EVALUATION DE PERFORMANCES
ET
APPLICATIONS AUX RESEAUX

SECONDE PARTIE

Réseaux à commutation de circuits

Olivier Brun - Urtzi Ayesta

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES

CHAPITRE 1

Réseaux à commutation de circuits téléphoniques

1.1 Introduction

La principale caractéristique des réseaux téléphoniques est d'être des réseaux à commutation de circuits. Ainsi, lorsque un abonné décroche son combiné et compose le numéro de son correspondant, le réseau établit une connexion (un circuit) entre le poste de l'appelant et celui de l'appelé. Des ressources sont réservées tout le long du chemin ainsi établi. A la fin de la communication, le réseau libère ces ressources.

Bien sûr, aujourd'hui le réseau téléphonique offre de nombreux services : voix analogique (classique), voix numérique avec l'ISDN et transmission de données. Mais dans tous ces cas, le chemin entre la "source" et la destination a dû être établi avant le début de la communication proprement dite, et des ressources réservées le long de ce chemin.

Par rapport à la commutation de paquets, utilisée dans l'Internet par exemple, l'avantage de la commutation de circuits est évident: une fois le circuit établi, la qualité de la communication est garantie puisque des ressources lui sont spécifiquement dédiées. L'inconvénient, c'est que chaque organe du réseau dispose d'une quantité de ressources limitée et ne peut donc supporter qu'un nombre limité d'appels simultanés. A l'établissement de l'appel, il se peut donc que le réseau ne puisse établir un circuit entre l'appelant et l'appelé et que donc l'appel soit rejeté. Le blocage des appels est le phénomène essentiel dans les réseaux téléphoniques: c'est le taux de blocage des appels qui définit la qualité de service rendue aux abonnés.

Pour qu'un appel ne soit jamais bloqué, il faudrait dimensionner le réseau en prévoyant suffisamment de ressources sur chaque équipement pour supporter le cas où tous les abonnés téléphonent simultanément. Ce serait évidemment hors de coût, et surtout inutile. En effet, les abonnés ne sont pas tous constamment en train de téléphoner, leur activité étant d'ailleurs très variable suivant que l'on considère des abonnés résidentiels ou professionels. Les opérateurs téléphoniques vont typiquement dimensionner leur réseau pour supporter les trafics prévus aux heures de pointe avec un taux de blocage de l'ordre de 1%. Pour certains jours exceptionnels (31 décembre par exemple), ils vont viser des taux de blocage de quelques pourcents (5% par exemple) aux heures de pointe.

L'objectif de ce chapitre est de présenter brièvement l'architecture générale des réseaux téléphoniques. Nous étudierons dans les chapitres suivants les techniques permettant d'évaluer les performances d'un réseau téléphonique.

1.2 Architecture des réseaux téléphoniques

Le réseau téléphonique peut être décomposé en deux sous-réseaux principaux : le réseau de transmission et le réseau de commutation.

1.2.1 Le réseau de transmission

Le réseau de transmission est l'ensemble des équipements (circuits coaxiaux, liens électromagnétiques ou optiques, modulateurs, démodulateurs, amplificateurs, etc.) qui permettent de transmettre un signal « voix » (de 300Hz à 3400Hz) d'un terminal source à un terminal destination.

Historiquement, dans les premiers réseaux téléphoniques, des opératrices établissaient pour chaque appel un chemin entre l'appelant et l'appelé. Chacun des liens de transmission physiques empruntés par ce chemin étaient alors dédiés à cet appel.

En vue d'optimiser l'utilisation des ressources, le réseau téléphonique utilise aujourd'hui des techniques de multiplexage. En multiplexant, plusieurs appels peuvent être acheminés par un même lien:

- Time Division Multiplexing (TDM) : Il s'agit du multiplexage temporel. Une trame temporelle (slot) est impartie à chaque appel. Ainsi, plusieurs signaux « voix » (auparavant numérisés) de différents abonnés, partagent une seule et même ressource de transmission.
- Frequency Division Multiplexing (FDM) : Il s'agit du multiplexage fréquentiel. La bande passante du lien est divisée en canaux téléphoniques (4 kHz). Les canaux de « voix » entrants sont modulés dans ces canaux au travers d'une technique de modulation d'amplitude.

Que l'on utilise une technique de multiplexage TDM ou FDM, il et clair que le nombre d'appels simultanés pouvant être établis sur un lien reste limité. La capacité N d'un lien correspond ainsi au nombre maximal de circuits pouvant être établis simultanément sur ce lien. En téléphonie, un lien de communication est souvent appelé un faisceau de circuits.

1.2.2 Le réseau de commutation

Le réseau de transmission interconnecte les terminaux à des commutateurs et ces commutateurs entre eux. En effet, dans la pratique, il serait hors de coût de relier directement par un support de transmission chaque zone géographique desservie aux autres. Le réseau de commutation, interconnectant les points de commutation entre eux, a donc pour fonction principale d'acheminer les appels d'une zone à une autre. Les commutateurs ont ainsi remplacés les opératrices qui établissaient le circuit dans les premiers réseaux téléphoniques.

Le routage utilise une partie du réseau de transmission comme lien entre les centres de commutation. Il définit le chemin pour le trafic qui ne peut pas atteindre directement sa destination.

1.3 Le réseau de commutation français

Le réseau téléphonique français, comme tous les réseaux des opérateurs historiques des grands pays occidentaux, est basé sur une structure hiérarchique. Cette architecture peut être subdivisée en 2 niveaux : le cour de réseau, contenant les commutateurs et le réseau de signalisation, et le réseau d'accès, qui correspond aux derniers kilomètres (last mile).

1.3.1 Le coeur de réseau

Le coeur de réseau est organisé hiérarchiquement en un réseau de transit et un réseau local.

– le réseau de transit : C'est un réseau de commutation de TE (Tandem Exchange). Selon leur niveau hiérarchique, ces commutateurs peuvent être CTP (Centre de Transit Primaire) utilisés dans la communication entre différentes régions géographiques; ou CTS (Centre de Transit Secondaire), utilisés dans la communication à l'intérieur de ces régions. A ce niveau, SDH (Synchronous Digital Hierarchy) est utilisé, avec des liens de 2 Mbit/s dans les réseaux régionaux ou nationaux (cf. figure 1.1).
– le réseau local: il s'agit d'un réseau de commutation de LE (Local Exchange). Selon les conditions (nombre d'abonnés) on installera un CAA (Centre à Autonomie d'Acheminement ou commutateur d'abonnés) supportant jusqu'à 100 000 lignes téléphoniques; ou bien un CL (Centre Local) qui lui peut supporter 4000 lignes. Les réseaux locaux de CAA sont connectés aux CTS via des réseaux métropolitains (cf. figure 1.2).
– le réseau de signalisation: les commutateurs téléphoniques utilisent le protocole SS7 pour communiquer entre eux.

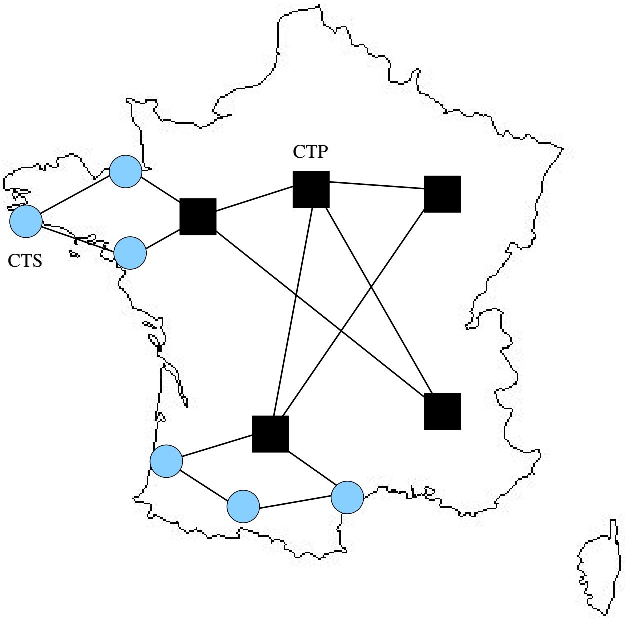


FIG. 1.1 – *Le réseau de transit*

1.3.2 Le réseau d'accès

C'est la partie qui se situe entre le centre local et le terminal de l'abonné (boucle locale). Il existe plusieurs architectures selon les types de services: Les interfaces «Z», pour les accès classiques (voix analogique, modem ou fax); ISDN T0 pour les 2B + D accès numériques; ISDN T2 pour les 30B + D accès numériques.

Aujourd'hui, certaines technologies comme l'HFC (Hybrid Fiber Copper) et l'xDSL (xDigital Subscriber Line) ont introduit de nouvelles méthodes de communication au niveau de la boucle locale. Un pont de voix (interface v5.2) assure la compatibilité, et rend ces nouvelles techniques transparentes au RTC (Réseau Téléphonique Commuté).

Les réseaux mobiles GSM utilisent leurs propres infrastructures durant la phase d'accès, avec leurs propres techniques et technologies d'accès. Mais une fois que le signal est arrivé au CCM (Centre de Commutation de Mobile), il est routé à travers un réseau de commutation identique aux réseaux fixes. Du point de vue du modélisateur, l'étude du réseau de commutation d'un réseau GSM est donc identique à celle du réseau fixe.

Le réseau peut donc être analysé comme un réseau hiérarchique, avec les terminaux téléphoniques au plus bas niveau de la hiérarchie et des commutateurs au-dessus d'eux,

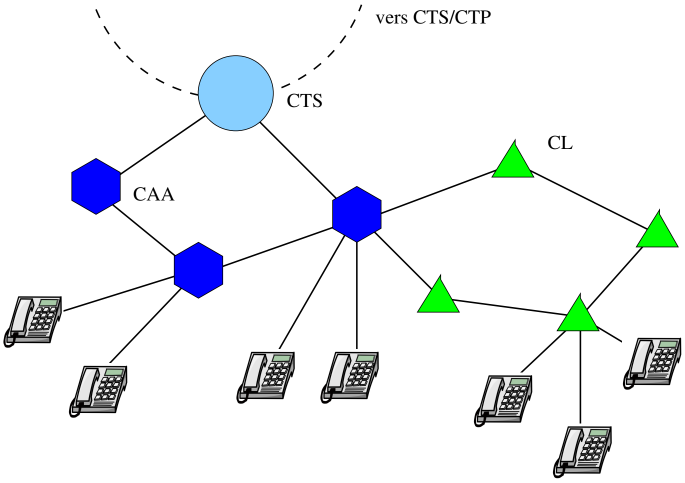


FIG. 1.2 – *Le réseau local*

tel que décrit sur la figure 1.3.

1.4 Acheminement des appels

Le terminal appelant et le terminal appelé n'étant pas relié directement, il est necéssaire, à l'établissement de l'appel, de déterminer un chemin entre les deux terminaux, avant de réserver un circuit le long de ce chemin. Ce chemin va passer par un ou plusieurs noeuds de commutation.

La fonction d'acheminement des appels est distribuée. Les noeuds de commutation disposent d'une table de routage précisant, pour chaque destination (numéro appelé ou un préfixe), la commande de routage à employer. Il existe deux grandes commandes de routage : le partage de charge et le débordement.

1.4.1 Le partage de charge

Au niveau d'un noeud de commutation, le partage de charge consiste à transmettre une certaine proportion du flot d'appels sur chaque faisceau sortant (la proportion pouvant être nulle). Le principe est illustré sur la figure 1.4.(a).Ainsi, un appel (la signalisation en fait) arrivant au noeud i est transmis vers le noeud j_k avec la probabilité α_{i,j_k}. Si $\alpha_{i,j_k} = 1$, il n'y a pas de partage de charge: tous les appels sont acheminés sur le faisceau (i,j_k). L'appel ne pourra être acheminé que si le faisceau choisi dispose d'un circuit libre.

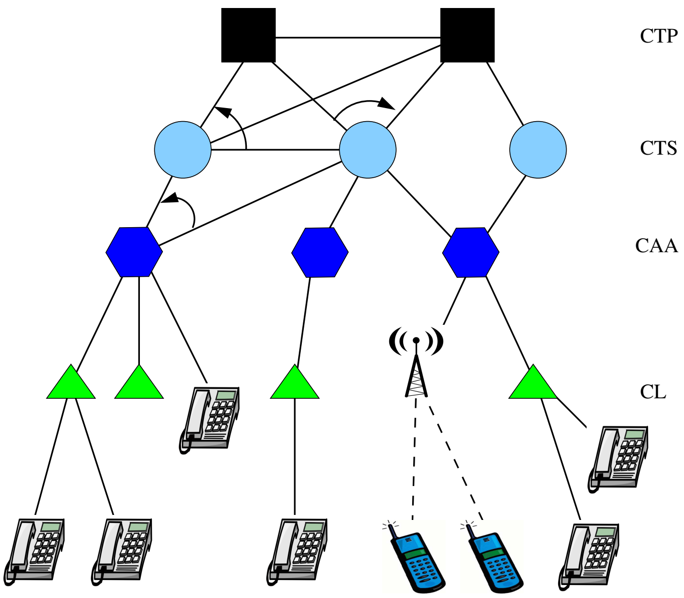


FIG. 1.3 – *Architecture hiérarchique*

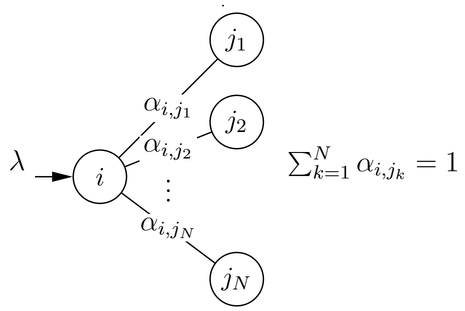
1.4.2 Le débordement

Le débordement est une technique de gestion largement employée dans les réseaux téléphoniques et qui consiste à utiliser plusieurs faisceaux dans un ordre déterminé pour écouler les appels. Si l'on se limite à deux faisceaux, la technique consiste donc à envoyer l'appel par le faisceau de premier choix si celui-ci possède un circuit libre et sinon par le faisceau de second choix. Les notations classiques pour représenter un débordement sont illustrées sur la figure 1.4.(b).Ainsi, lorsqu'un appel arrive au noeud i, on teste d'abord le faisceau (i,j). S'il dispose d'un circuit, l'appel est acheminé sur ce faisceau. Sinon, on teste le faisceau (i,k).

