, introduire une nouvelle technologie, etc.), un algorithme d'optimisation va être utilisé pour optimiser itérativement certains paramètres tels que le routage des flux ou le dimensionnement des équipements. Cette procédure itérative va nécessiter un nombre important d'exécutions du modèle de simulation. Evidemment, une telle utilisation d'un modèle de simulation va engendrer des temps de calcul énormes. Pour réduire ces temps, différentes techniques, comme par exemple les techniques de réduction de variance, peuvent être employées. En particulier, l'utilisation de machines parallèles est un moyen très intéressant pour accélérer les simulations. La difficulté est alors de concevoir des algorithmes parallèles permettant de résoudre efficacement le problème sur une machine parallèle cible. Dans certains cas particuliers, la parallélisation est triviale : le modèle est constitué de composants opérant en parallèle, ou bien on doit en exécuter plusieurs instances indépendantes, une pour chaque valeur des paramètres. Néanmoins, en général la parallélisation des simulations événementielles ne permet pas des gains de temps importants [MIS 86].

Une voie prometteuse pour réduire significativement les temps de calcul est de concevoir des modèles de simulation hybride combinant des modèles de simulation à événements discrets et des modèles de simulation continus.

L'objectif du projet ESPRIT $STAR_1$ était d'utiliser des technologies de calcul haute performance (HPCN : High Performance and Computing Network) pour réduire le temps de calcul nécessaire à la simulation de grands réseaux de télécommunications. Une approche spécifique de "Simulation Hybride" (analytique et stochastique) a été conçue et validée pour obtenir un gain de temps supplémentaire. Les méthodes analytiques (équations différentielles) sont numériquement très efficaces mais ne peuvent modéliser avec précision que quelques types très simples de réseaux. Les méthodes de simulation à événements discrets sont nécessaires pour analyser les éléments complexes d'un réseau mais sont beaucoup trop lentes pour de grands réseaux. Le framework global défini par la simulation hybride consiste à modéliser complètement le réseau par les équations différentielles associées à chaque flot de trafic. Les paramètres de ces équations différentielles sont soit obtenus via des relations analytiques non-linéaires (dont quelques unes ont été présentées précédemment) soit via des statistiques sur des simulations à événements discrets. Dans le prototype de simulateur hybride $STAR_1$, les noeuds du réseau sont simulés analytiquement lorsque c'est possible tandis que des noeuds plus complexes sont simulés par des méthodes à événements discrets. Ces simulations sont de plus aisément parallélisables. Ainsi, les temps de simulation sont réduits à la fois par l'utilisation de modèles analytiques et par la possibilité de paralléliser certains calculs.

3.2. *Le concept de simulation hybride*

Dans le modèle de simulation hybride, certains noeuds sont simulés avec des équations différentielles analytiques (noeuds analytiques) tandis que les autres noeuds, les noeuds complexes, sont simulés à l'aide d'une modélisation stochastique à événements discrets (noeuds simulés). Par exemple, la figure 13 représente un petit réseau constitué de quatre files d'attente dans lequel les noeuds 1, 3 et 4 sont des noeuds analytiques tandis que le noeud 2 est simulé. L'idée fondamentale est qu'un noeud complexe va évaluer à l'aide d'une simulation stochastique le comportement de sa propre équation différentielle.

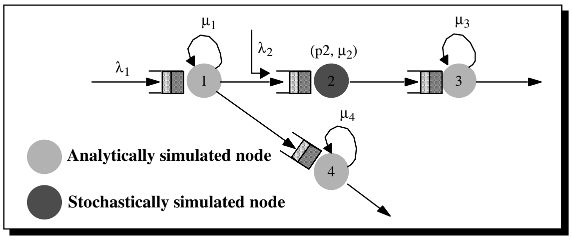


Figure 13. *Hybrid Simulation Concept.*

Le modèle global est résolu par intégration numérique d'un système d'équations différentielles couplées. Au cours d'un pas d'intégration, les calculs suivants sont réalisés :

– les équations différentielles des noeuds analytiques sont intégrées,

– des simulations stochastiques des noeuds complexes sont réalisées pendant l'intervalle de temps correspondant,

– l'échange entre les noeuds (ou ensemble de noeuds) des débits instantanés et des variances des flots est réalisé.

