Travaux Dirigés

Modèles & Algorithmes pour l'Ingénierie de Trafic

1 Problème

Les systèmes avioniques modernes sont basés sur le standard IMA (Integrated Modular Avionics) qui utilise un réseau AFDX (similaire à un réseau Ethernet) pour la transmission de messages entre les tâches exécutées sur les modules de calcul. Pour des raisons de sécurité, les communications doivent être isolées les unes des autres. Pour cela, l'AFDX utilise la notion de lien virtuel (virtual link). Comme illustré sur la Figure 1, un lien virtuel est un tunnel ayant une bande-passante réservée et reliant un émetteur à un ensemble de destinations. Il est utilisé pour la transmission multicast d'un message depuis une tâche émettrice vers des tâches réceptrices avec une garantie de débit.

Le problème que nous considérons ici est celui du routage des liens virtuels dans la topologie physique du réseau AFDX. On représente cette topologie par un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$. On note c_e la capacité du lien $e \in \mathcal{E}$ en Mbps. On a un ensemble $\mathcal{V}$ de liens virtuels à déployer dans le réseau. Chaque lien virtuel $v \in \mathcal{V}$ est caractérisé par :

- son noeud source $src(v) \in \mathcal{N}$,

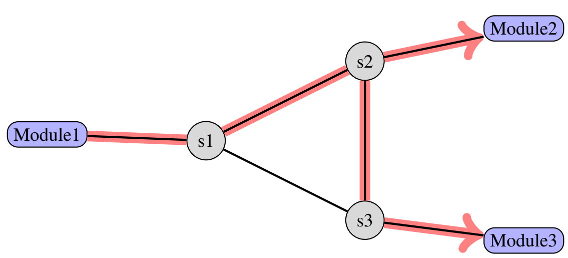

Figure 1: Lien virtuel permettant la transmission multicast d'un message depuis le module 1 vers les modules 2 et 3.

- un ensemble de destinations $dst(v) \subset \mathcal{N} \setminus \{src(v)\}$,
- le nombre K_v de destinations (i.e. le cardinal de $dst(v)$),
- une bande passante b_v.

Etant donné un certain routage des liens virtuels, si on note y_e la charge du lien e pour ce routage, le taux d'utilisation maximal des liens du réseau est

$$\rho = \max_{e \in \mathcal{E}} \frac{y_e}{c_e}$$

Le problème consiste à trouver pour chaque lien virtuel v un arbre multicast dans le graphe $\mathcal{G}$ de manière à minimiser ce taux d'utilisation maximal.

Première partie : formulation lien-chemin

On suppose ici que l'arbre sur lequel doit être routé le lien virtuel v appartient à un certain ensemble $\mathcal{T}^v$ d'arbres "candidats" pour relier la source $src(v)$ et les destinations de l'ensemble $dst(v)$. Pour un arbre T, on notera

$$\delta_e^T = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in T, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour chaque lien virtuel $v \in \mathcal{V}$ et chaque arbre $T \in \mathcal{T}^v$, on définit la variable binaire x_T de la façon suivante:

$$x_T = \begin{cases} 1 & \text{si le lien virtuel } v \text{ est routé sur l'arbre } T, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Questions :

1. Ecrire les contraintes spécifiant que chaque lien virtuel $v \in \mathcal{V}$ doit être routé sur un et un seul arbre $T \in \mathcal{T}^v$.
   Réponse:

$$\sum_{T \in \mathcal{T}^v} x_T = 1 \quad , \forall v \in \mathcal{V}$$

2. Ecrire les contraintes définissant les variables y_e en fonction des variables x_T, pour chaque lien $e \in \mathcal{E}$.
   Réponse:

$$y_e = \sum_{v \in \mathcal{V}} \sum_{T \in \mathcal{T}^v} \delta_e^T \, x_T \, b_v \quad , \forall e \in \mathcal{E}$$

