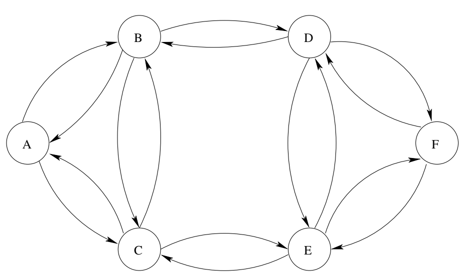
Travaux Dirigés

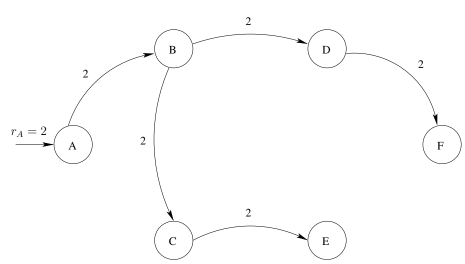
Modèles & Algorithmes pour l'Ingénierie de Trafic

PROBLEME 1

Une technique efficace pour diffuser un trafic d'un noeud origine vers tous les autres dans un réseau consiste à utiliser un arbre couvrant (Spanning Tree). Considérons par exemple le réseau représenté par le graphe orienté de la Figure 1.a. Si le noeud A doit diffuser un trafic de 2 Mbps vers tous les autres noeuds du réseau, il pourra par exemple utiliser l'arbre représenté sur la Figure 1.b. On voit bien avec cet exemple que l'utilisation d'un arbre couvrant permet de diminuer la bande-passante consommée : le trafic émis sur un lien appartenant à l'abre couvrant est toujours égal à celui du flux broadcast.



(a)



(b)

Figure 1: Exemple d'arbre couvrant utilisé pour la diffusion d'un message.

Considérons un graphe orienté $G = (V, E)$ représentant un réseau. On note C_e la capacité du lien $e \in E$ et y_e le trafic sur ce lien. Soit $U \subset V$ un ensemble de noeuds diffusant du trafic vers tous les autres. Pour $u \in U$, on note r_u le trafic que le noeud u diffuse à tous les autres noeuds $v \neq u$. Ce trafic de broadcast peut être partagé sur plusieurs arbres couvrants. Soit $\mathcal{T}_u$ l'ensemble des arbres couvrants que peut utiliser le noeud u. Un arbre $T \in \mathcal{T}_u$ ne peut être utilisé que par le noeud u. On notera $x_T \geq 0$ la quantité de trafic émise sur l'arbre couvrant $T \in \mathcal{T}_u$, $u \in U$.

Questions :

Q1. Ecrire la contrainte de conservation du trafic de chacun des trafics r_u, $u \in U$.
Réponse :
$\sum_{T \in \mathcal{T}_u} x_T = r_u, \quad u \in U.$

Q2. On pose

$$\gamma_e^T = \begin{cases} 1 & \text{si l'arc } e \text{ appartient à l'arbre } T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ecrire l'expression de y_e en fonction des variables x_T et des paramètres γ_e^T. Formuler la contrainte de capacité.
Réponse :
Contrainte de capacité: $y_e \leq C_e$ où $y_e = \sum_{u \in U} \sum_{T \in \mathcal{T}_u} \gamma_e^T x_T$.

Q3. Notons $\rho = \max_{e \in E} \frac{y_e}{C_e}$ le taux maximal d'utilisation des liens du réseau. Ecrire un programme linéaire permettant de déterminer les variables x_T minimisant ρ. Avec quel algorithme peut-on résoudre ce problème ?
Réponse :

$$\begin{array}{rcl}
\text{Minimiser} & \rho & \\
\text{s.t.} & & \\
& \sum_{T \in \mathcal{T}_u} x_T = r_u & , u \in U \\
& y_e = \sum_{u \in U} \sum_{T \in \mathcal{T}_u} \gamma_e^T x_T & , e \in E \\
& y_e / C_e \leq \rho & , e \in E \\
& y_e \leq C_e & , e \in E \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} &
\end{array}$$

Problème de PL : résolution avec l'algorithme du simplex.