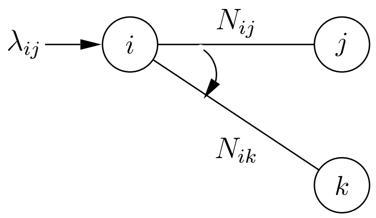
1.5 Organisation de ce document

Les chapitres suivants présentent les techniques permettant de modéliser un réseau à commutation de circuits pour estimer les taux de blocage des appels, le nombre moyens de circuits et la probabilité de blocage de chaque équipement. Nous dirons également un mot sur le dimensionnement des équipements.

Le chapitre 2 est consacré à la modélisation des systèmes élémentaires (les "briques de base") rencontrés dans un réseau téléphonique. On étudiera ainsi la modélisation d'un faisceau de circuits isolé, la modélisation du partage de charge et la modélisation



(a) Partage de charge



(b) Débordement

FIG. 1.4 – *Commandes d'acheminement des appels.*

du débordement d'un faisceau primaire sur un faisceau secondaire.

Le chapitre 3 est consacré à la modélisation d'un réseau téléphonique. On étudiera tout d'abord la solution exacte de type "forme produit" dans le cas simple des réseaux à partage de charge (sans débordement). On étudiera également une approximation numériquement plus viable pour ce type de réseaux.

Les deux derniers chapitres présentent deux approches, la méthode de Wilkinson et la théorie différentielle du trafic, permettant de traiter le cas plus complexe des réseaux utilisant la technique de débordement.

CHAPITRE 2

Etude du trafic dans un faisceau

Nous étudions tout d'abord le cas le plus simple d'un faisceau de circuits de capacité N, puis nous considérerons des situations simples de partage de charge et de débordement.

2.1 Le modèle d'Erlang

Ce modèle repose sur les hypothèses suivantes :

- Les appels arrivent suivant un processus de Poisson de taux λ. Le taux d'arrivée des appels est donc indépendant du nombre d'appels déjà arrivés et la source est infinie (pas de limite sur le nombre d'arrivées).
- L'accessibilité au service du faisceau est totale: un appel entrant peut prendre n'importe quel circuit libre.
- La durée de communication suit une loi exponentielle négative de paramètre μ. La durée moyenne est donc $T = 1/\mu$.
- un régime d'équilibre statistique existe (régime permanent).
- Les appels rejetés par le systeme, par manque de ressources ou blocage, ne sont pas corrélés avec les appels entrants normalement. Ceci veut dire, qu'on ne tient pas compte dans cette modélisation du phénomène de répétitions d'appels qui fait qu'un abonné ayant sa tentative de communication bloquée retente une communication dans les secondes qui suivent. Ces appels répétés seront "mélangés" sans distinction dans le flot d'appels "frais" du processus d'entrée.

Rappelons que :

- l'hypothèse poissonnienne implique des durées inter-arrivées exponentiellement distribuées, et par conséquent que la probabilité d'avoir une arrivée pendant dt est $\lambda\, dt$, indépendamment du temps écoulé depuis la dernière arrivée.

– l'hypothèse de durée d'appel exponentiellement distribuée signifie que la probabilité qu'un appel donné se termine durant dt est égale à $\mu\, dt$ indépendamment du temps de communication déjà écoulé.
– Les durées des appels étant indépendantes entre elles, si k appels sont présents sur le faisceau, la probabilité qu'un de ces appels se termine durant dt est $k\,\mu\, dt$, et la probabilité de plus d'un départ est négligeable.

L'allure générale du trafic dans ce faisceau est représentée sur la figure 2.1. On peut voir que le nombre de circuits occupés évolue aléatoirement au cours du temps, en fonction des arrivées et des terminaisons d'appels. Durant certaines périodes, le faisceau peut être vide, alors qu'à d'autres moments il est saturé (N appels présents). Dans ce dernier cas, tout appel arrivant sera bloqué et perdu. L'objectif de ce paragraphe est de répondre à trois questions élémentaires: quelle est la probabilité de blocage d'un appel ? En moyenne, combien de circuits sont occupés ? Avec quelle variance ?

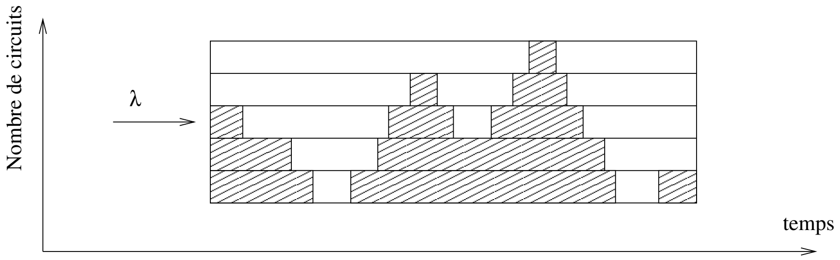


FIG. 2.1 – *Allure du trafic dans un faisceau.*

2.1.1 Probabilité de blocage

Notons $Y = \lambda T$. Cette quantité est appelé le trafic offert au faisceau. C'est un nombre sans dimension dont l'unité est l'Erlang. Notons de plus P_i la probabilité en régime stationnaire qu'il y ait i appels simultanément sur le faisceau.

On suppose des temps inter-arrivées et des durées d'appel exponentiellement distribués. Par conséquent, le nombre i d'appels présents sur le faisceau est régi par un processus (markovien) de naissances et de morts, décrit sur la figure 2.2. Si le système est dans l'état k, le taux d'arrivée d'appels est $\lambda_k = \lambda$ et le taux de départ est $\mu_k = k\,\mu$. En termes de file d'attente, on est en train de traiter le modèle M/M/N/N.

On a vu de manière générale que pour un processus de naissances et de morts, la distribution stationnaire est donnée par $P_i = \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} P_0$, ce qui donne:

$$P_i = \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda}{(k+1)\,\mu} P_0 = \frac{Y^i}{i!} P_0$$

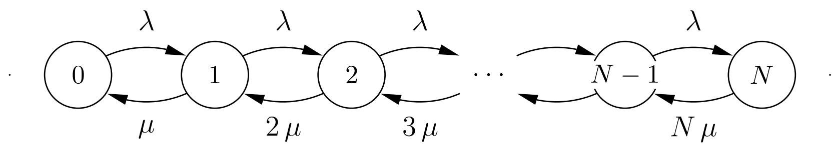


FIG. 2.2 – *Processus de naissances et de morts du modèle d'Erlang.*

La normalisation des probabilités $P_0, \ldots, P_N$ permet d'obtenir le résultat suivant.

Theorème 2.1 *La distribution stationnaire du nombre d'appels dans un faisceau de capacité N est:*

$$P_i = \frac{Y^i/i!}{\sum_{k=0}^{N} Y^k/k!} \quad i = 0 \ldots N \tag{2.1}$$

En particulier, la probabilité de blocage du faisceau permet de retrouver la formule d'Erlang-B bien connue en téléphonie [**?**].

$$P_N = E(N,Y) = \frac{Y^N/N!}{\sum_{k=0}^{N} Y^k/k!} \tag{2.2}$$

$E(N,Y)$ est la probabilité de blocage d'un faisceau de N circuits ayant un trafic offert Y. C'est aussi la probabilité de rejet d'un appel, c'est à dire la probabilité qu'une tentative d'appel échoue par manque de ressources (lorsque tous les circuits sont occupés). On peut montrer qu'en fait la probabilité de blocage ne dépend de la distribution de la durée des appels qu'au travers de sa moyenne.

La fonction d'Erlang-B $E(N,Y)$ est une fonction non linéaire, tracée sur la figure 2.3 en fonction du trafic offert Y pour différentes valeurs de N. Si on considère par exemple le faisceau ayant $N = 20$ circuits, on peut voir que le blocage des appels se produit bien avant que le trafic offert n'atteigne 20 Erlangs. En fait, pour $Y = 20$ Erlangs, on a déjà 16% des appels entrants qui sont rejetés. Ceci est dû à la variabilité des temps inter-arrivées et des durées de communication.

Si on désire une qualité de service (appelée aussi efficacité du faisceau) de 99%, on choisira la capacité N pour avoir une probabilité de blocage de 1%. Une technique permettant de déterminer le nombre de circuits necéssaire pour atteindre ce niveau de service consiste à appliquer la réccurence suivante (démontrer là !),

$$\frac{1}{E(N,Y)} = \frac{N}{Y} \frac{1}{E(N-1,Y)} + 1$$

tant que $100 > 1/E(N,Y)$ en partant de $N = 0$ ($E(0,Y) = 1$). On obtient ainsi la plus petite valeur de N telle que $E(N,Y) < 1\%$. Dans le cas d'un trafic offert de 20 Erlangs, il faut en fait 30 circuits !

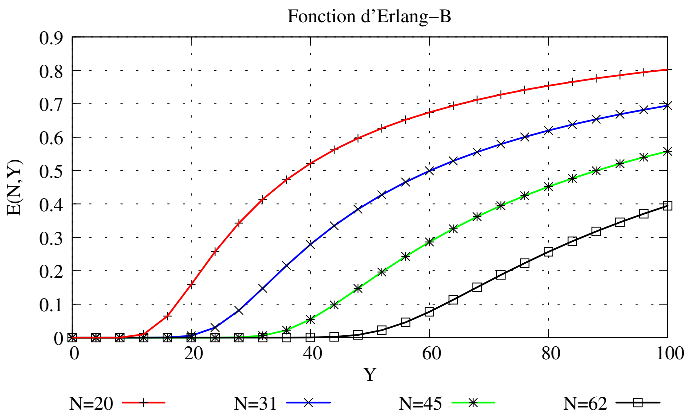


FIG. 2.3 – *Fonction d'Erlang-B.*

2.1.2 Trafic écoulé

L'autre quantité à laquelle on s'intéresse correspond au nombre moyen X de circuits occupés en régime permanent, appelé le trafic écoulé. Par définition,

$$X = \sum_{k=1}^{N} k\, P_k \tag{2.3}$$

On a ainsi,

$$X = \sum_{k=1}^{N} k\, \frac{Y^k}{k!}\, P_0 = Y \sum_{k=1}^{N} \frac{Y^{k-1}}{(k-1)!}\, P_0 = Y \sum_{k=0}^{N-1} P_k = Y\ [1 - P_N]$$

On a donc le théorème fondamental suivant.

Theorème 2.2 *En régime stationnaire, le nombre moyen d'appels dans un faisceau de capacité N est:*

$$X = Y\ [1 - E(N,Y)] \quad \textit{soit} \quad X = Y\ -\ Z \textit{ avec } Z = Y\, E(N,Y) \tag{2.4}$$

Le trafic écoulé (nombre moyen de circuits occupés) correspond donc au trafic offert Y multiplié par la probabilité de non-blocage $(1 - E(N,Y))$. En d'autres termes, le trafic écoulé est donné par le trafic offert Y moins le trafic perdu Z. On peut aussi dire que le trafic offert Y correspond au trafic qui serait écoulé si le faisceau était de capacité infinie.

La figure 2.4 représente le trafic écoulé en fonction du trafic offert pour différentes valeurs de la capacité. On peut constater que pour que le trafic écoulé atteigne la capacité, il faut un trafic offert très grand (théoriquement infini).

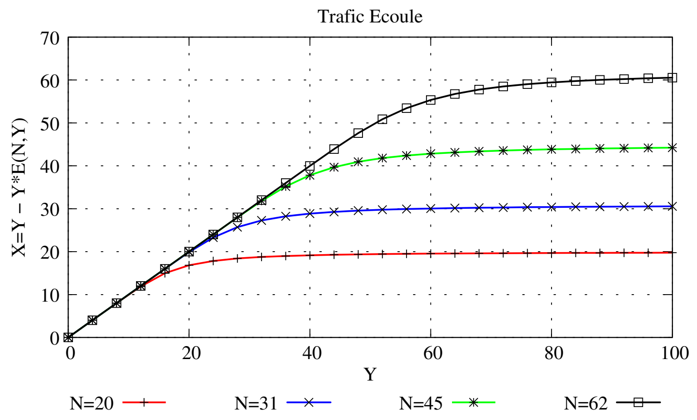


FIG. 2.4 – *Trafic écoulé.*

2.1.3 Variance du trafic écoulé

Le nombre de circuits occupés évolue dans le temps autour de cette moyenne. Avec quelle variabilité ?

