Examen du cours "Evaluation de Performances"

Olivier Brun

4 Décembre 2008

Problème No 1

On désire transférer un gros fichier à travers l'Internet. Au cours du transfert du fichier, on fait des mesures qui nous apprennent que le taux de perte de paquets de la connexion TCP est de 3%, et que son RTT moyen est de 6ms. En supposant que tous les paquets font 1024 octets, en déduire le débit de la connexion en Mbps.[1]

On applique tout simplement la formule SQRT reliant le débit d'une connexion TCP (en paquets/s) à son RTT et à son taux de perte :

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{RTT}\sqrt{\frac{3}{2p}} \\ &= \frac{1}{0.006}\sqrt{\frac{3}{2 \times 0.03}} \\ &= 1178.51 \end{aligned}$$

On en déduit le débit en Mbps :

$$D = 1178.51 * (1024/8)/(1024)^2 = 9.21\ Mbps$$

Problème No 2

On considère le réseau téléphonique représenté sur la figure 1. Cette figure indique la numérotation des noeuds et des liens. On suppose que tous les liens ont une capacité de 14 circuits.

Ce réseau doit acheminer 12 flots d'appels, de chaque noeud $i = 1, 2, 3, 4$ vers tous les autres noeuds $j = 1, 2, 3, 4$, $j \neq i$. On note $Y_{i,j}$ le trafic offert du flot de i vers j. Les valeurs de ces trafics offerts (en Erlangs) sont précisées dans le tableau ci-dessous.

[1] On rappelle que 1 Mbps=1024 Kbps=1024^2 bps.

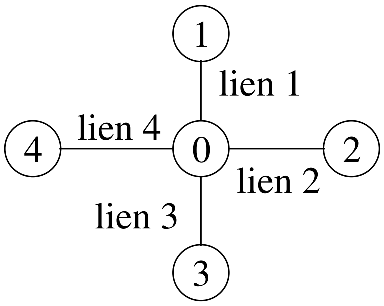

Figure 1: Réseau téléphonique considéré dans le problème.

	1,2	1,3	1,4	2,1	2,3	2,4	3,1	3,2	3,4	4,1	4,2	4,3
$Y_{i,j}$	1	2	1	2	1	1	1	1	2	1	2	1

Q.1 Ecrire un tableau précisant pour chaque lien les flots qui passent dessus.

Lien	Flots	$\sum_{r:l\in r} Y_r$
1	(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (4,1)	8
2	(2,1), (2,3), (2,4), (1,2), (3,2), (4,2)	8
3	(3,1), (3,2), (3,4), (1,3), (2,3), (4,3)	8
4	(4,1), (4,2), (4,3), (1,4), (2,4), (3,4)	8

Q.2 Justifier succintement et de manière informelle pourquoi on peut penser que l'hypothèse d'indépendance des probabilités de blocage est assez bien vérifiée.

Chaque flot emprunte deux faisceaux en série, et étant donné deux liens, il n'y a qu'un seul flot qui les emprunte tous les deux. Ce flot a un trafic offert "petit" (au maximum 2E) par rapport au trafic offert à chacun des liens (8 E).

Q.3 Appliquer les trois premières itérations de l'algorithme du point fixe d'Erlang. On pourra utiliser les valeurs de la fonction d'Erlang-B données dans le tableau suivant.

$E(8, 14)$	0.0172
$E(7.8624, 14)$	0.0155
$E(7.876, 14)$	0.0156

– **Initialisation** $E_j = 0$, $j = 1, 2, 3, 4$.