3. Ecrire les contraintes définissant le taux maximal d'utilisation ρ.
   Réponse:

$$y_e \leq c_e \, \rho \quad , \forall e \in \mathcal{E}$$

4. En utilisant les réponses aux questions précédentes, proposer une formulation complète du problème (sans oublier les domaines des variables). A quel type de problème est-on confronté ? Quelles méthodes peuvent être utilisées pour le résoudre de manière exacte ?
Réponse:

$$\begin{aligned}
& \min\ \rho && && \text{(OPT-VL)} \\
s.t. & && && \\
& \sum_{T \in \mathcal{T}^v} x_T = 1 && ,\forall v \in \mathcal{V}, && (1) \\
& y_e = \sum_{v \in \mathcal{V}} \sum_{T \in \mathcal{T}^v} \delta_e^T\, x_T\, b_v && ,\forall e \in \mathcal{E}, && (2) \\
& y_e \leq c_e\, \rho && ,\forall e \in \mathcal{E}, && (3) \\
& x_T \in \{0,1\} && ,\forall T \in \mathcal{T}^v, \forall v \in \mathcal{V}, && (4) \\
& y_e \geq 0 && ,\forall e, && (5)
\end{aligned}$$

Il s'agit d'un programme linéaire mixte, les variables y_e étant réelles positives et les variables x_T étant des variables 0-1. On peut le résoudre avec un algorithme de Branch-and-Bound ou de Branch-and-Cut.

Deuxième partie : formulation noeud-lien

Cette formulation a l'avantage de ne pas reposer sur un ensemble d'arbres "candidats" connus à l'avance. Pour formuler le problème suivant cette approche, nous introduisons les variables suivantes :

- La variable entière $x_v^e \in \{0, \ldots, K_v\}$ représente le nombre de destinations que le lien virtuel v atteint en passant par le lien e (cf. Figure 2),
- La variable $y_v^e \in \{0, 1\}$ indique si le lien virtuel v passe par le lien e ou non (cf. Figure 3).

Questions :

1. En utilisant les variables x_v^e, écrire les contraintes spécifiant qu'il y a conservation du nombre de destinations en chaque noeud $n \in \mathcal{N}$. Pour cela, on notera $\Gamma^+(n)$ l'ensemble des liens entrant au noeud n et $\Gamma^-(n)$ l'ensemble des liens sortant de ce noeud. On définira également des constantes $h_{n,v}$ faisant le bilan du nombre de destinations sur les liens entrant et sortant. On précisera la valeur de ces constantes pour les noeuds $n = src(v)$, $n \in dst(v)$ et les autres noeuds n.
Réponse:

$$\sum_{e \in \Gamma^+(n)} x_v^e - \sum_{e \in \Gamma^-(n)} x_v^e = h_{n,v} \quad ,\forall n, v.$$

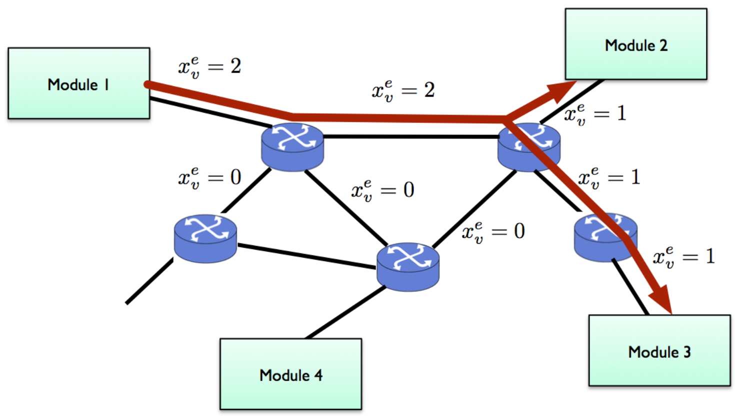

Figure 2: Illustration des variables x_v^e.