Theorème 2.3 *La variance du nombre de circuits occupés dans un faisceau de capacité N est:*

$$V_X = X + YX - N(Y - X) - X^2 \tag{2.5}$$

Par définition, la variance du nombre de circuits occupés est,

$$V_X = \sum_{k=0}^{N} k^2 \, P_k - X^2 \tag{2.6}$$

En développant, on remarque que,

$$\sum_{k=0}^{N} k^2 \, P_k = Y \, \left[\sum_{k=0}^{N-1} P_k + \sum_{k=1}^{N-1} k \, P_k \right] \; = \; Y \; [1 - P_N + X - N P_N]$$

Avec les identités $Y = X(1 - P_N)$ et $Y P_N = Y - X$, on obtient:

$$V_X = X + YX - N(Y - X) - X^2 = X \; - \; (X - N) \, (X - Y)$$

On sait que le trafic écoulé X est toujours plus petit que le nombre de circuits : $X \leq N$. On sait d'autre part que le trafic écoulé est toujours plus petit que le trafic offert : $X \leq Y$. On a donc $(X - N) \, (X - Y) \geq 0$. Ceci conduit aux conclusions suivantes :

– *Le trafic écoulé est sous-variant: $V_X \leq X$; en anglais on parle de "smooth traffic",*

– Le phénomène de blocage écrête le trafic, le lisse et le rend plus régulier que le trafic offert Y qui est poissonien,
– Le trafic n'est plus poissonien (à cause du blocage) dès la traversée d'un faisceau. Il sera proche d'un trafic poissonien si $X \approx Y$, c'est à dire si $E(N,Y) \approx 0$.
– Si le trafic écoulé par un premier faisceau est offert à un second faisceau, en toute rigueur on ne pourra pas étudier le trafic dans le second faisceau comme nous l'avons fait pour le premier faisceau. En effet, son trafic offert ne sera pas poissonien mais sous-variant. Cette approximation pourra toutefois être faite, et conduira a des résultats corrects, dans le cas où les probabilités de blocage sont très petites.

La figure 2.5 représente le rapport V_X/X en fonction du trafic offert Y pour différentes valeurs de la capacité N. On peut constater que la propriété $V_X = X$, caractéristique d'un trafic poissonien, n'est vérifiée que quand $Y << N$. Lorsque Y tend vers l'infini, la variance du nombre de circuits occupés tend vers 0: le faisceau est saturé en permanence.

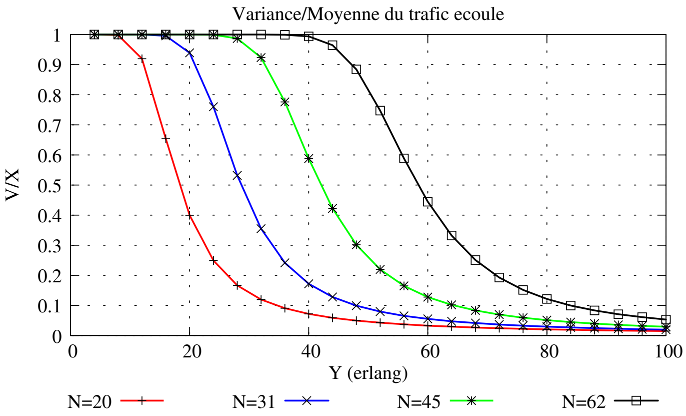


FIG. 2.5 – *Variance/Moyenne du nombre de circuits occupés.*

2.2 Modélisation du partage de charge

Considérons un acheminement par partage de charge tel que celui décrit sur la figure 2.6. Un flot d'appels “frais” arrivent suivant un processus de Poisson au noeud 0 avec un taux de λ appels/s. Un appel est acheminé sur le faisceau $(0,1)$, de capacité N_{01} avec la probabilité α, et sur la faisceau $(0,2)$, de capacité N_{02} avec la probabilité $1-\alpha$.

La probabilité d'acheminement sur un des faisceaux ne dépendant pas de l'état de ces faiceaux, les trafics offerts $Y_{01} = \alpha\, \lambda\, T$ et $Y_{02} = (1-\alpha)\, \lambda\, T$ restent poissoniens.

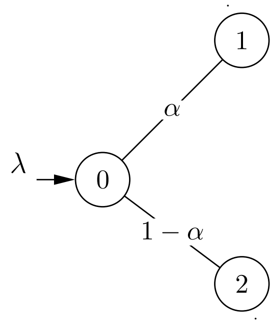


FIG. 2.6 – *Acheminement par partage de charge.*

Par conséquent, les résultats établis dans les paragraphes précédents se généralisent immédiatement :

$$\begin{aligned} P_{N_{0i}} &= E(N_{0i},Y_{0i}) \quad i=1{,}2 \\ X_{0i} &= Y_{0i}\,[1-E(N_{0i},Y_{0i})] \quad i=1{,}2 \\ V_{X_{0i}} &= X_{0i}+Y_{0i}\,X_{0i}-N_{0i}\,(Y_{0i}-X_{0i})-X_{0i}^2 \quad i=1{,}2 \end{aligned}$$

2.3 Modélisation du débordement

On considère une situation d'acheminement par débordement comme illustré sur la figure 2.7. Le noeud 0 reçoit un trafic offert poissonien $Y = \lambda T$. Les appels sont acheminés en premier choix sur le faisceau $(0{,}1)$, de capacité N. Si les N circuits du premier faisceau sont occupés, l'appel est acheminé sur le second faisceau $(0{,}2)$ de capacité S, à condition que ce dernier ait un faisceau libre.

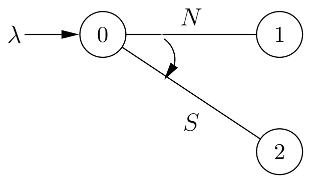


FIG. 2.7 – *Acheminement par débordement.*

On notera $P_{n,s}$ la probabilité que n circuits soient occupés sur le premier faisceau et que s circuits soient occupés sur le second faisceau. Comme précédemment, le système est markovien, avec un diagramme de transition décrit sur la figure 2.8 (avec la notation $\mu_j = j\,\mu$).

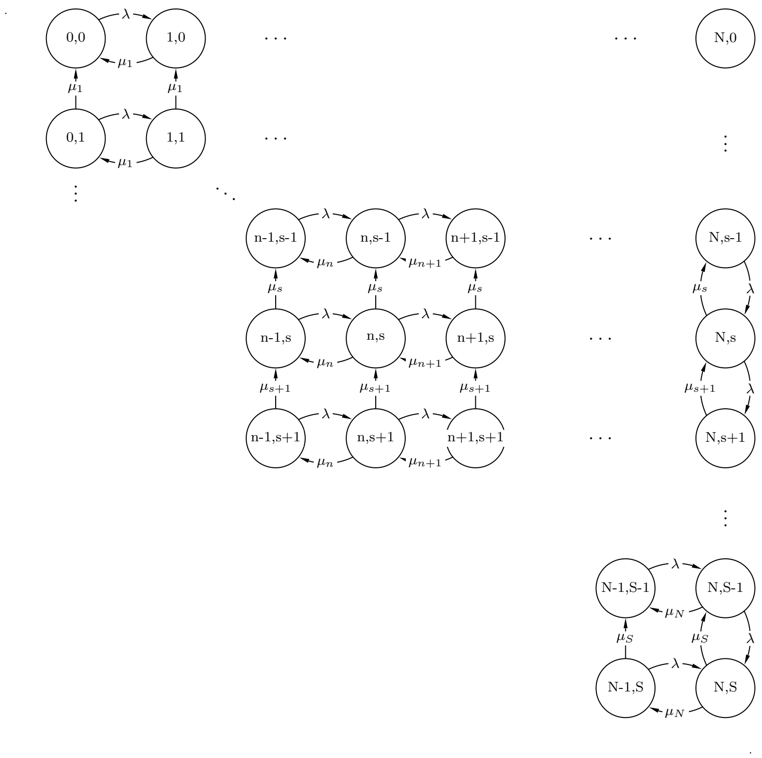


FIG. 2.8 – *Graphe des transitions d'une structure de débordement.*

En construisant la matrice de taux de transitions Q et en résolvant le système à l'état stationnaire, $Q\,P = 0$, on aboutit au système d'équations suivant:

$$\begin{aligned}
P_{0,0}Y - P_{0,1} - P_{1,0} &= 0\\
(Y+n+s)\,P_{n,s} - Y\,P_{n-1,s} - (n+1)\,P_{n+1,s} - (s+1)\,P_{n,s+1} &= 0\\
(Y+N+s)\,P_{N,s} - Y\,P_{N-1,s} - Y\,P_{N,s-1} - (s+1)\,P_{N,s+1} &= 0\\
(N+S)\,P_{N,S} - Y\,P_{N-1,S} - Y\,P_{N,S-1} &= 0
\end{aligned}$$

Nous ne détaillons pas la résolution de ce système mais donnons les principaux résultats ci-dessous.

2.3.1 Probabilités de blocage

Notons:

$$P_{n,.} = \sum_{s=0}^{S} P_{n,s} \quad \text{et} \quad P_{.,s} = \sum_{n=0}^{N} P_{n,s}$$

La probabilité de blocage du premier faisceau est donnée par,

$$P_{N,.} = E(N,Y)$$

La probabilité de blocage de l'ensemble des deux faisceaux est donnée par,

$$P_{N,S} = E(N+S,Y)$$

Autrement dit, malgré son utilisation spécifique des ressources, le système se comporte comme un faisceau équivalent de capacité $N+S$.

Attention, on a $P_{.,S} \neq E(S,Z)$ où $Z = Y\,E(N,Y)$ est le trafic bloqué par le premier faisceau et offert au second. En effet, comme on va le voir, le trafic offert au faisceau de débordement n'est plus poissonien.

2.3.2 Trafics écoulés

Les résultats sont les suivants:

$$\begin{aligned} X_N &= Y\,[1 - E(N,Y)] \\ X_{N+S} &= Y\,[1 - E(N+S,Y)] \\ X_S &= X_{N+S} - X_N = Y\,[E(N,Y) - E(N+S,Y)] \end{aligned}$$

Le trafic écoulé par le premier faisceau est celui qui serait écoulé par un faisceau isolé. Le trafic écoulé par l'ensemble des deux faisceaux est celui qui serait écoulé par un faisceau équivalent de capacité $N+S$. Le trafic écoulé par le second faisceau correspond à la différence des deux, c'est à dire le trafic perdu par le premier faisceau moins le trafic qui serait perdu par un faisceau de capacité $N+S$.

2.3.3 Variance des trafics écoulés

Pour caractériser le trafic débordant du premier faisceau, on fait comme si le second faisceau avait une capacité $S = \infty$. La moyenne du trafic de débordement est,

$$Z = \sum_{s=0}^{\infty} s\,P_{.,s} = Y\,E(N,Y)$$

comme prévu. Sa variance est donnée par,

$$V_Z = \sum_{s=0}^{\infty} s^2\,P_{.,s} - Z^2$$

Après des calculs un peu lourds, on trouve,

$$V_Z = Z\left[1 - Z + \frac{Y}{N+1-X_N}\right]$$

On peut montrer que $V_Z/Z > 1$. Autrement dit, le trafic de débordement n'est plus poissonien : il est survariant. Ceci se comprend aisément, le processus d'arrivée dans le faisceau de débordement étant interrompu dès que des circuits se libèrent sur le premier faisceau.

La variance du trafic écoulé par le faisceau de second choix est donnée par,

$$V_S = X_S \left[1 - X_S + \frac{Y}{N + 1 - Z}\right] - SY\left[1 - E(N+S,Y)\right]$$

Suivant les cas, on pourra avoir $V_S/X_S > 1$ ou $V_S/X_S \leq 1$. En effet, si le blocage sur le second faisceau est faible, le trafic restera survariant. Par contre, si ce faisceau est souvent saturé, cela lissera le trafic qui deviendra alors sous-variant.

CHAPITRE 3

Réseaux à routage indépendant de l'état

On cherche à modéliser la QoS (Quality of Service) des flux d'appels dans les réseaux téléphoniques d'opérateurs ; qu'il s'agisse de réseaux fixes ou mobiles. Dans ce dernier cas on ne s'intéresse pas à la partie radio entre le poste GSM appelant ou appelé mais à la partie fixe qui véhicule l'appel dans tous les cas. La QoS reflète la probabilité de blocage de bout en bout des flux de trafic (probabilité de blocage). On parle souvent en téléphonie de GoS (Grade of Service) à la place de QoS.

L'acheminement, souvent complexe dans un réseau réel va créer de multiples chemin pour un flux et un couplage extrêmement complexe entre les différents flux et les différentes ressources utilisées. Ce couplage conduit à des processus qui ne sont plus Poissoniens sur les faisceaux avec pour conséquence une difficulté théorique à estimer le trafic écoulé par les faisceaux, les probabilités de blocage et surtout la QoS des flux.

Avec les hypothèses classiques de lois d'arrivée et de service exponentielles (valables pour des grands réseaux), une description rigoureuse de l'état d'un réseau à commutation de circuits est donnée par une chaîne de Markov. Bien que de telles hypothèses soient bien vérifiées en pratique, une telle modélisation ne peut malheureusement pas être utilisée à cause du nombre d'états qu'il est nécessaire de considérer dans un réseau réel.

Un cas toutefois semblerait intéressant : lorsque la commande ne dépend pas de l'état, c'est à dire le cas d'un réseau où tous les flux sont routés par partage de charge. On va voir dans ce chapitre que l'analyse de ce type de réseaux est beaucoup plus simple et qu'il est possible d'obtenir des résultats théoriques et des méthodes numériques efficaces dans ce cas. Les chapitres suivants traiteront de réseaux téléphoniques plus réalistes utilisant des techniques d'acheminement complexes, combinant différents types de débordement et du partage de charge.

Ce chapitre considère donc le cas des réseaux à partage de charge pour lesquels une solution du type forme produit existe. Cette solution théorique n'étant pas numériquement calculable, on montre qu'en utilisant une approximation d'indépendance des probabilités de blocage, une technnique de point fixe peut être utilisée pour calculer la distribution stationnaire.