– **Iteration 1** On calcule tout d'abord le trafic offert à chaque lien avec la formule suivante,

$$\rho_j = \sum_{r:j\in r} Y_r \prod_{i\in r-j} (1 - E_i) = \sum_{r:j\in r} Y_r$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= (Y_{12} + Y_{13} + Y_{14} + Y_{21} + Y_{31} + Y_{41})\ (1 - 0) = 8 \\
\rho_2 &= (Y_{21} + Y_{23} + Y_{24} + Y_{12} + Y_{32} + Y_{42})\ (1 - 0) = 8 \\
\rho_3 &= (Y_{31} + Y_{32} + Y_{34} + Y_{13} + Y_{23} + Y_{43})\ (1 - 0) = 8 \\
\rho_4 &= (Y_{41} + Y_{42} + Y_{43} + Y_{14} + Y_{24} + Y_{34})\ (1 - 0) = 8
\end{aligned}$$

On en déduit $E_j = E(8, 14) = 0.0172$ pour $j = 1, 2, 3, 4$.

– **Iteration 2** Le trafic offert à chaque lien $j = 1, 2, 3, 4$ s'écrit,

$$\rho_j = \sum_{r:j\in r} Y_r\,(1 - 0.0172) = 8(1 - 0.0172) = 7.8624E$$

On en déduit $E_j = E(7.8624, 14) = 0.0155$ pour $j = 1, 2, 3, 4$.

– **Iteration 3** Le trafic offert à chaque lien $j = 1, 2, 3, 4$ s'écrit,

$$\rho_j = \sum_{r:j\in r} Y_r\,(1 - 0.0155) = 8(1 - 0.0155) = 7.876E$$

On en déduit $E_j = E(7.876, 14) = 0.0156$ pour $j = 1, 2, 3, 4$.

Q.4 En supposant que l'algorithme a convergé au bout de ces trois itérations, en déduire la probabilité de blocage de chaque lien et le trafic qu'il écoule.

La probabilité de blocage du lien $j = 1, 2, 3, 4$ est E_j=1.56% et son trafic écoulé est $X_j = \rho_j(1 - E_j) = 7.876 * (1 - 0.0156)$=7.75E.

Q.5 Quelle est la probabilité de blocage de bout-en-bout de chaque flot d'appels ? En déduire le trafic écoulé par le flot $(1, 2)$.

La probabilité de blocage de bout-en-bout est identique pour tous les flots:

$$L_{ij} = 1 - (1 - E_i)(1 - E_j) = 1 - (1 - 0.0156)^2 = 3.1\%$$

On en déduit $X_{12} = Y_{12}(1 - L_{12})$=0.97E.

Problème No 3

Nous considérons ici un grand nombre d'abonnés ADSL ou UMTS (i.e. une population d'utilisateurs pouvant être considérée infinie) connectés au backbone réseau d'un opérateur par un même lien d'accès de capacité C=10 Mbps (cf figure 2). Le débit d'un terminal utilisateur est limité à c=2 Mbps dans le sens descendant.

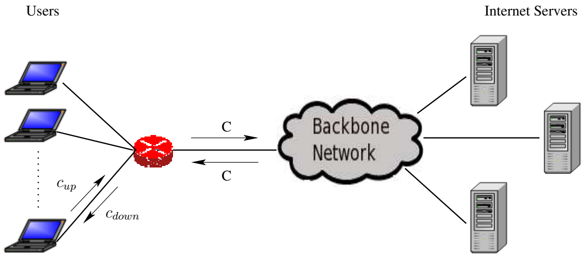

Figure 2: Population infinie d'utilisateurs se partageant un lien de communication à C=10 Mbps.

On suppose qu'il y a une seule application, de type web-browsing. Il s'agit donc d'une application interactive, avec des phases de download et des périodes OFF de lecture des pages. De nouvelles sessions sont initiées par les utilisateurs suivant un processus de Poisson au taux λ=1.25 sessions/s. Une nouvelle session télécharge une ou plusieurs pages dont les tailles sont des variables aléatoires i.i.d, de moyenne $1/\alpha$=1.6 Mbits. Le nombre moyen de pages téléchargées au cours d'une session est $1/p$=4 pages/session.

Q.1 Quelles sont les phases possibles pour une session ? Dessiner le réseau de files d'attente équivalent.

Les phases possibles sont DOWN et OFF. Le réseau équivalent est celui vu en cours, sans le noeud UP.