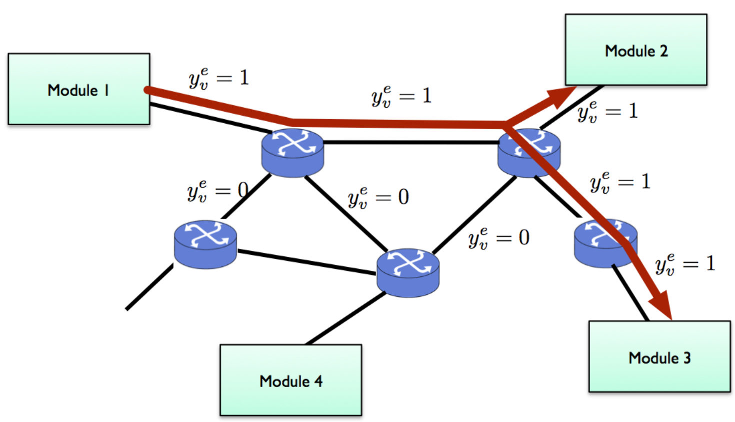

Figure 3: Illustration des variables y_v^e.

avec,

$$h_{i,v} = \begin{cases} -K_v & \text{si } i = src(v), \\ 1 & \text{si } i \in dst(v), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

.

2. En utilisant une constante $M > \max_{v \in \mathcal{V}} K_v$, écrire deux types de contraintes définissant les variables y_v^e.
Réponse:

$$\begin{aligned} y_v^e\, M &\geq x_v^e \quad , \forall v, e, \\ y_v^e &\leq x_v^e \quad , \forall v, e. \end{aligned}$$

3. Pour avoir une structure d'arbre, il faut garantir qu'en chaque noeud n, il y a au plus un lien entrant e de $\Gamma^+(n)$ qui est utilisé par le lien virtuel v. Comment écrire cette contrainte ?
Réponse:

$$\sum_{e \in \Gamma^+(n)} y_v^e \leq 1 \quad , \forall n, v.$$

4. Ecrire les contraintes définissant les variables y_e en fonction des variables y_v^e, pour chaque lien $e \in \mathcal{E}$.
Réponse:

$$y_e = \sum_{v \in \mathcal{V}} y_v^e\, b_v \quad , \forall e.$$

5. Ecrire les contraintes définissant le taux maximal d'utilisation ρ.
Réponse:

$$y_e \leq c_e\, \rho \quad , \forall e.$$

6. En utilisant les réponses aux questions précédentes, proposer une formulation complète du problème (sans oublier les domaines des variables). A quel type de problème est-on confronté ? Quelles méthodes peuvent être utilisées pour le résoudre de manière exacte ?
Réponse:

$$
\begin{aligned}
& \min \ \rho \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{e \in \Gamma^+(n)} x_v^e - \sum_{e \in \Gamma^-(n)} x_v^e = h_{n,v} && , \forall n, v, && (6) \\
& y_v^e \, M \geq x_v^e && , \forall v, e, && (7) \\
& y_v^e \leq x_v^e && , \forall v, e, && (8) \\
& \sum_{e \in \Gamma^+(n)} y_v^e \leq 1 && , \forall n, v, && (9) \\
& y_e = \sum_{v \in \mathcal{V}} y_v^e \, b_v && , \forall e, && (10) \\
& y_e \leq c_e \, \rho && , \forall e, && (11) \\
& y_v^e \in \{0, 1\} && , \forall v, e, && (12) \\
& x_v^e \in \{0, \ldots, K_v\} && , \forall v, e, && (13) \\
& y_e \geq 0 && , \forall e, && (14)
\end{aligned}
$$

Il s'agit d'un programme linéaire mixte, les variables y_e étant réelles positives et les variables x_v^e et y_v^e étant entières. On peut le résoudre avec un algorithme de Branch-and-Bound ou de Branch-and-Cut.