3.1 Les réseaux à monoroutage

On considère ici un réseau constitué de J liens de communication, indicés $j = 1,2,\ldots,J$. Le lien j a une capacité de C_j circuits. Ce réseau achemine des appels téléphoniques. On suppose qu'en fonction de son origine et de sa destination, chaque appel peut être acheminé sur une seule route r. Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des routes que peuvent prendre les appels dans le réseau. On définit de plus la matrice $A = [a_{i,j}]_{j \le J, r \in \mathcal{R}}$ de la façon suivante:

$$a_{jr} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, $a_{jr} = 1$ si la route r passe par le lien j. Quand un appel arrive sur la route r on sait ainsi que a_{jr} circuits sont réservés sur le lien j: soit 0 si $j \notin r$, soit 1 sinon.

On suppose que les appels arrivent sur chaque route r suivant un processus de Poisson de taux λ_r. Les arrivées d'appels sur chaque route sont indépendants. Un appel arrivant sur la route r est bloqué et perdu si au moins sur un des liens $j = 1,\ldots,J$ il y a moisn de a_{jr} circuits. Si l'appel est admis, il a une durée aléatoire exponentiellement distribuée de moyenne $1/\mu$ (indépendante des dates d'arrivées des autres appels et de leurs durées). Durant cette période, a_{jr} circuits sont réservés pour cet appel sur chaque lien j.

Soit $n_r(t)$ le nombre d'appels en cours au temps t sur la route r. Définissons les vecteurs $n(t) = [n_r(t)]_{r \in \mathcal{R}}$ et $C = [C_1,C_2,\ldots,C_J]$.

Le processus stochastique $(n(t))_{t \ge 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu et dont l'espace d'états discret $\mathcal{S}$ est défini par,

$$\mathcal{S}(C) = \left\{ n \in \mathbb{Z}_+^{\mathcal{R}} \mid A\, n \le C \right\}$$

La condition $A\, n \le C$ est en fait équivalente à,

$$\sum_{r \in \mathcal{R}} a_{jr}\, n_r \le C_j \quad \forall j = 1,\ldots,J$$

La chaîne de Markov $(n(t))_{t \geq 0}$ admet une distribution stationnaire unique $\pi(n) = P[n(t) = n]$ qui est solution des équations d'équilibre global suivantes,

$$\pi(n)\, Y_r = \pi(n + e_r)\, (n_r + 1) \quad n, n_r \in \mathcal{S}(C)$$

où $Y_r = \lambda_r / \mu$ est le trafic offert et $e_r = [0,0,\ldots,1,0,\ldots]$ (le 1 est en position r) est le vecteur canonique décrivant un appel en cours sur la route r.

La résolution de ces équations conduit à la solution suivante,

$$\pi(n) = \frac{1}{G(C)} \prod_{r \in \mathcal{R}} \frac{Y_r^{n_r}}{n_r!} \quad n \in \mathcal{S}(C)$$

où $G(C)$ est la constante de normalisation,

$$G(C) = \left(\sum_{n \in \mathcal{S}(C)} \prod_{r \in \mathcal{R}} \frac{Y_r^{n_r}}{n_r!} \right)$$

Cette solution particulièrement simple est du type "forme produit": la probabilité (non normalisée) d'avoir n_r appels sur la route r est donnée par $Y_r^{n_r} / n_r!$ et la probabilité de l'état $(n_{r1}, n_{r2}, ldots)$ est le produit de ces probabilités individuelles.

La probabilité de blocage L_r des appels acheminés sur la route r est obtenue par la formule suivante:

$$1 - L_r = \sum_{n \in \mathcal{S}(C - Ae_r)} \pi(n) = \frac{G(C - Ae_r)}{G(C)}$$

3.1.1 Exemple

Pour illustrer les résultats précédents, considérons l'exemple de la figure 3.1. Il y a 3 flots d'appels: le premier de 1 vers 3 de trafic offert $Y_{13} = 0.1$, le second de 1 vers 2 de trafic offert $Y_{12} = 1.0$ et le dernier de 2 vers 3 de trafic offert $Y_{23} = 0.7$. Les liens $(1{,}2)$ et $(2{,}3)$ ont la même capacité: 2 circuits.

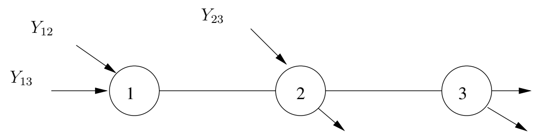


FIG. 3.1 – *Application de la forme produit.*

Les appels du flot $1 \to 3$ prennent la route $r_1 = (1{,}2{,}3)$. Ceux du flot $1 \to 2$ prennent la route $r_2 = (1{,}2)$, et ceux du flot $2 \to 3$ prennent la route $r_3 = (2{,}3)$. L'état du système est donc décrit par le vecteur $[n_1,n_2,n_3]$ précisant le nombre d'appels en cours sur chaque route. Les contraintes sur n_1, n_2 et n_3 sont les suivantes:

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &\leq 2 \\ n_1 + n_3 &\leq 2 \end{aligned}$$

La première contrainte exprime que le nombre d'appels sur le lien $(1,2)$, des flots $1 \rightarrow 3$ et $1 \rightarrow 2$, doit être inférieur ou égal à la capacité 2 de ce lien. De même pour le lien $(1,3)$ qui achemine des appels des flots $1 \rightarrow 3$ et $2 \rightarrow 3$.

L'énumération des états possibles montre qu'il y a en fait 14 états respectant les contraintes. On commence par calculer les probabilités non normalisés $q(n_1,n_2,n_3)$ de la façon suivante :

$$q(n_1,n_2,n_3) = \frac{Y_{13}^{n_1}}{n_1!}\frac{Y_{12}^{n_2}}{n_2!}\frac{Y_{23}^{n_3}}{n_3!}$$

On obtient le résultat suivant :

$q(0,0,0)$ = 1	$q(0,0,1)$ = 0.7	$q(0,0,2)$ = 0.245	$q(0,1,0)$ = 1
$q(0,1,1)$ = 0.7	$q(0,1,2)$ = 0.245	$q(0,2,0)$ = 0.5	$q(0,2,1)$ = 0.35
$q(0,2,2)$ = 0.1225	$q(1,0,0)$ = 0.1	$q(1,0,1)$ = 0.07	$q(1,1,0)$ = 0.1
$q(1,1,1)$ = 0.07	$q(2,0,0)$ = 0.005		

Le terme normalisateur G est donné par,

$$G = \sum_{\substack{n_1 + n_2 \leq 2 \\ n_1 + n_3 \leq 2}} q(n_1,n_2,n_3)$$

Le calcul de ce terme donne $G = 5.2075$. On en déduit la probabilité individuelle de chaque état:

$\pi(0,0,0)$ = 0.192	$\pi(0,0,1)$ = 0.134	$\pi(0,0,2)$ = 0.047	$\pi(0,1,0)$ = 0.192
$\pi(0,1,1)$ = 0.134	$\pi(0,1,2)$ = 0.047	$\pi(0,2,0)$ = 0.096	$\pi(0,2,1)$ = 0.067
$\pi(0,2,2)$ = 0.023	$\pi(1,0,0)$ = 0.019	$\pi(1,0,1)$ = 0.013	$\pi(1,1,0)$ = 0.019
$\pi(1,1,1)$ = 0.013	$\pi(2,0,0)$ = 0.001		

La probabilité de non blocage du flot d'appels $1 \rightarrow 3$ est obtenue en sommant sur les états tels que $n1 + n_2 < 2$ et $n_1 + n_3 < 2$, soit,

$$\begin{aligned} 1 - L_1 &= \pi(0,0,0) + \pi(0,0,1) + \pi(0,1,0) \\ &\quad + \pi(0,1,1) + \pi(1,0,0) \end{aligned}$$

, ce qui donne $L_1 = 36.58$ %. De la même façon, on obtient un taux de blocage des flux $1 \rightarrow 2$ et $2 \rightarrow 3$ égaux respectivement à 22.04 % et 14.55 %.

3.2 Réseaux à partage de charge

Les résultats précédents s'étendent immédiatement au cas des réseaux utilisant du partage de charge. En effet, le routage par partage de charge est indépendant de l'état du réseau. Il suffit donc d'analyser l'ensemble des routes pour chaque trafic, le trafic sur chaque route restant poissonien. Illustrons ceci par un exemple.

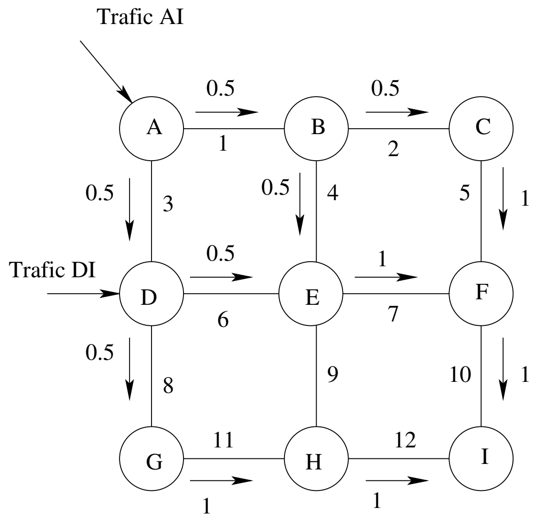


FIG. 3.2 – *Réseau utilisant le partage de charge.*

Considérons le réseau sur la figure 3.2. Ce réseau comporte 9 noeuds de commutation, A,B, . . . ,I, et 12 liens dont les indices sont indiqués sur la figure. Le réseau doit acheminer deux flots d'appels: l'un de A vers I, de trafic offert Y^{AI}, et l'autre de D vers I de trafic offert Y^{DI}. Les commandes de partage de charge pour la destination I sont indiquées sur la figure. Ainsi par exemple on a $\alpha_1^I = 0.5$ et $\alpha_3^I = 0.5$, ce qui signifie qu'au noeud A la moitié des appels à destination de I sont acheminés sur le lien 1 (vers B) et l'autre moitié sur le lien 3 (vers D).

Le trafic AI a 4 routes, et chacune reçoit un quart du trafic:

$$\begin{aligned}
r_1 &= (1{,}2{,}5{,}10) \quad Y_{r1} = 0.25\,Y^{AI} \\
r_2 &= (1{,}4{,}7{,}10) \quad Y_{r2} = 0.25\,Y^{AI} \\
r_3 &= (3{,}6{,}7{,}10) \quad Y_{r3} = 0.25\,Y^{AI} \\
r_4 &= (3{,}8{,}11{,}12) \quad Y_{r4} = 0.25\,Y^{AI}
\end{aligned}$$

Le trafic DI a 2 routes, et chacune reçoit la moitié du trafic:

$$\begin{aligned} r_5 &= (6{,}7{,}10) \quad Y_{r5} = 0.5\,Y^{DI} \\ r_6 &= (8{,}11{,}12) \quad Y_{r6} = 0.5\,Y^{DI} \end{aligned}$$

L'état du système correspond donc au vecteur $(n_{r_1},\ldots,n_{r_6})$. Si on suppose que tous les liens ont la même capacité C, l'espace d'états est donné par $0 \leq n_{r_i} \leq C$ avec les contraintes supplémentaires (en supprimant celles qui sont redondantes),

$$\begin{aligned} n_{r_3} + n_{r_4} &\leq C \\ n_{r_4} + n_{r_6} &\leq C \\ n_{r_1} + n_{r_2} + n_{r_3} + n_{r_5} &\leq C \end{aligned}$$

On voit donc que cet exemple peut être traité comme expliqué précédemment en décomposant les trafics sur les différentes routes qu'ils peuvent emprunter. Evidemment, le calcul de la probabilité de blocage doit tenir compte du poids de chaque route.

3.3 Limites de la forme produit

Les formules obtenues précédemment semblent très séduisantes mais sont difficilement utilisables en pratique. En effet, en dehors du cas de très petits réseaux, le calcul direct de G n'est par réalisable car le nombre de routes $|\mathcal{R}|$ augmente exponentiellement en fonction du nombre de noeuds et de liens.

Considérons le cas le plus simple où le réseau est complétement maillé. Dans ce cas, chaque route correspond à un seul lien et il n'y a pas de couplage. La taille de l'espace d'états est alors $|\mathcal{S}(C)| = \prod_{j=1}^{J} C_j$ (i.e. 31^{10} s'il y a 10 liens ayant tous une capacité de 31).

De la même façon, si on reprend l'exemple de la figure 3.1, mais cette fois ci avec des capacités de 31 circuits pour les deux liens, le nombre d'états admissibles grimpe à 11440 !

On voit bien que la taille de l'espace d'états devient rapidement monumentale et qu'il est impossible de calculer la probabilité de chaque état. Ainsi, une approche opérationnelle pour de grands réseau ne peut passer par une modélisation Markovienne. Bien que la forme produit donne une forme analytique à la solution, elle reste inutilisable pour de grands réseaux.

3.4 Approximation d'indépendance des probabilités de blocage

En ce qui concerne la probabilité de blocage sur un chemin, on fait en général l'hypothèse (qui est en fait une approximation) d'indépendance des probabilités de blocage des faisceaux pris deux à deux en série dans un réseau. Considérons l'exemple de la figure 3.3.

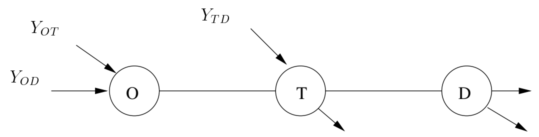


FIG. 3.3 – *Approximation d'indépendance des probabilités de blocage.*

Le noeud O reçoit du trafic Y_{OT} à destination d'autres noeuds du réseau; une partie de ce trafic passe par les faisceaux OT et TD, alors qu'une autre bifurque en T. De même, le noeud T reçoit du trafic Y_{TD} qui va emprunter le faisceau TD puis d'autres liens du réseau.