De cette façon, la décomposition du réseau en noeuds analytiques et en noeuds simulés permet de réduire les temps de calcul tout en préservant le caractère général de l'approche de simulation.

Décrivons maintenant la façon dont la simulation d'un noeud complexe est réalisée sur un intervalle de temps Δt. Pour cela, notons :

– S l'ensemble des trajectoires aléatoires (réalisations indépendantes) générées pour ce noeud complexe. Il convient de noter que ces trajectoires ne sont pas réinitialisées au début de chaque pas de temps Δt (i.e. à chaque itération).

– K l'ensemble des noeuds constituant le noeud complexe. En effet un noeud simulé peut en fait être un sous-réseau regroupant plusieurs noeuds et plusieurs liens et à l'intérieur duquel les paquets sont traités et routés en fonction de politiques données.

– I l'ensemble des liens d'entrée du noeud complexe. Ces liens d'entrée sont soit des liens venant d'autres noeuds soit des liens rattachés à des sources de trafic.

– O l'ensemble des liens de sortie du noeud complexe. Ces liens de sortie transporte tous les flots traités à l'intérieur du noeud complexe.

– F l'ensemble des flots de trafic entrant du noeud complexe.

A l'itération t, l'objectif est d'estimer les quantités suivantes :

– $d_o^f(t + \Delta t)$: débit du trafic du flot $f \in F$ sur le lien de sortie $o \in O$ à l'instant $t + \Delta t$.

– $v_o^f(t + \Delta t)$: variance du processus de départ du flot $f \in F$ sur le lien $o \in O$ à l'instant $t + \Delta t$.

– $X_k^f(t+\Delta t)$: nombre de paquets du flot f dans le noeud $k \in K$ à l'instant $t+\Delta t$.

Pour cela, la simulation évalue pour chaque trajectoire aléatoire $s \in S$:

– $D_{o,s}^f(t, t + \Delta t)$: nombre de paquets du flot $f \in F$ transmis sur le lien de sortie $o \in O$ entre t et $t + \Delta t$ pour la trajectoire s.

– $X_{k,s}^f(t + \Delta t)$: nombre de paquets du flot $f \in F$ au noeud $k \in K$ à l'instant $t + \Delta t$ pour la trajectoire s.

L'itération t consiste alors à réaliser les étapes suivantes :

Etape 1. Réception des paramètres de trafic (taux et variance des arrivées) de tous les noeuds voisins connectés au noeud complexe par un lien d'entrée.

Etape 2. Pour chaque trajectoire aléatoire s :

> **Etape 2.a** Générer des nouveaux événements d'arrivée de paquets durant Δt pour chaque flot f en fonction de la distribution des inter-arrivées de ce flot. Si cette distribution n'est pas la loi de Poisson, on réalise une approximation à deux moments avec une distribution Gamma.
>
> **Etape 2.b** Traiter tous les événements du noeud complexe en partant de l'état $X_{k,s}^f(t)$ jusqu'à l'instant $t + \Delta t$. Evidemment, l'état $X_{k,s}^f(t)$ est donné par l'itération précédente au temps $t - \Delta t$. Pendant l'intervalle de temps $(t, t + \Delta t)$, on compte les paquets sur les liens sortants pour évaluer les quantités $D_{o,s}^f(t, t + \Delta t)$.
>
> **Etape 2.c** Mémoriser $X_{k,s}^f(t + \Delta t)$.

Etape 3. Estimer les deux premiers moments $d_o^f(t + \Delta t)$ et $v_o^f(t + \Delta t)$ pour chaque lien de sortie $o \in O$ du noeud complexe ainsi que l'état moyen $X_k^f(t + \Delta t)$ de chaque élément $k \in K$ à l'intérieur du noeud complexe.