Q.2 Exprimer le trafic offert ρ (en Mbps) en fonction de λ, $1/p$ et $1/\alpha$. Vérifier la condition de stabilité.

Le trafic offert est,

$$\rho = \lambda \frac{1}{p} \frac{1}{\alpha} = 8 \; Mbps$$

On a bien ρ=8 Mbps $<$ C=10 Mbps, donc la condition de stabilité est satisfaite.

Q.3 Quelle est la probabilité $\pi_{down}(0)$ qu'il n'y ait aucune session en cours de téléchargement ? Quelle est la proportion de temps B_{down} où le lien d'accès est utilisé à 100% de sa capacité ? Pour répondre à ces questions, on pourra utiliser les résultats suivants :

$$\sum_{i=0}^{4} \frac{4^i}{i!} = 34.33 \quad \text{et} \quad \frac{4^5}{5!} \frac{10}{10-8} = 42.67$$

Soit $N = C/c$=5 le nombre de connexions simultanées pouvant opérer à 2 Mbps. On sait que :

$$\pi_{down}(0) = \left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{(\rho/c)^i}{i!} \; + \; \frac{(\rho/c)^N}{N!} \frac{C}{C-\rho} \right)^{-1}$$

Avec les indications fournies, cela donne,

$$\pi_{down}(0) = (34.33 + 42.67)^{-1} = 1.3\%$$

La probabilité B_{down} de congestion du lien en download est donnée par,

$$B_{down} = Pr\left[X_{down} \geq N\right] = \pi_{down}(0) \frac{(\rho/c)^N}{N!} \frac{C}{C-\rho}$$

ce qui donne,

$$B_{down} = 0.013 \, 42.67 = 55.4\%$$

Q.4 Quel est le nombre moyen de sessions en cours de téléchargement ? Quelle est la durée moyenne d'un téléchargement ? Quelle durée faut-il en moyenne pour télécharger une page de 3.2 Mbits ?[2]

On applique les formules vues en cours :

$$E\left[X_{down}\right] = \rho \left(\frac{1}{c} \; + \; \frac{B_{down}}{C-\rho} \right) = 8 \left(0.5 \; + \; \frac{0.554}{10-8} \right) = 6.22 \text{ connexions}$$

[2]Pour les durées, remplacer λ par λ/p dans les formules vues en cours.

Avec la loi de Little, on en déduit la durée moyenne de téléchargement d'une page,

$$E\left[D_{down}\right] = \frac{p}{\lambda}\,E\left[X_{down}\right] = 6.22/(4*1.25) = 1.244\ s$$

De même,

$$E\left[D_{down} \mid \text{taille de la page} = 3.2\ Mbits\right] = \frac{\lambda}{p}\,3.2\,E\left[D_{down}\right]/\rho = 2.48\ s$$

Q.5 Quelle est le trafic moyen sur le lien dans le sens descendant ? Quelle est la probabilité que le téléchargement d'une page puisse s'opérer à 2 Mbps ? Quelle est la probabilité qu'il s'opére à 1 Mbps en moyenne ? Pour cette dernière question, on pourra se servir du résultat suivant : $\Phi_{down}(10)$=0.00945.

Le trafic moyen est évidemment ρ=8 Mbps. La probabilité qu'une connexion puisse télécharger une page à 2 Mbps est donnée par $(1-\rho B_{down}/C)/(1-\pi_{down}(0))$, ce qui fait 56.4%. Enfin, la probabilité que le téléchargement se fasse 1 Mbps est donnée par,

$$\begin{aligned}
Pr[X_{down}=10]/(1-\pi_{down}(0)) &= \frac{\pi_{down}(0)}{1-\pi_{down}(0)}\,\Phi_{down}(10)\,\frac{(\rho)^1 0}{10!} \\
&= \frac{0.013}{1-0.013}\times 0.00945\times\frac{8^{10}}{10!} \\
&= 3.68\% \qquad (1)
\end{aligned}$$