Le trafic Y_{OD} qui nous intéresse est celui qui a son origine en O et pour destination D ; il emprunte les faisceaux OT et TD.

Notons N_{OT} et N_{TD} les capacités respectives des deux faisceaux. Notons de plus n_{OT} et n_{TD} le nombre d'appels en cours sur chacun des deux faisceaux. La probabilité que le trafic Y_{OD} ne soit pas bloqué est donnée par,

$$(1 - b_{OD}) = P\left[n_{OT} < N_{OT} \text{ et } n_{TD} < N_{TD}\right]$$

Supposons alors que:

- les trafics Y_{OT} et Y_{TD} sont importants par rapport à Y_{OD},
- tous les appels du flot Y_{OT} sortent en T (ils ne passent pas sur TD)

Dans ce cas, on voit que le seul couplage entre n_{OT} et n_{TD} vient du trafic Y_{OD}. Comme on suppose que ce trafic est faible par rapport aux autres, les variables aléatoires n_{OT} et n_{TD} sont faiblement couplées: on peut les considérer indépendantes. De manière générale, si le nombre d'appels acheminés à la fois sur OT et TD est faible par rapport aux nombres d'appels ne passant que sur OT ou que sur TD, on pourra considérer que n_{OT} et n_{TD} sont indépendantes.

En utilisant cette approximation, la probabilité de non blocage du flot d'appels Y_{OD} devient,

$$(1 - b_{OD}) \approx P\left[n_{OT} < N_{OT}\right] \, . \, P\left[n_{TD} < N_{TD}\right]$$

soit,

$$(1 - b_{OD}) \approx (1 - P[n_{OT} = N_{OT}]) \ . \ (1 - P[n_{TD} = N_{TD}])$$

Autrement dit, la probabilité qu'un appel du flot Y_{OD} ne soit pas bloqué sur le chemin $O \rightarrow T \rightarrow D$ s'écrit comme le produit des probabilités de non blocage des faisceaux OT et TD.

Attention, cette remarque serait fausse, malgré l'importance relative des trafics Y_{OT} et Y_{TD}, si tous ces trafics empruntaient les deux faisceaux OT et TD, car il y aurait couplage total entre ces deux faisceaux.

L'hypothèse d'indépendance des probabilités de blocage est fondamentale dans le sens où elle est utilisée par toutes les méthodes d'évaluation des performances des réseaux téléphoniques, et en particulier les méthodes que nous allons voir dans le reste du cours. L'expérience montre que cette hypothèse est assez bien vérifiée pour des réseaux téléphoniques réels dans lesquels on a un "mélange" de trafic important sur chaque lien.

3.4.1 Exemple

Considérons de nouveau l'exemple de la figure 3.1. Considérons tout d'abord les valeurs numériques suivantes : $Y_{13} = 1.0$, $Y_{12} = 5.0$, $Y_{23} = 4.0$, $C_{12} = 10$ et $C_{23} = 10$. En utilisant la solution exacte fournie par la forme produit, on détermine que les probabilités de blocage des flux $1 \rightarrow 3$, $1 \rightarrow 2$ et $2 \rightarrow 3$ sont respectivement égales à $L_1 = 5.99$ %, $L_2 = 4.25$ % et $L_3 = 1.74$ %. On a ainsi,

$$1 - L_1 = 0.9401 \quad \text{à comparer avec,} \quad (1 - L_2)(1 - L_3) = 0.9408$$

On voit que dans ce cas l'hypothèse d'indépendance des probabilités de blocage donne un bon résultats. Si par contre on augmente le trafic offert du flot $1 \rightarrow 3$ en prenant $Y_{13} = 3.0$, on obtient:

$$(1 - L_1) = 0.823506 \quad \text{à comparer avec,} \quad (1 - L_2)(1 - L_3) = 0.830703$$

Dans ce cas, l'approximation est plus grossière car le trafic $Y_{13} = 3.0$ devient significatif par rapport aux trafics $Y_{12} = 5.0$, $Y_{23} = 4.0$, induisant ainsi un couplage plus fort du nombre d'appels sur les deux faisceaux.

3.5 La méthode du point fixe d'Erlang

Cette méthode permet de calculer une approximation des probabilités de blocage et des trafics écoulés pour des réseaux à routage indépendant de l'état.

Comme précédemment, on considère un réseau constitué de J liens de communication $j = 1,2,\ldots,J$ de capacité C_j circuits. Soit E_j la probabilité de blocage du lien

j. Chaque appel peut être acheminé sur une seule route r. On note Y_r le trafic offert sur chaque route r.

Partant de probabilité de blocage $E_j = 0$ pour chaque lien $j = 1,2,\ldots,J$, la méthode du point fixe d'Erlang consiste à itérer sur les étapes suivantes :

1. Calcul du trafic offert ρ_j à chaque lien $j = 1,2,\ldots,J$:

$$\rho_j = \sum_{r:\, j\in r} Y_r \prod_{i\in r-\{j\}} (1 - E_i)$$

2. Calcul de la probabilité de blocage de chaque lien $j = 1,2,\ldots,J$:

$$E_j = E\,(C_j,\rho_j)$$

Analysons la première équation. Pour une route r passant par le lien j, le terme $Y_r \prod_{i\in r-\{j\}} (1 - E_i)$ représente le traffic offert de la route r qui n'est pas bloqué par les autres liens $i \neq j$ du chemin. En sommant sur toutes les routes r passant par j, on obtient bien une approximation du trafic offert au lien j. C'est seulement une approximation car on utilise ici l'hypothèse d'indépendance des probabilités de blocage.

La seconde équation consiste à utiliser la formule d'Erlang pour mettre à jour la probabilité de blocage E_j du lien j connaissant sa capacité C_j et le trafic qui lui est offert ρ_j.

Ainsi, la première itération consiste à propager les trafics Y_r sur l'ensemble des routes, en supposant qu'il n'y a pas de blocage, pour en déduire le trafic offert à chaque lien. Ceci permet de mettre à jour les probabilités de blocage. L'itération suivante va de nouveau propager les trafics offerts pour calculer un trafic offert (plus faible) au lien j qui tienne compte des blocages en amont et en aval sur chaque route, etc.

On peut montrer que cet algorithme de point fixe converge vers une solution unique, qui donne une approximation assez précise de la probabilité de blocage E_j de chaque lien si l'hypothèse d'indépendance des probabilités de blocage est bien vérifiée.

On en déduit alors le trafic écoulé X_j par le lien $j = 1,2,\ldots,J$,

$$X_j \approx \rho_j\ (1 - E_j)$$

De même, la probabilité de blocage L_r des appels sur la route r est donnée par,

$$1 - L_r \approx \prod_{j\in r} (1 - E_j)$$

et la trafic écoulé sur cette route est égal à $Y_r\,(1 - L_r)$.

3.5.1 Exemple

De nouveau, on reprend l'exemple de la figure 3.1 avec les valeurs numériques $Y_{13} = 1.0$, $Y_{12} = 5.0$, $Y_{23} = 4.0$, $C_{12} = 10$ et $C_{23} = 10$. On a vu précédemment que dans ce cas, les valeurs exactes des probabilités de blocage des flux $1 \rightarrow 3$, $1 \rightarrow 2$ et $2 \rightarrow 3$ sont respectivement $L_1 = 5.99$ %, $L_2 = 4.25$ % et $L_3 = 1.74$ %.

On a également pu vérifier que l'hypothèse d'indépendance des probabilités de blocage était assez bien vérifiée. Appliquons l'algorithme du point fixe d'Erlang. Il s'agit d'itérer sur les étapes suivantes:

1. $\rho_{12} = Y_{12} + Y_{13}\,(1 - E_{23})$
2. $\rho_{23} = Y_{23} + Y_{13}\,(1 - E_{12})$
3. $E_{12} = E(C_{12}, \rho_1 2)$
4. $E_{23} = E(C_{23}, \rho_{23})$

en partant de $E_{12} = E_{23} = 0$. Numériquement, cela donne:

Itération	E_{12}	E_{23}
1	0.0431418	0.0183846
2	0.0425807	0.017588
3	0.042605	0.0175983
4	0.0426047	0.0175978
5	0.0426047	0.0175978

L'algorithme converge donc très rapidement puisqu'au bout de 5 itérations, les valeurs de E_{12} et E_{23} ne changent plus à 7 décimales près. On obtient alors les valeurs des trafics écoulés par les deux faisceaux: $X_{12} = 5.73$ et $X_{23} = 4.87$. De même, on peut calculer les probabilités de blocage de bout-en-bout des appels:

$$L_1 = 1 - (1 - E_{12})(1 - E_{23}) = 5.94\% \quad L_2 = E_{12} = 4.26\% \quad L_3 = E_{23} = 1.76\%$$

On peut constater que les valeurs obtenues sont assez proches des valeurs exactes calculées avec la forme produit.

CHAPITRE 4

Méthode du faisceau équivalent de Wilkinson

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'une approche opérationnelle pour de grands réseaux ne peut passer par une modélisation Markovienne. Bien que la forme produit donne une forme analytique à la solution, elle reste inutilisable pour de grands réseaux. Lorsque l'hypothèse d'indépendance des probabilités de blocage est bien vérifiée, ce qui est en général le cas pour de grands réseaux, la méthode du point fixe d'Erlang apporte une solution numérique efficace. Malheureusement, cette méthode ne permet pas de traiter le cas des réseaux téléphoniques réels qui utilisent des techniques d'acheminement complexes, combinant différents types de débordement et du partage de charge

C'est le but de ce qu'il est convenu d'appeler la théorie du télétrafic que de fournir des méthodes d'évaluation de performance de ces réseaux. Les paramètres évalués sont principalement la moyenne et la variance des trafics écoulés ainsi que les probabilités de blocage des noeuds et faisceaux du réseau.

Dans ce chapitre, on considère le cas complexe des réseaux utilisant à la fois l'acheminiment par partage de charge et le débordement hiérarchique. Nous décrivons la méthode du faisceau équivalent de Wilkinson, aussi connue sous le nom de méthode ERT (Equivalent Random Trafic). Cette méthode, qui fait intervenir les deux premiers moments des processus téléphoniques, est applicable aux réseaux ayant une architecture et un acheminement hiérarchique. Elle a été utilisée pour concevoir et dimensionner les réseaux téléphoniques des opérateurs historiques des grands pays occidentaux.

4.1 Méthode pour les trafics survariants

La méthode de Wilkinson s'applique aux trafics survariants provenant du débordement et pour des réseaux utilisant le débordement hiérarchique. Le principe de cette technique d'acheminement est illustré sur la figure 4.1. Le faisceau AX reçoit non seulement du trafic offert direct λ_{AX}, mais également le trafic débordé par les faisceaux AB, AC et AD.

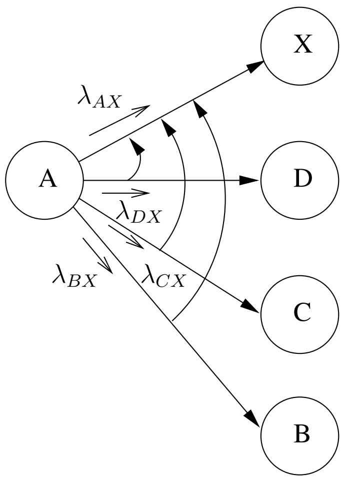


FIG. 4.1 – *Débordement hiérarchique: le faisceau AX reçoit du trafic direct et tous les trafics débordés par les faisceaux AB, AC et AD..*

Le processus combiné sur le faisceau AX est extrêmement complexe. Pour comprendre cela il suffit de se rappeler la complexité du simple débordement avec un seul trafic débordant du faisceau de premier choix sur le faisceau de second choix.

La méthode du faisceau équivalent de Wilkinson va fournir une approximation à ce problème en essayant de se ramener (justement) au cas que l'on connaît du débordement d'un seul flux.

On considère le cas général décrit sur la figure 4.2 et on note :

- $i = 1 \ldots I$ les I faisceaux de premier choix qui débordent sur le faisceau d'indice 0,
- N_i la capacité du faisceau i et N_0 celle du faisceau commun de deuxième choix,
- X_i le trafic écoulé par les faisceaux i et X_0 le trafic écoulé par le faisceau commun de deuxième choix,
- Z_i et Vz_i la moyenne et la variance du trafic débordé par les faisceau d'indice i.

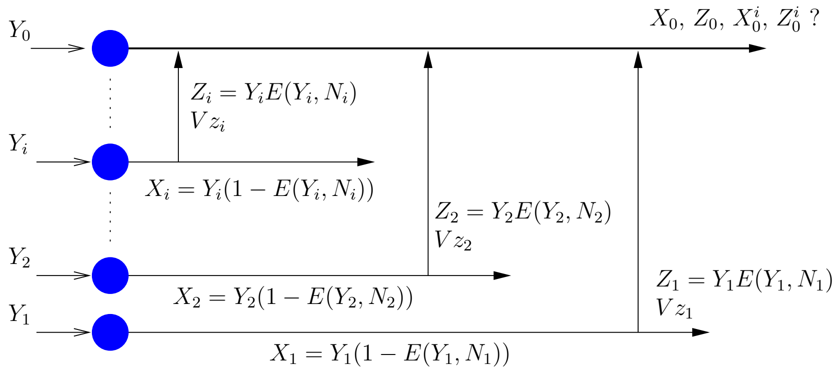


FIG. 4.2 – *Débordement hiérarchique de I faisceaux sur le faisceau de second choix 0.*

L'objectif est de déterminer le trafic total écoulé X_0 sur le faisceau de deuxième choix 0, le trafic total perdu Z_0 par ce faisceau, et pour chaque flux i, le trafic écoulé $X0_i$ sur le faisceau 0 par ce flux et le trafic $Z0_i$ perdu par ce flux après débordement. L'idée de la méthode repose sur l'indépendance des processus et sur la recherche d'un système équivalent.