Etape 4. Envoyer les valeurs estimées de $d_o^f(t + \Delta t)$ et $v_o^f(t + \Delta t)$ aux noeuds voisins connectés au noeud complexe par un lien de sortie.

L'intervalle de temps Δt dépend fortement du plus petit temps de traitement dans le réseau. En même temps, Δt doit être suffisamment petit pour pouvoir correctement capturer le comportement transitoire. Une analyse hors-ligne des composants du réseau et des intensités des trafics des flots permet de choisir une valeur appropriée. En général, les équations différentielles ne sont pas très sensibles à ce paramètre et la principale difficulté provient des noeuds complexes simulés.

De la même façon, le nombre de trajectoires aléatoires dépend des intensités et des variances des trafics d'entrée. Nous travaillons actuellement sur de nouvelles techniques d'estimation permettant de réduire ce nombre de trajectoires.

3.3. *Régimes transitoire et stationnaire*

La simulation hybride peut être employée aussi bien pour étudier la solution stationnaire (à l'équilibre) avec des flots constants que la réponse transitoire (dynamique) du réseau à des flots variant dans le temps ou à des variations de paramètres.

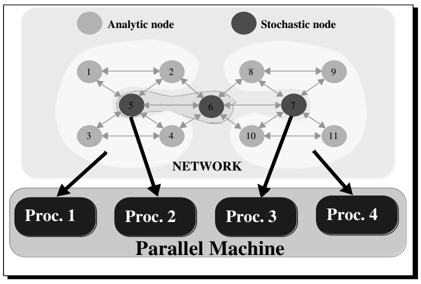
L'algorithme permettant le calcul de la réponse transitoire a été décrit plus haut. Pour le calcul de la solution stationnaire, l'algorithme opère comme un algorithme de point fixe. Chaque sous-système (groupe de noeuds) résout sa propre solution stationnaire, à l'aide d'une simulation de type long-run (avec une seule trajectoire) pour les noeuds simulés et par résolution analytique pour les noeuds analytiques. Les sous-systèmes échangent leurs solutions jusqu'à convergence globale. Des schémas relaxés basés sur un échange des solutions avant la convergence de la simulation ont été testés et permettent une réduction significative du temps de simulation.

3.4. *Concepts de parallélisation*

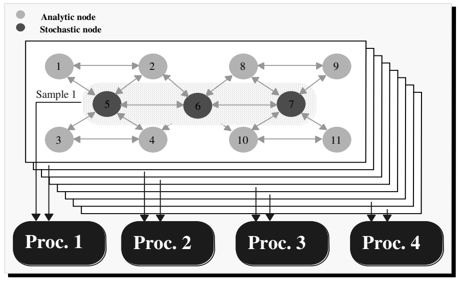
Même l'approche hybride n'est pas toujours suffisamment rapide pour des réseaux de grande taille. Nous avons également parallélisé le noyau de simulation de manière à répartir la charge de calcul entre plusieurs processeurs avec des échanges d'informations statistiques entre les processeurs. Deux stratégies de parallélisation peuvent être utilisées simultanément (cf. figure 14) :

– décomposition du réseau en sous-domaines,
– décomposition de l'ensemble des trajectoires aléatoires en sous-ensembles.

La décomposition en sous-domaine est une approche de parallélisation gros grain. Elle peut être employée pour obtenir les solutions en régimes transitoires et station-



(a)



(b)

Figure 14. *(a) décomposition en sous-domaines et (b) décomposition des trajectoires.*

naires :

– Le réseau est décomposé en sous-domaines.

– Chaque sous-domaine est simulé séparément.

– Les sous-domaines interagissent en échangeant les débits moyens et les variances sur les liens les interconnectant.

– A l'intérieur d'un domaine, la simulation analytique est utilisée lorsque c'est possible.

– La simulation stochastique est utilisée pour les noeuds complexes n'ayant pas de modèle analytique.

La décomposition de l'ensemble des trajectoires est une approche de parallélisation grain fin. Elle est utilisée pour obtenir la solution transitoire :

– Plusieurs simulations stochastiques indépendantes (réalisations indépendantes) sont exécutées pour générer une bonne estimation du comportement transitoire moyen.

