

## Travaux Dirigés

# Modèles & Algorithmes pour l'Ingénierie de Trafic

### PROBLEME 1

Une technique efficace pour diffuser un trafic d'un noeud origine vers tous les autres dans un réseau consiste à utiliser un arbre couvrant (Spanning Tree). Considérons par exemple le réseau représenté par le graphe orienté de la Figure 1.a. Si le noeud A doit diffuser un trafic de 2 Mbps vers tous les autres noeuds du réseau, il pourra par exemple utiliser l'arbre représenté sur la Figure 1.b. On voit bien avec cet exemple que l'utilisation d'un arbre couvrant permet de diminuer la bande-passante consommée : le trafic émis sur un lien appartenant à l'arbre couvrant est toujours égal à celui du flux broadcast.

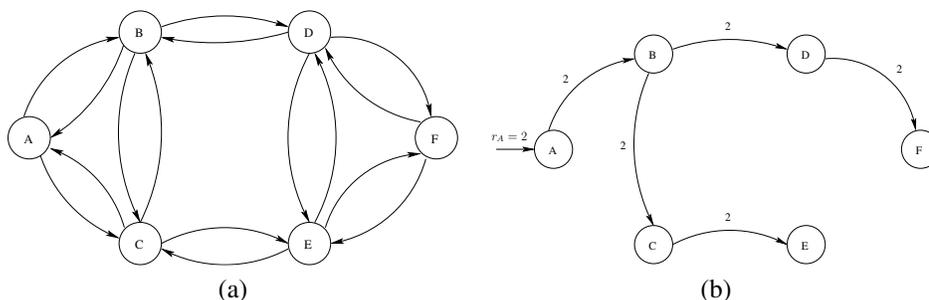


Figure 1: Exemple d'arbre couvrant utilisé pour la diffusion d'un message.

Considérons un graphe orienté  $G = (V, E)$  représentant un réseau. On note  $C_e$  la capacité du lien  $e \in E$  et  $y_e$  le trafic sur ce lien. Soit  $U \subset V$  un ensemble de noeuds diffusant du trafic vers tous les autres. Pour  $u \in U$ , on note  $r_u$  le trafic que le noeud  $u$  diffuse à tous les autres noeuds  $v \neq u$ . Ce trafic de broadcast peut être partagé sur plusieurs arbres couvrants. Soit  $\mathcal{T}_u$  l'ensemble des arbres couvrants que peut utiliser le

noeud  $u$ . Un arbre  $T \in \mathcal{T}_u$  ne peut être utilisé que par le noeud  $u$ . On notera  $x_T \geq 0$  la quantité de trafic émise sur l'arbre couvrant  $T \in \mathcal{T}_u, u \in U$ .

**Questions :**

**Q1.** Ecrire la contrainte de conservation du trafic de chacun des trafics  $r_u, u \in U$ .

**Q2.** On pose

$$\gamma_e^T = \begin{cases} 1 & \text{si l'arc } e \text{ appartient à l'arbre } T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ecrire l'expression de  $y_e$  en fonction des variables  $x_T$  et des paramètres  $\gamma_e^T$ .  
Formuler la contrainte de capacité.

**Q3.** Notons  $\rho = \max_{e \in E} \frac{y_e}{C_e}$  le taux maximal d'utilisation des liens du réseau. Ecrire un programme linéaire permettant de déterminer les variables  $x_T$  minimisant  $\rho$ . Avec quel algorithme peut-on résoudre ce problème ?

**Q4.** Comment modifier le problème précédent pour imposer que chaque flux  $r_u, u \in U$ , soit routé sur un et un seul arbre  $T \in \mathcal{T}_u$ . Quelles sont alors les techniques de résolution ?

**PROBLEME 2**

On considère le réseau avec 2 noeuds et 3 liens parallèles, représenté sur la figure 2. Le noeud 1 est l'origine et le noeud 2 la destination d'une unité de flot :  $r = 1$  Mbps. On note  $x_i$  la quantité de flot transmise sur le lien  $i$ , qui a une capacité  $C_i$ . On suppose dans la suite que  $C_1=4$  Mbps,  $C_2=2$  Mbps et  $C_3=1$  Mbps.

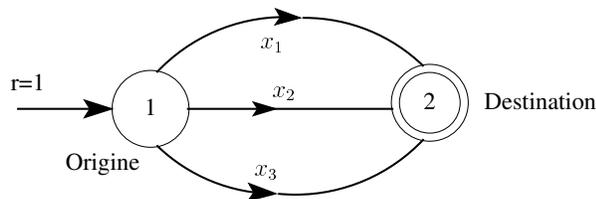


Figure 2: Réseau considéré dans le problème.

Le problème consiste à déterminer la solution optimale  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  de routage par partage de charge. On suppose que la fonction coût est :

$$D(\mathbf{x}) = D_1(x_1) + D_2(x_2) + D_3(x_3)$$

où  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  et  $D_i(x_i) = \frac{x_i}{C_i - x_i}$ .

Mathématiquement, le problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser :} \quad D_1(x_1) + D_2(x_2) + D_3(x_3) \\ \text{sous les contraintes :} \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

**Questions :**

- **Q1.** Rappeler la condition d'optimalité du routage par partage de charge et son interprétation.
- **Q2.** En utilisant la condition d'optimalité, montrer que l'on a  $x_3^* = 0$ . On pourra raisonner par l'absurde et remarquer que  $x_3 > 0$  implique que  $x_1 > 0$  et  $x_2 > 0$ .
- **Q3.** En utilisant directement les formules vues en cours, déterminer la solution optimale.
- **Q4.** En partant de la solution  $\mathbf{x} = (1/3, 1/3, 1/3)$ , faire une itération de Flow Deviation. On prendra le pas  $\beta=1$ .