Les trafics offerts Y_i aux faisceaux i sont indépendants et poissoniens. On peut donc calculer le trafic écoulé X_i et le trafic débordé Z_i par chacun de ces faisceaux avec la formule d'Erlang-B. Notons que les trafic Zi sont indépendants.

Regardons maintenant le problème complexe du faisceau de débordement 0. Ce faisceau a un trafic offert Poissonien direct de valeur Y_0. Cependant s'ajoutent à ce trafic tous les trafics Z_i débordés par les I faisceaux de premier choix. Le trafic total offert au faisceau 0 n'est plus Poissonien. Sa moyenne Z est donnée par,

$$Z = Y_0 + \sum_{i=1}^{I} Z_i$$

Les trafics de débordement sont indépendants entre eux et indépendants du trafic direct Y_0. Par conséquent, leurs variances s'ajoutent et on a ainsi la variance du trafic offert au faisceau de débordement,

$$V_Z = Y_0 + \sum_{i=1}^{I} Vz_i = Y_0 + \sum_{i=1}^{I} Z_i \left(1 - Y_i + \frac{Y_i}{1 + N_i + Z_i - Y_i}\right)$$

On sait que les trafics de débordement sont sur-variants. On a donc $Vz_i > Z_i$ pour $i = 1 \ldots I$. Le trafic agrégé offert au faisceau 0 est donc tel que :

$$Vz > Z$$

Ce trafic agrégé étant survariant, on peut supposer qu'il viendrait d'un faisceau unique (fictif) de premier choix ayant une capacité N^* et un trafic offert Y^*. L'idée est décrite sur la figure 4.3.

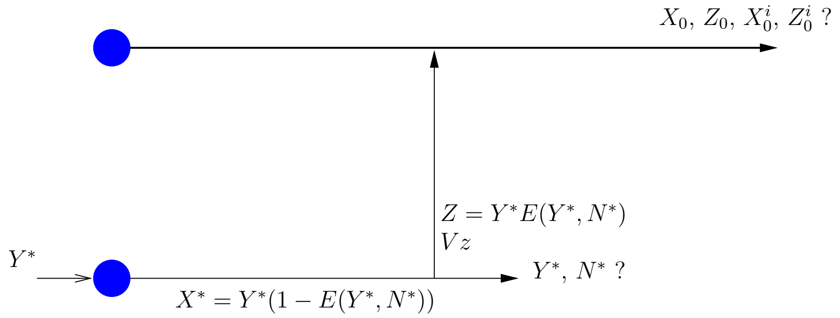


FIG. 4.3 – *Faisceau équivalent débordant un trafic de moyenne Z et de variance Vz.*

Pour trouver le FAISCEAU EQUIVALENT, on doit donc résoudre un système mixte (variable entière : la capacité, et variable réelle : le trafic offert) de deux équations non-linéaires à deux inconnues ; ce système est donné par :

$$\begin{aligned} Z &= Y^* \, E(Y^*,N^*) \\ Vz &= Z \left(1 - Y^* + \frac{Y^*}{1 + N^* + Z - Y^*}\right) \end{aligned}$$

Il existe toujours une solution à ce système avec des valeurs de N^* non entière, ou une solution approximant très bien ce système avec N^* entier. Une approximation analytique en général précise a été proposée par Y. Rapp :

$$\begin{aligned} N^* &\approx Y^* \frac{Z + Vz/Z}{Z - 1 + Vz/Z} - Z - 1 \\ Y^* &\approx Vz + 3\,\frac{Vz}{Z}\left(\frac{Vz}{Z} - 1\right) \end{aligned}$$

Supposons connues les valeurs de N^* et Y^*. On en déduit immédiatement le trafic écoulé et le trafic perdu par le faisceau 0 :

$$\begin{aligned} X_0 &= Y^* \, (E(Y^*,N^*) \; - \; E(Y^*,N^* + N_0)) \\ Z_0 &= Y^* \, E(Y^*,N^* + N_0) \end{aligned}$$

Les valeurs des pertes individuelles de chacun des flux $Z0_i$, $i = 0 \ldots I$, sont un peu plus délicates à évaluer et vont reposer sur une approche indirecte. Tout d'abord, on peut être sûrs que la perte totale est bien la somme des pertes individuelles des flux :

$$Z_0 = \sum_{i=0}^{I} Z0_i$$

L'expérience montre que la probabilité de blocage $P0_i$ des flux de débordement est proportionnelle au facteur de pointe Vz_i/Z_i ; en notant C ce coefficient de proportionnalité, on a donc :

$$P0_i \approx C\,\frac{Vz_i}{Z_i} \quad \text{et} \quad Z0_i = P0_i\,Z_i = C\,Vz_i$$

Ce qui donne :

$$Z_0 = \sum_{i=0}^{I} Z0_i = C\,\sum_{i=0}^{I} Vz_i = C\,Vz$$

On en déduit que $C = Z_0/Vz$, et donc le trafic perdu par chacun des flux $i = 0 \ldots I$:

$$Z0_i = Z_0\,\frac{Vz_i}{Vz}$$

Finalement, le trafic écoulé sur le faisceau de deuxième choix pour chacun des flux est donné par :

$$X0_i = Z_i - Z0_i \quad i = 0 \ldots I$$

4.2 Méthode pour les trafics sousvariants

Cette méthode s'applique aux trafics sousvariants provenant de l'écoulement du trafic (liens en série sur un réseau) et pour des réseaux utilisant le partage de charge comme technique d'acheminement.

Il n'y a pas de couplage entre les faisceaux comme dans le cas du débordement. Le couplage va être introduit par la mise en place de liens en série.

Pour étudier la méthode du faisceau équivalent pour les trafics sousvariants, étudions l'exemple de base décrit sur la figure 4.4. Chaque faisceau $i-0$, pour $i = 1, \ldots, I$, a une capacité N_i et se voit offrir un trafic Y_{iX} à destination du noeud X. Le faisceau $0-X$ dispose de N_0 circuits. Il reçoit l'agrégation des trafics écoulés par les faisceaux $i = 1, \ldots, I$, ainsi que du trafic direct poissonnien Y_{0X} à destination de X.

L'objectif est de déterminer les caractéristiques (moyenne X et variance V) du trafic total écoulé par le faisceau $0-X$, ainsi que le trafic perdu Z par ce faisceau. On veut également savoir quels sont les caractéristiques (moyenne X_i et variance V_i) du trafic écoulé par chaque flux i.

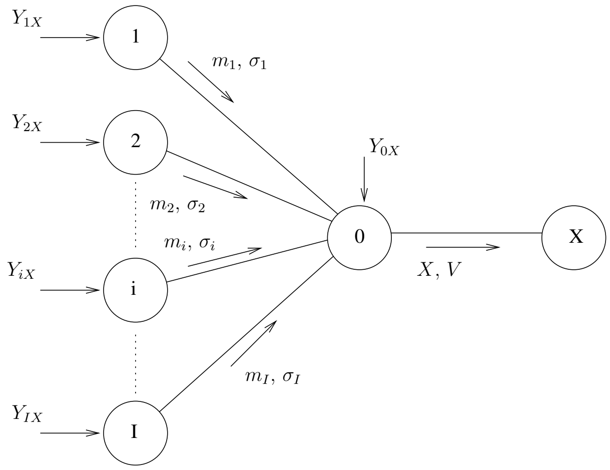


FIG. 4.4 – *Les faisceaux* $1,2,\ldots,i,\ldots,I$ *reçoivent du trafic poissonien qui se mélangent sur le lien 0.*

On sait calculer la moyenne et la varianc du trafic qui serait écoulé sur les faisceaux $i = 1,\ldots,I$ s'il n'y avait pas de blocage sur $0 - X$:

$$\begin{aligned} m_i &= Y_{iX}\ (1\ -\ E(Y_{iX},N_i)) \\ \sigma_i &= m_i - [(Y_{iX} - m_i)\,(N_i - m_i)] \end{aligned}$$

Nous allons appliquer les mêmes idées que pour la théorie du faisceau équivalent pour trafics survariants.

Les trafics sur les différents faisceaux $i = 1,\ldots,I$ sont indépendants. Ceci implique que le trafic composé qui arrive sur le noeud 0 peut être vu comme un trafic dont la moyenne M_0 et la variance V_0 sont données par :

$$M_0 = Y_{0X} + \sum_{i=1}^{I} m_i \quad \text{et} \quad V_0 = Y_{0X} + \sum_{i=1}^{I} \sigma_i$$

Or on sait que $\sigma_i/m_i < 1$ (les trafics écoulés sont sousvariants). Ceci implique que le trafic agrégé offert au noeud 0 est lui-même sousvariant : $V_0/M_0 < 1$.

Ce trafic étant sousvariant on peut estimer qu'il viendrait d'un trafic unique Y^* écoulé par un faisceau (fictif) à capacité limitée N_S, comme l'indique la figure 4.5.

Les valeurs du trafic offert Poissonien Y^* et de la capacité N_S sont obtenues en résolvant le système suivant :

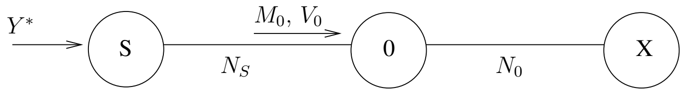


FIG. 4.5 – *Faisceau équivalent pour les trafics sousvariants.*

$$\begin{aligned} M_0 &= Y^*\ [1 - E(Y^*,N_S)] \\ V_0 &= M_0 - [(Y^* - M_0)\,(N_S - M_0)] \end{aligned}$$

Supposons que l'on ait obtenu ces valeurs. Regardons maintenant, le trafic qui s'écoule sur les deux faisceaux en série $S-0$ et $0-X$. Une analyse fort simple est à faire : **Il y a le même nombre d'appels à chaque instant sur le faisceau S-0 et le faisceau 0-X**.

Si les appels qui arrivent sont bloqués c'est parce qu'il n'y a plus de circuits libres soit dans $S-0$, soit dans $0-X$. En fait, les appels vont être bloqués par le faisceau ayant la plus petite capacité. Ceci revient à dire que l'on a le système équivalent représenté sur la figure 4.6.

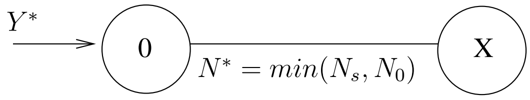


FIG. 4.6 – *Faisceau équivalent pour les trafics sousvariants.*

On en déduit directement la moyenne et la variance du trafic total écoulé par le faisceau $0-X$:

$$\begin{aligned} X &= Y^*\ [1 - E(Y^*,N^*)] \\ V &= X - [(Y^* - X)\,(N^* - X)] \end{aligned}$$

où $N^* = min(N_S,N_0)$. Le trafic perdu par ce faisceau est donné par $Z = Y^*\ E(Y^*,N^*)$.

Pour ce qui concerne chacun des flux $i = 0,\ldots,I$, on aura, comme dans le cas survariant :

$$\begin{aligned} X_i &= X\,\frac{\sigma_i}{V_0} \\ V_i &= V\,\frac{\sigma_i}{V_0} \\ Z_i &= Z\,\frac{\sigma_i}{V_0} \end{aligned}$$

4.3 Généralisation de la théorie du faisceau équivalent

Les deux modèles équivalents présentés précédemment permettent de généraliser un modèle de blocage à deux moments pour l'évaluation de la QoS de boute en bout dans un réseau. Prenons l'exemple du réseau représenté sur la figure 4.7.

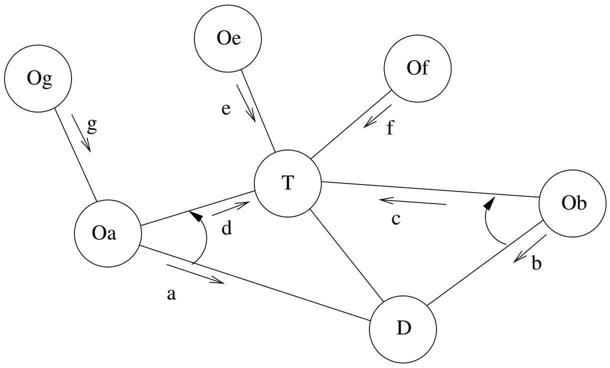


FIG. 4.7 – *Exemple d'application de la méthode de Wilkinson.*

Le trafic a entre les noeuds Oa-D est un trafic d'Erlang classique (de premier choix ou de partage de charge). De même pour les trafics b, e, f,g sur leurs premiers faisceaux.

Le trafic c est simplement le débordement du trafic b sur le faisceau Ob-T. On applique donc les formules de base du débordement pour les faisceaux Ob-D et Ob-T.

Par contre le faisceau Oa-T va recevoir du trafic de débordement du faisceau Oa-D mais aussi du trafic écoulé par le faisceau Og-Oa. Le trafic d qui en résulte, et qui est offert au faisceau Oa-T, peut être sur-variant ou sous-variant . En fonction du rapport variance sur moyenne V/M, on appliquera le modèle de faisceau équivalent approprié et les formules associées.