– Ces simulations peuvent être exécutées en parallèle sur plusieurs processeurs.

La parallélisation peut être effectuée sur n'importe quel type de machine parallèle (à mémoire partagée ou à mémoire distribuée) ou sur une grappe de stations de travail. La méthode hybride n'est pas limitée par le débit de communication (ou l'horloge globale) comme les simulations à événements discrets distribuées en raison du grain adaptable des différentes tâches. Evidemment, il est nécessaire d'avoir un modèle de réseau suffisamment complexe (nombre de noeuds, nombre d'équations, nombre de noeuds complexes) de façon à obtenir un programme parallèle efficace. Le noyau de simulation parallèle développé dans le cadre du projet $STAR_1$ utilise la bibliothèque de communication MPI.

L'équilibrage de charge des processeurs parallèles est très important pour obtenir une bonne accélération. Dans l'approche par décomposition en sous-domaines, chaque processeur calcule indépendamment sa dérivée et le nouvel état à l'instant $t + \Delta t$. A chaque pas de temps, les débits de sortie sont échangés entre les processeurs. Bien sûr un processeur peut résoudre simultanément plusieurs équations différentielles ou simuler plusieurs noeuds complexes ou même combiner les deux modèles. Le nombre d'opérations réalisées durant un pas d'intégration d'une équation analytique peut être calculé exactement. Pour les sous-systèmes simulés (ensemble de noeuds complexes interconnectés), le nombre d'événements générés au cours d'un pas de simulation d'une trajectoire peut être évalué approximativement. Ces données sont essentielles pour obtenir une charge de calcul à peu près équilibrée avec un bon placement des tâches. De plus, l'équilibrage des charges peut être ajusté durant l'exécution en modifiant le partitionnement de l'ensemble des trajectoires. Par exemple, le calcul des trajectoires peut être effectués par des threads répartis sur les processeurs d'une machine SMP (la machine IBM SP ou une grappe de noeuds multiprocesseurs).

4. Résultats expérimentaux

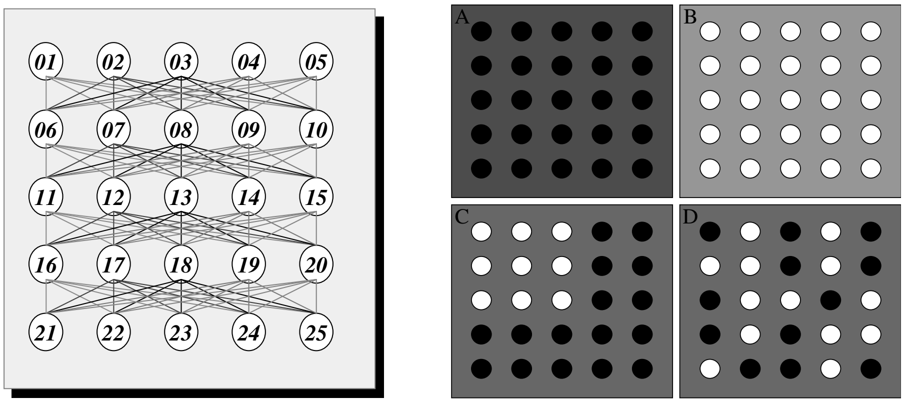
4.1. *Un exemple test*

La figure 15.(a) présente un réseau de 25 noeuds arrangés suivant une grille 5x5. Chaque noeud dans une ligne est connecté à tous les noeuds dans la ligne du dessous. En chaque noeud des quatre premières lignes, du trafic destiné à chacun des noeuds dans la ligne du bas est généré. Ce trafic est routé équitablement sur tous les chemins joignant la source à la destination. Il y a en tout 100 flots différents. Les flots suivent la loi de Poisson et les noeuds sont $M/M/1/\infty$.

Quatre décompositions (notées A, B, C et D), illustrés sur la figure 15.(b), ont été testées.