Q4. Comment modifier le problème précédent pour imposer que chaque flux r_u, $u \in U$, soit routé sur un et un seul arbre $T \in \mathcal{T}_u$. Quelles sont alors les techniques de résolution ?
Réponse :

$$\begin{array}{rcl}
\text{Minimiser} & \rho & \\
\text{s.t.} & & \\
& \sum_{T \in \mathcal{T}_u} x_T = 1 & , u \in U
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
y_e = \sum_{u \in U} \sum_{T \in \mathcal{T}_u} \gamma_e^T x_T r_u & , e \in E \\
y_e / C_e \leq \rho & , e \in E \\
y_e \leq C_e & , e \in E \\
x_T \in \{0, 1\} & , T \in \mathcal{T}_u, u \in U \\
\mathbf{y} \geq \mathbf{0} &
\end{array}
$$

Problème de PLNE : résolution par branch-and-bound ou branch-and-cut.

PROBLEME 2

On considère le réseau avec 2 noeuds et 3 liens parallèles, représenté sur la figure 2. Le noeud 1 est l'origine et le noeud 2 la destination d'une unité de flot : $r = 1$ Mbps. On note x_i la quantité de flot transmise sur le lien i, qui a une capacité C_i. On suppose dans la suite que C_1=4 Mbps, C_2=2 Mbps et C_3=1 Mbps.

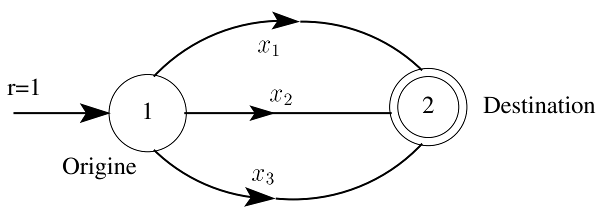


Figure 2: Réseau considéré dans le problème.

Le problème consiste à déterminer la solution optimale $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ de routage par partage de charge. On suppose que la fonction coût est :

$$D(\mathbf{x}) = D_1(x_1) + D_2(x_2) + D_3(x_3)$$

où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $D_i(x_i) = \frac{x_i}{C_i - x_i}$.

Mathématiquement, le problème s'écrit :

$$
\begin{cases}
\text{Minimiser :} & D_1(x_1) + D_2(x_2) + D_3(x_3) \\
\text{sous les contraintes :} & \\
 & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{cases}
$$

Questions :

- **Q1.** Rappeler la condition d'optimalité du routage par partage de charge et son interprétation.

Réponse :
Le routage optimal ne propage du flux sur un chemin que s'il est de longueur minimale au sens des dérivées premières.

- **Q2.** En utilisant la condition d'optimalité, montrer que l'on a $x_3^* = 0$. On pourra raisonner par l'absurde et remarquer que $x_3 > 0$ implique que $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$.
  Réponse :
  De $D_1'(x_1) = D_3'(x_3)$ et $D_2'(x_2) = D_3'(x_3)$ on déduit :

  $$\frac{4}{(4-x_1)^2} = \frac{1}{(1-x_3)^2} \quad \text{et} \quad \frac{2}{(2-x_2)^2} = \frac{1}{(1-x_3)^2}$$

  et donc $x_1 = 2 + 2x_3$ et $x_2 = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}x_3$. Avec $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, on obtient $(3 + \sqrt{2})x_3 + 4 - \sqrt{2} = 1$ et donc $x_3 < 0$: contradiction.

- **Q3.** En utilisant directement les formules vues en cours, déterminer la solution optimale.
  Réponse :
  On sait déjà que $x_3 = 0$. On n'a donc qu'à considérer les liens 1 et 2. La condition $r = 1 \leq C_1 - \sqrt{C_1 C_2} = 1.17$ est vérifiée, donc $\mathbf{x}^* = (1, 0, 0)$.

- **Q4.** En partant de la solution $\mathbf{x} = (1/3, 1/3, 1/3)$, faire une itération de Flow Deviation. On prendra le pas β=1.
  Réponse :
  On a $D_1'(x_1) = \frac{4}{(4-1/3)^2}$=0.2975, $D_2'(x_2) = \frac{2}{(2-1/3)^2}$=0.72 et $D_3'(x_3) = \frac{1}{(1-1/3)^2}$=2.25. Donc $\overline{\mathbf{x}}^0 = (1, 0, 0)$ et $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \beta(\overline{\mathbf{x}}^0 - \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^*$.