On retrouve finalement offert au noeud T les trafics suivants :

- Le trafic c écoulé par Ob-T,
- le trafic e écoulé par Oe-T,
- le trafic f écoulé par Of-T,
- le trafic g écoulé par Og-Oa puis Oa-T,
- le trafic d écoulé par Od-T,

En supposant tous ces trafics indépendants et en sommant leurs deux moments, on aura un certain trafic offert de moyenne M_{TD} et de variance V_{TD}. En fonction du rapport M_{TD}/V_{TD} , on appliquera le modèle de faisceau équivalent approprié et on finira par avoir tous les trafics écoulés et les probabilités de blocage sur le faisceau TD mais aussi sur tous les autres faisceaux. Cette démarche en cascade permet d'évaluer la QoS des réseaux par une approche de type faisceau équivalent (à deux moments).

CHAPITRE 5

Théorie différentielle du trafic

Des travaux menés au LAAS ont permis d'étudier la forme de l'équation différentielle moyenne associée à chaque ressource du réseau dans le cas de quelques cellules élémentaires. Ces cellules reflètent les topologies classiques "série/parallèle" que l'on rencontre dans un grand réseau. Cette analyse a été faite pour des commandes combinant le partage de charge et le débordement.

1. La première idée fondamentale développée dans ces recherches est de modéliser le trafic à partir de la forme exacte de l'équation différentielle de chacun des flux.
2. La deuxième idée est d'approximer les probabilités de blocage par l'intermédiaire de trafics fictifs liés au système implicite d'équations obtenues.

Finalement, le modèle obtenu se présente sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles dont la structure (et le nombre d'équations) dépend de l'acheminement choisi. Dans ce modèle, les acheminements sont tout à fait quelconques, ce qui autorise toute structure de réseau:

– partage en premier choix
– débordements multiples (non-hiérarchiques)
– débordement partagé
– débordements croisés
– réservation de circuits
– liaisons bidirectionnelles

Ces travaux ont permis d'aboutir à un nouvel outil efficace et général pour l'analyse de performances de réseaux à commutation de circuits. Dans ce chapitre, nous donnons les principes généraux du modèle résolu.

5.1 Le cas d'un faisceau de circuits isolé

Nous étudions tout d'abord le cas le plus simple d'un faisceau de circuits de capacité N dans le cadre du modèle d'Erlang. Les appels arrivent ainsi suivant un processus de Poisson de taux λ, et ceux qui sont admis ont une durée qui suit une loi exponentielle négative de paramètre μ. On note $Y = \lambda/\mu$ le trafic offert.

On a vu que dans ce cas, les résultats obtenus en régime permanent, fonction du trafic offert et de la capacité, sont relativement simples. L'objet de ce paragraphe est d'étendre l'étude au régime transitoire. Le résultat fondamental est le suivant :

Theorème 5.1 *L'équation différentielle exacte associée au trafic écoulé par un faisceau s'écrit:*

$$\dot{X}(t) = \lambda \left[1 - P_N(t)\right] \; - \; \mu \, X(t) \tag{5.1}$$

La difficulté de résolution de l'équation 5.1 vient du fait que le terme $P_N(t)$ ne dépend explicitement ni du temps ni de l'état moyen . Il est toutefois propose d'approximer cette probabilité transitoire indépendamment du modèle markovien de la façon suivante:

Approximation 5.1 *L'approximation dynamique du trafic écoulé par un faisceau de capacité N est:*

$$\dot{X}(t) = \lambda \left[1 - \tilde{P}_N(t)\right] \; - \; \mu \, X(t) \quad \textit{avec} \quad \tilde{P}_N(t) = E(N,Y(t)) \tag{5.2}$$

où $Y(t)$ est solution de :

$$X(t) = Y(t) \left[1 - E(N,Y(t))\right] \tag{5.3}$$

Cette approximation permet de calculer le trafic écoulé transitoire par intégration numérique de l'équation 5.2. A chaque pas de l'algorithme, il est nécessaire de déterminer numériquement le trafic offert fictif $Y(t)$ (qui est différent de $Y = \lambda/\mu$). L'approximation proposée converge vers la solution stationnaire exacte $X = Y \, (1 - E(Y,N))$.

En pratique, il n'est pas nécessaire de résoudre exactement le système non-linéaire 5.3 pour calculer le trafic offert fictif $Y(t)$. On peut se contenter de l'approximation suivante :

$$Y(t) = \frac{X(t)}{1 \; - \; \tilde{P}_N(t \; - \; \Delta t)} \tag{5.4}$$

Le schéma numérique permettant d'intégrer jusu'à une date $t = T$ avec un pas d'intégration de Δt consiste alors à itérer sur les étapes suivantes :

1 $P_N(0) = 0$, $X(0) = 0$
2 $t = \Delta t$

3 While $t \leq T$ do
  a $X(t+\Delta t) = X(t) \; + \; \Delta t \, [\lambda(1 - P_N(t)) - \mu X(t)]$
  b $Y(t+\Delta t) = X(t+\Delta t)/[1 - P_N(t)]$
  c $P_N(t+\Delta t) = E(Y(t+\Delta t), N)$
  d $t = t + \Delta t$
4 End while.

5.2 Réseau avec monoroutage

Il s'agit ici d'estimer la probabilité de blocage de chaque faisceau du réseau et le trafic moyen écoulé par ces faisceaux. Le problème est beaucoup plus complexe que pour un seul faisceau car les faisceaux écoulent des appels appartenant à plusieurs flots, ce qui entraîne un couplage entre plusieurs processus aléatoires. C'est dans ce cas qu'un modèle d'état dynamique tel que 5.2 prend tout son intérêt.

Dans ce paragraphe, nous allons supposer que chaque flot d'appel i est acheminé sur un seul chemin, noté Π_i. On notera de plus Γ_j l'ensemble des flots dont le chemin emprunte le faisceau j :

$$\Gamma_j = \left\{ i | j \in \Pi_i \right\} \tag{5.5}$$

Dans la suite, on notera $Z_i(t)$ le trafic écoulé par le flot d'appels i à l'instant t et $X_j(t)$ le trafic écoulé par le faisceau j à l'instant t. Evidemment, on aura la relation suivante :

$$X_j(t) = \sum_{i \in \Gamma_j} Z_i(t) \tag{5.6}$$

De la même façon que précédemment, on peut écrire les équations différentielles exactes associées aux faisceaux du réseau. L'équation différentielle exacte gouvernant le trafic écoulé par le flot d'appels i s'écrit :

$$\dot{Z}_i(t) = \lambda_i \, [1 - b_i(t)] \; - \; \mu \, Z_i(t) \tag{5.7}$$

$b_i(t)$ étant la probabilité de blocage des appels du flot i à l'instant t. Avec la relation 5.6, on obtient l'équation différentielle du trafic écoulé par le faisceau j :

$$\dot{X}_j(t) = \sum_{i \in \Gamma_j} \lambda_i \, [1 - b_i(t)] \; - \; \mu \, X_j(t) \tag{5.8}$$

Le calcul exact de la probabilité $b_i(t)$ étant extrêmement complexe, on simplifie en général le problème en considérant que les probabilités de blocages sur les faisceaux du chemin sont indépendantes. En utilisant cette hypothèse, on obtient l'approximation dynamique suivante.

Approximation 5.2 *L'approximation dynamique du trafic écoulé par le flot* i *s'écrit :*

$$\dot{Z}_i(t) = \lambda_i \, [1 - \tilde{b}_i(t)] \; - \; \mu \, Z_i(t) \tag{5.9}$$

ce qui donne pour le faisceau j,

$$\dot{X}_j(t) = \sum_{i \in \Gamma_j} \lambda_i \, [1 - \tilde{b}_i(t)] \; - \; \mu \, X_j(t) \tag{5.10}$$

L'approximation $\tilde{b}_i(t)$ de la probabilité de blocage $b_i(t)$ du flot i s'écrit comme le produit des probabilités de blocages indépendantes $\tilde{P}_k(t)$ des faisceaux k appartenant au chemin Π_i.

$$(1 - \tilde{b}_i(t)) = \prod_{k \in \Pi_i} (1 - \tilde{P}_k(t)) = \prod_{k \in \Pi_i} (1 - E(N_k, Y_k(t))) \tag{5.11}$$

Ces probabilités de blocage sont obtenues par la formule d'Erlang à partir des trafics offerts fictifs $Y_k(t)$. Ces derniers sont obtenues en résolvant le système non-linéaire suivant :

$$X_k(t) = Y_k(t) \, [1 - E(N_k, Y_k(t))] \tag{5.12}$$

Là encore, signalons qu'en pratique, il n'est pas nécessaire de résoudre le système non-linéaire 5.12. Il est plus intéressant d'utiliser l'approximation suivante :

$$Y_k(t) = \frac{X_k(t)}{1 \; - \; \tilde{P}_k(t \; - \; \Delta t)} \tag{5.13}$$

L'approximation précédente peut être utilisée pour évaluer les performances du réseau (probabilités de blocage, trafics écoulés, etc. . .) aussi bien en régime transitoire qu'en régime stationnaire. Pour cela, il suffit d'intégrer numériquement l'équation 5.10. A chaque pas d'intégration, on détermine les trafics offerts fictifs $Y_k(t)$ en utilisant l'équation 5.13, puis on calcule l'approximation $\tilde{P}_k(t)$ de la probabilité de blocage de chaque faisceau k, et enfin on en déduit les probabilités de blocage $\tilde{b}_i(t)$ de chaque flux d'appels.

Plus précisément, si on suppose que l'on connait les probabilités de blocage et les trafics écoulés (par faisceau et par flux) à l'instant t, le calcul de ces grandeurs à l'instant $t + \Delta t$ va se faire de la façon suivante :

– **Calcul des trafics écoulés des flots :**

$$Z_i(t + \Delta t) = Z_i(t) + \left\{ \lambda_i \, [1 - \tilde{b}_i(t)] \; - \; \mu \, Z_i(t) \right\} \, \Delta t$$

– **Calcul des trafics écoulés par les faisceaux :**

$$X_j(t + \Delta t) = \sum_{i \in \Gamma_j} Z_i(t + \Delta t)$$

– **Calcul des trafics offerts fictifs :**

$$Y_k(t+\Delta t) = \frac{X_k(t+\Delta t)}{1\ -\ \tilde{P}_k(t)}$$

– **Calcul des probabilités de blocage (des faisceaux et des flots) :**

$$(1-\tilde{b}_i(t+\Delta t)) = \prod_{k\in\Pi_i}(1-\tilde{P}_k(t+\Delta t)) = \prod_{k\in\Pi_i}(1-E(N_k,Y_k(t+\Delta t)))$$

Exemple 5.1 *Considérons le réseau représenté sur la figure 5.1.*

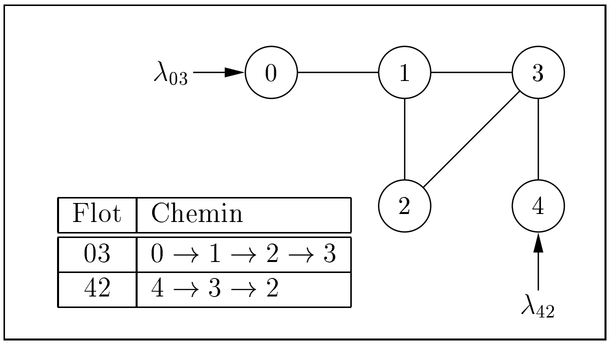


FIG. 5.1 – *Exemple de réseau.*

Les équations différentielles décrivant le trafic écoulé de chaque faisceau sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\dot{X}_{01} &= \lambda_{03}\,[1-b_{03}(t)]\ -\ \mu\,X_{01}\\
\dot{X}_{12} &= \lambda_{03}\,[1-b_{03}(t)]\ -\ \mu\,X_{12}\\
\dot{X}_{23} &= \lambda_{03}\,[1-b_{03}(t)]\ +\ \lambda_{42}\,[1-b_{42}(t)]\ -\ \mu\,X_{23}\\
\dot{X}_{34} &= \lambda_{42}\,[1-b_{42}(t)]\ -\ \mu\,X_{34}
\end{aligned}$$

Les probabilités de blocage des flux, b_{03} *et* b_{42} *sont calculées par :*

$$\begin{aligned}
b_{03}(t) &= [1-E(N_{01},Y_{01}(t))]\,[1-E(N_{12},Y_{12}(t))]\,[1-E(N_{23},Y_{23}(t))]\\
b_{42}(t) &= [1-E(N_{43},Y_{43}(t))]\,[1-E(N_{32},Y_{23}(t))]
\end{aligned}$$

5.3 Les commandes de routage

5.3.1 Le partage de charge

Au niveau d'un noeud de commutation, le partage de charge consiste à transmettre une certaine proportion du flot d'appels sur chaque faisceau sortant (la proportion pouvant être nulle). Le principe est illustré sur la figure 5.2.

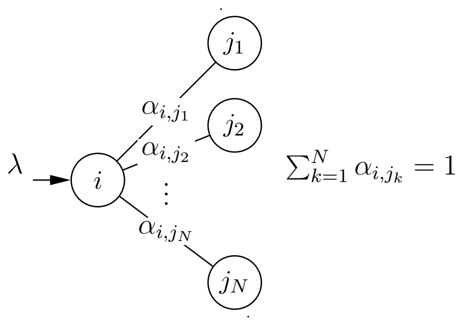


FIG. 5.2 – *Partage de charge.*

Dans ce cas, le trafic écoulé par un flot d'origine i, de destination d et de trafic offert λ sera donné par l'équation suivante :

$$\dot{Z}_{i,d}(t) = \lambda\,(1 - b_{i,d}(t)) \; - \; \mu\, X(t) \tag{5.18}$$

où $b_{i,d}(t)$ est la probabilité de blocage d'un appel entre les sommets i et d. Cette probabilité va pouvoir s'écrire de manière récursive de la façon suivante (on utilise là encore l'hypothèse d'indépendance des probabilités de blocage) :

$$[1 - b_{i,d}(t)] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{i,j_k}\,(1 - P_{i,j_k})\,[1 - b_{j_k,d}] \tag{5.19}$$

Le trafic écoulé par le faisceau (i,j_k) est donné par :

$$\dot{X}_{i,j_k}(t) = \lambda\,\alpha_{i,j_k}\,(1 - P_{i,j_k})\,[1 - b_{j_k,d}] \tag{5.20}$$

A partir de ces équations, on va pouvoir évaluer récursivement les trafics écoulés des flots et des faisceaux à l'instant $t + \Delta t$ si on connait les probabilités de blocage à l'instant t. Ensuite, on pourra en déduire les trafics offerts fictifs par la formule 5.13, et donc les probabilités de blocage des faisceaux à l'instant $t + \Delta t$ par application de la formule d'Erlang. On pourra également calculer les probabilités de blocage des flots à l'instant $t + \Delta t$.