- A: tous les noeuds sont analytiques,
- B: tous les noeuds sont stochastiques,
- C: un bloc 3x3 de noeuds stochastiques, le reste analytique,
- D: 12 noeuds analytiques et 13 stochastiques.

Le réseau a été simulé durant 50000 secondes (temps de simulation). Sur une station de travail Sun Sparc Ultra, nous avons obtenu des temps d'exécution inférieur à 1 seconde dans le cas A et de 550 secondes dans le cas B. Avec le logiciel de simulation



(a) (b)

Figure 15. *(a) le réseau test à 25 noeuds et (b) les 4 cas considérés.*

commercial OPNET la simulation prends 870 secondes.

La figure 16 montre la convergence de l'occupation moyenne (≈ 1500) du noeud 12 pour les 4 cas de décomposition. Bien sûr, la cas A (analytique) converge très vite vers la solution. De plus, on peut observer que les cas hybrides C et D ont un meilleur comportement que le cas B (tous les noeuds simulés). En fait, notre expérience montre que les équations différentielles permettent de lisser le processus de simulation.

L'approche hybride permet également la simulation de la réponse dynamique du réseau. Dans le cas de la simulation à événements discrets, un grand nombre de réalisations indépendantes sont exécutées puis leur moyenne est calculée. Cela augmente significativement le temps de calcul, mais la parallélisation est très simple et une bonne accélération peut être obtenue. Dans l'exemple de la figure 17, les débits du trafic change à 5, 10 et 15 secondes (remarquons que les équations analytiques ont une réponse transitoire plus rapide).

Plusieurs benchmarks parallèle ont été menés sur une IBM SP2 du Trinity College de Dublin. Pour un grand réseau (30x30), l'accélération parallèle obtenue est quasiment linéaire comme représenté sur la figure 18.

5. Conclusion

La modélisation analytique est limitée par nos connaissances théoriques et par la difficulté d'obtenir des modèles précis et efficaces pour des systèmes réels. Mal-

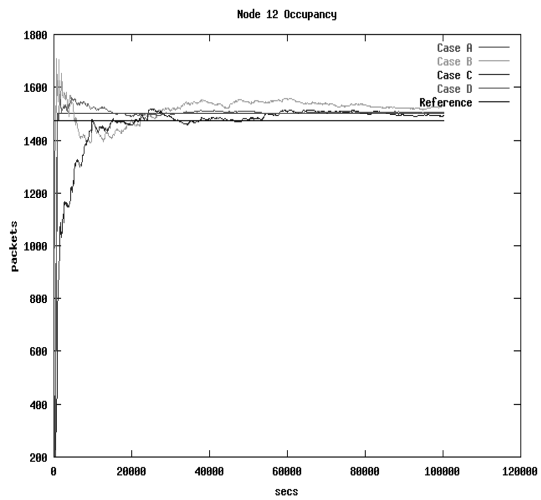


Figure 16. *Convergence de l'algorithme pour les cas A, B, C et D.*

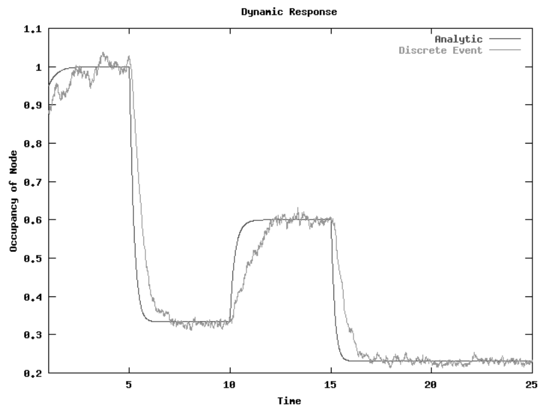


Figure 17. *Réponse dynamique.*

heureusement, la simulation à événements discrets ne fournit pas une solution "magique" pour étudier les réseaux de télécommunications en raison de ses temps de calcul très importants pour des systèmes de grande taille. Le concept de simulation hybride distribuée développé dans cet article est nouveau dans le sens où il combine des simulations événementielles et des modèles analytiques dans un modèle différentiel global du réseau. Cette approche décompose un réseau en un ensemble d'équations des flots (à l'aide des équations différentielles) résolues de manière analytique pour certains noeuds et par des simulations à événements discrets pour d'autres noeuds. Les bases

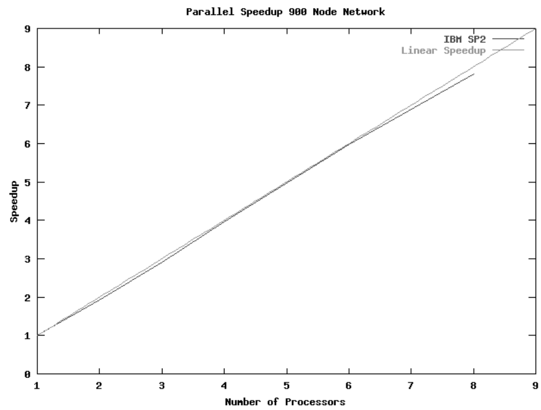


Figure 18. *Accélération parallèle sur une IBM SP2 pour un réseau 30x30.*

théoriques de la modélisation différentielle du trafic et son extension à la simulation hybride ont été présentés dans cet article.

Le premier aspect qu'il est important de garder à l'esprit concerne la décomposition par flot introduite par les équations différentielles qui représentent la propagation des flots de noeud en noeud. Ce concept est très général et devrait être approprié pour représenter n'importe quel système de files d'attente. Il est important de noter que ces modèles permettent de calculer facilement les gradients de fonctions de coûts par rapport à l'intensité des flots ou par rapport aux paramètres de routage. Cet aspect n'a pas été développé dans l'article mais est essentiel pour un outil de planification de réseau.

Le second aspect important est que cette modélisation globale est dynamique. Par conséquent les mécanismes en boucle fermée des systèmes de télécommunications modernes comme par exemple les protocoles de routage dynamique ou de contrôle de flux devraient bien être représentés avec une telle modélisation.

Enfin, un aspect très intéressant de la simulation hybride concerne sa parallélisation. On a vu que deux stratégies (décomposition en sous-domaines ou des trajectoires) peuvent être implémentées simultanément sur des machines à mémoire partagée ou à mémoire

distribuée. La décomposition en sous-domaines par partitionnement du réseau permet une décomposition gros grain de l'ensemble des équations. La décomposition des trajectoires (réalisations indépendantes) permet une parallélisation grain fin. La combinaison des deux approches permet un meilleur équilibrage des charges du modèle global de simulation.

6. References

[GAR 86] GARCIA J.M., LEGALL F., BERNUSSOU J., " A MODEL FOR TELEPHONE NETWORKS AND ITS USE FOR ROUTING OPTIMIZATION PURPOSES ". *IEEE Jour. on Select. Areas in Comm., Special issue on communication network performance evaluation*, VOL 4, 1986.

[GAR 80] GARCIA J.M., "PROBLÈMES LIÉS À LA MODÉLISATION DU TRAFFIC ET À L'ACHEMINEMENT DES APPELS DANS UN RÉSEAU TÉLÉPHONIQUE". *Thèse de doctorat, Université Paul sabatier (Toulouse)*, 1980.

[MAR 86] MARIE R., RUBINO G., " M/M/1 FIFO-MULTICLASS QUEUES : EXACT RESULTS AND GENERALIZATIONS". *IRISA Research Report N^o 333*, 1986.

[MIS 86] MISRA J., "DISTRIBUTED DISCRETE-EVENT SIMULATION." *ACM Computing Surveys*, VOL.18, N^o 1, 1986.

[BRU 00A] BRUN O., "MODÉLISATION ET OPTIMISATION DE LA GESTION DES RESSOURCES DANS LES ARCHITECTURES DISTRIBUÉES - APPLICATION À LA PARALLÉLISATION MASSIVE DE LA TECHNIQUE DE FILTRAGE PARTICULAIRE". *Thèse de doctorat, université Paul Sabatier (Toulouse)*, 2000.