Exemple 5.2 *Considérons le réseau de la figure 5.3.*
Le trafic écoulé Z par le flot $1 \rightarrow 4$ est gouverné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
\dot{Z}(t) &= \lambda\,[1 - b_{1,4}(t)] \; - \; \mu\, Z(t) \\
&= \lambda\,\left\{\alpha(1 - P_{12})[1 - b_{2,4}] \; + \; (1-\alpha)(1 - P_{13})[1 - b_{3,4}]\right\} \; - \; \mu\, Z(t) \\
&= \lambda\,\left\{\alpha(1 - P_{12})(1 - P_{23}) \; + \; (1-\alpha)(1 - P_{13})\right\}(1 - P_{34}) \; - \; \mu\, Z(t)
\end{aligned}$$

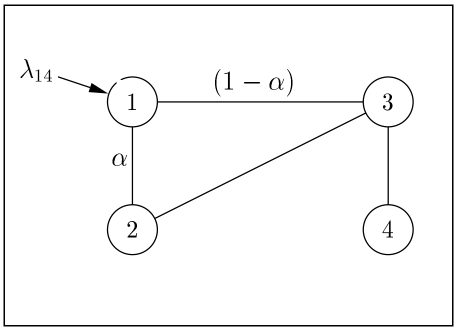


FIG. 5.3 – *Exemple de partage de charge.*

5.3.2 Le débordement

Le débordement est une technique de gestion largement employée dans les réseaux téléphoniques. On en rappelle le principe sur la figure 5.4.

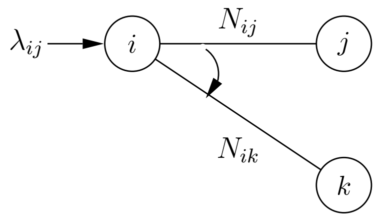


FIG. 5.4 – *Débordement.*

La méthode du trafic différentiel permet de prendre en compte les trafics de débordement dans le calcul des trafics écoulés. Ecrivons l équation associée au faisceau de premier choix :

$$\dot{X}_{ij}(t) = \lambda_{ij}\,[1 - P_{ij}] \;-\; \mu\, X_{ij}(t) \tag{5.21}$$

On peut cependant également écrire l'équation du trafic écoulé par le flux, en remarquant qu'il est identique à celui qui serait écoulé par un faisceau de capacité $N_{ij}+N_{ik}$:

$$\begin{aligned}
\dot{Z}_{ij}(t) &= \dot{X}_{ijk}(t) \\
&= \dot{X}_{ij}(t) + \dot{X}_{ik}(t) \\
&= \lambda_{ij}\,[1 - P_{ijk}] \;-\; \mu\, X_{ijk}
\end{aligned}$$

où P_{ijk} est la probabilité de blocage d'un faisceau équivalent qui aurait la capacite $N_{ij} + N_{ik}$.

On en déduit immédiatement le trafic écoulé par le second faisceau :

$$\dot{X}_{ik}(t) = \lambda_{ij}\,[P_{ij} - P_{ijk}] \;-\; \mu\, X_{ik}(t) \tag{5.22}$$

On voit donc que le calcul du trafic écoulé par le second faisceau fait intervenir non seulement la probabilité de blocage du faisceau (i,j), mais également celle de l'ensemble de faisceaux $(i,j) \cup (i,k)$.

De manière générale, au niveau de la probabilité de blocage d'un flot d'origine i et de destination d, on va retrouver une expression récursive :

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{i,d}(t) &= \lambda\,[1 - b_{i,d}(t)] \;-\; \mu\, Z_{i,d}(t) \\ &= \lambda \left\{(1 - P_{ij})\,[1 - b_{j,d}] \;+\; (P_{ij} - P_{ijk})\,[1 - b_{k,d}]\right\} \;-\; \mu\, Z_{i,d}(t) \end{aligned}$$

Le trafic écoulé par le faisceau (i,j) de premier choix s'écrira :

$$\dot{X}_{ij}(t) = \lambda\,[1 - P_{ij}]\,[1 - b_{j,d}] \;-\; \mu\, X_{ij}(t) \tag{5.23}$$

tandis que celui écoulé par le faisceau de second choix (i,k) sera gouverné par l'équation suivante :

$$\dot{X}_{ik}(t) = \lambda\,[P_{ij} - P_{ijk}]\,[1 - b_{k,d}] \;-\; \mu\, X_{ik}(t) \tag{5.24}$$

Evidemment, ces équations se généralise immédiatement au cas où on a N faisceaux de débordement.

Exemple 5.3 *Considérons le réseau de la figure 5.5.*

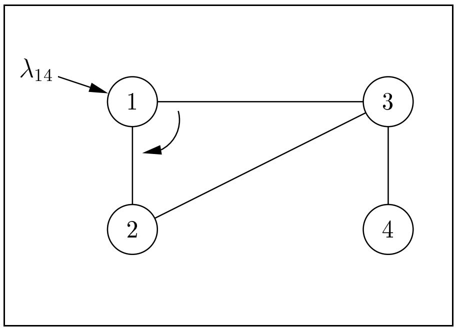


FIG. 5.5 – *Exemple de débordement.*

Le trafic écoulé Z *par le flot* $1 \to 4$ *est gouverné par l'équation suivante :*

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= \lambda\,[1 - b_{1,4}(t)] \;-\; \mu\, Z(t) \\ &= \lambda \left\{(1 - P_{13})[1 - b_{3,4}] \;+\; (P_{13} - P_{123})[1 - b_{2,4}]\right\} \;-\; \mu\, Z(t) \\ &= \lambda \left\{(1 - P_{13}) \;+\; (P_{13} - P_{123})\,(1 - P_{23})\right\}(1 - P_{34}) \;-\; \mu\, Z(t) \end{aligned}$$

5.3.3 Combinaisons de partage de charge et de débordement

Nous allons directement illustrer ce cas à travers un exemple.

Exemple 5.4 *Considérons le réseau de la figure 5.6.*

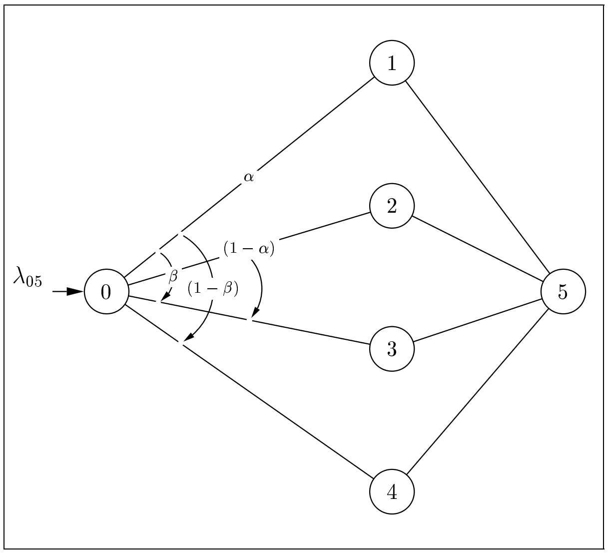


FIG. 5.6 – *Exemple de combinaison de partage de charge et de débordement.*

Ce réseau fait intervenir, pour le flot $0 \to 5$ *considéré, un partage de charge sur les faisceaux* $(0{,}1)$ *et* $(0{,}2)$*. Le trafic bloqué sur* $(0{,}1)$ *est débordé sur* $(0{,}3)$ *et* $(0{,}4)$ *suivant les proportions* β *et* $(1-\beta)$*. Le trafic bloqué sur* $(0{,}2)$ *est tout entier débordé sur* $(0{,}3)$*.*

Le trafic écoulé par le flot $0 \to 5$ *est gouverné par l'équation suivante (dont on notera la structure récursive) :*

$$\begin{aligned}
\dot{Z}(t) &= \lambda_{05}\,[1-b_{0,5}(t)] \;-\; \mu\, X(t) \\
&= \lambda_{05}\,\Big\{\, \alpha\big[(1-P_{01})(1-b_{1,5}) \;+\; \beta\,(P_{01}-P_{013})(1-b_{3,5}) \;+\; (1-\beta)\,(P_{01}-P_{014})(1-b_{4,5})\big] \;+ \\
&\qquad (1-\alpha)\big[(1-P_{02})(1-b_{2,5}) + (P_{02}-P_{023})(1-b_{3,5})\big] \,\Big\} \;-\; \mu\, Z(t)
\end{aligned}$$

5.4 Résolution du Modèle Différentiel

Nous avons vu dans les paragraphes précédents comment modéliser un réseau téléphonique avec la théorie du trafic différentiel. Cette modélisation mathématique se présente sous la forme d'un système non-linéaire d'équations différentielles coupléés permettant le calcul des trafics écoulés et des probabilités de blocage. Ce calcul peut être réalisé de deux manières : par intégration numérique du système d'équations différentielles ou par une méthode de point fixe.

5.4.1 Résolution par intégration numérique

Cette méthode de résolution a l'avantage de permettre de calculer à la fois le transitoire et le stationnaire des trafics écoulés et des probabilités de blocage.

Supposons que l'on connait les probabilités de blocage et les trafics écoulés (par faisceau et par flux) à l'instant t. Le calcul de ces grandeurs à l'instant $t + \Delta t$ va se faire de la façon suivante :

- **Calcul des trafics écoulés des flots :**

$$Z_i(t+\Delta t) = Z_i(t) + \left\{ \lambda_i \left[1 - \tilde{b}_i(t)\right] \; - \; \mu \, Z_i(t) \right\} \, \Delta t \tag{5.25}$$

- **Calcul des trafics écoulés par les faisceaux :**

$$X_j(t+\Delta t) = \sum_{i \in \Gamma_j} Z_i(t+\Delta t) \tag{5.26}$$

- **Calcul des trafics offerts fictifs :**

$$Y_k(t+\Delta t) = \frac{X_k(t+\Delta t)}{1 \; - \; \tilde{P}_k(t)} \tag{5.27}$$

- **Calcul des probabilités de blocage (des faisceaux et des flots) :**

$$\begin{array}{rcl} \tilde{P}_k(t+\Delta t) & = & E(N_k, Y_k(t+\Delta t)) \\ \tilde{b}_i(t+\Delta t) & = & F_i(\tilde{P}_k(t+\Delta t)) \end{array}$$

où la fonction F_i dépend des commandes de routage du flot i en chaque noeud traversé par ce flot.

5.4.2 Résolution par point fixe

Cette méthode ne permet que de calculer les valeurs stationnaires des trafics écoulés et des probabilités de routage. Par contre, elle est plus rapide.

Il s'agit d'un calcul itératif. Notons respectivement $Z_i(n)$ et $X_j(n)$ les trafics écoulés du flot i et du faisceau j à l'itération n. De même, on note $\tilde{P}_k(n)$ la valeur de la probabilité de blocage du faisceau k à l'itération n. Le calcul effectué à l' itération $n+1$ est alors le suivant :

- **Calcul des trafics écoulés des flots :**

$$Z_i(n+1) = \frac{\lambda_i}{\mu} \left[1 - \tilde{b}_i(n)\right] \tag{5.28}$$

– **Calcul des trafics écoulés par les faisceaux :**

$$X_j(n+1) = \sum_{i \in \Gamma_j} Z_i(n+1) \tag{5.29}$$

– **Calcul des trafics offerts fictifs :**

$$Y_k(n+1) = \frac{X_k(n+1)}{1 - \tilde{P}_k(n)} \tag{5.30}$$

– **Calcul des probabilités de blocage (des faisceaux et des flots) :**

$$\begin{aligned} \tilde{P}_k(n+1) &= E(N_k, Y_k(n+1)) \\ \tilde{b}_i(n+1) &= F_i(\tilde{P}_k(n+1)) \end{aligned}$$

où là encore la fonction F_i dépend des commandes de routage du flot i en chaque noeud traversé par ce flot.

5.5 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre comment modéliser un réseau téléphonique dans le cadre de la théorie différentielle du trafic. Comme on l'a vu, cette théorie permet de calculer les trafics écoulés et les probabilités de blocage des flots d'appels et des faisceaux dans un réseau téléphonique combinant des techniques de routage par partage de charge et par débordement.

Le modèle du réseau introduit par la théorie différentielle du trafic est un système d'équations différentielles couplées. Ce système peut être réolu de deux manières. Soit par intégration numérique des équations différentielles, ce qui permet d'obtenir à la fois le régime transitoire et le régime permanent. Soit par une méthode de point fixe qui permet de caluler plus rapidement le régime permanent.

Au travers des exemples que nous avons présentés, nous avons insisté sur la formulation récursive des équations du modèle différentiel. Cette formulation récursive est à la base de l'implémentation logicielle de ces modèles.