[GAR 98] GARCIA J.M., "A NEW APPROACH FOR ANALYTICAL MODELLING OF PACKET SWITCHED TELECOMMUNICATION NETWORKS". *LAAS Research Report N^o 98443*, 1998.

[GAR 00] GARCIA J.M. , BRUN O. , "TRANSIENT ANALYTICAL SOLUTION OF $M/D/1/N$ QUEUES". *submitted to J. Appl. Prob., LAAS Research Report No 00383*, 2000.

[BRU 00B] BRUN O., GARCIA J.M., "ANALYTICAL SOLUTION OF FINITE CAPACITY $M/D/1$ QUEUES". *J. Appl. Prob.*, VOL 37, NO 4, 2000.

[ABA 87] ABATE, J. , WHITT, W. , "TRANSIENT BEHAVIOR OF THE $M/M/1$ QUEUE: STARTING AT THE ORIGIN". *Queueing Systems*, **2** , 1987.

[COH 69] COHEN, J. W. , *The Single Server Queue.* NORTH HOLLAND, 1969.

[GRA 90] GRAVEY, A. , LOUVION, J. R. , BOYER, P. , "ON THE $Geo/D/1$ AND $Geo/D/1/N$ QUEUES". *Performance Evaluation* **11**(2), 1990.

[KEL 85B] KELTON, W. D. , LAW, A. M. , "THE TRANSIENT BEHAVIOR OF THE $M/M/s$ QUEUE, WITH IMPLICATIONS FOR THE STEADY-STATE SIMULATIONS". *Operations Research* **33**(2), 1985.

[KLE 75] KLEINROCK, L., *Queueing Systems. Volume I: Theory*. WILEY, 1975.

[KOB 74] KOBAYASHI, H., "APPLICATION OF THE DIFFUSION APPROXIMATIUON TO QUEUEING NETWORKS II: NONEQUILIBRIUM DISTRIBUTIONS AND APPLICATIONS TO COMPUTER MODELING". *Jour. of the Ass. for Comp. Machinery*, VOL. 21, NO. 3, 1974.

[LEE 93] LEE, I. J. , ROTH, E. , "A HEURISTIC FOR THE TRANSIENT EXPECTED QUEUE LENGTH OF MARKOVIAN QUEUEING SYSTEMS". *Operations Research Letters*. **14**.(1), 1993.

[DSL 93] LEE, D. S. , LI, S. Q. , "TRANSIENT ANALYSIS OF A SWITCHED POISSON ARRIVAL QUEUE UNDER OVERLOAD CONTROL". *Performance Evaluation*. **17**.(1), 1993.

[MUR 88] MURRAY, J. R. , , KELTON, W. D. , "THE TRANSIENT BEHAVIOR OF THE $M/E_k/2$ QUEUE AND STEADY-STATE SIMULATION". *Comput. Operat. Res.*. **15**, 1988.

[ROB 96] *Broadband Network Teletraffic, Final Report of Action Cost 242*. ROBERTS, J. , AL EDS, SPRINGER BERLIN, 1996.

[SAA 60] SAATY, T. L. , "TIME-DEPENDENT SOLUTION OF THE MANY-SERVER POISSON QUEUE". *Operations Research*. **8**, 1960.

[TAK 62] TAKACS, L. , *Introduction to the Theory of Queues*. OXFORD UNIVERSITY PRESS, 1962.

[VIC 96] VICARI, N. , TRAN-GIA, P. , "A NUMERICAL ANALYSIS OF THE $Geo/D/N$ QUEUEING SYSTEM". *Research Report No 151*, UNIVERSITY OF WURZBURG, 1996.

[WAN 99] WANG, C. L. , "ON THE TRANSIENT DELAYS OF $M/G/1$ QUEUES". *J. Appl. Prob.*. **36** (3), 1999.

[STAR1] "PUBLIC FINAL REPORT OF ESPRIT HPCN PST ACTIVITY STAR1 - SIMULATION OF TELECOMMUNICATIONS ARCHITECTURES." *http://www.icetact.tcd.ie/icetact/examples/star1.html*, 1999.