# Examen du cours “Evaluation de Performances”

Olivier Brun et Urtzi Ayesta

1er décembre 2006

## Problème No 1

On considère les listings fournis en annexe. Ces listings correspondent à la spécification d’une classe C++ Simulator et à l’implémentation de sa méthode run(). Cette dernière implémente la boucle de simulation d’une file M/M/1/$\infty$.

On désire modifier la méthode run() pour simuler une file à capacité finie M/M/1/N où N représente le nombre maximal de clients dans le système (file d’attente et serveur). Pour cela, on ajoute deux attributs supplémentaires à la classe Simulator :

- l’attribut capacity_ qui représente la capacité N,
- l’attribut blockingProba_ pour calculer la probabilité de blocage.

On suppose que ces attributs sont correctement positionnés par le constructeur.

**Q.1** Coment modifier la méthode run() pour prendre en compte le fait que la file a maintenant une capacité finie ?

**Q.2** Comment modifier cette méthode pour calculer la probabilité de blocage ?

## Problème No 2

On considère le réseau téléphonique représenté sur la figure 1. Cette figure indique la numérotation des noeuds et des liens. On suppose que tous les liens ont une capacité de 20 circuits.

Ce réseau doit acheminer 12 flots d’appels, de chaque noeud $i = 1,2,3,4$ vers tous les autres noeuds $j = 1,2,3,4$, $j \neq i$. On note $Y_{i,j}$ le trafic offert du flot de $i$ vers $j$. Les valeurs de ces trafics offerts (en Erlangs) sont précisées dans le tableau ci-dessous.

| | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 2,1 | 2,3 | 2,4 | 3,1 | 3,2 | 3,4 | 4,1 | 4,2 | 4,3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_{i,j}$ | 1.5 | 2 | 2 | 2 | 2.5 | 1.5 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 |

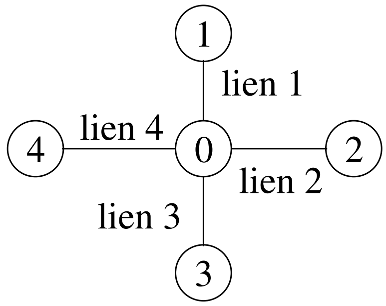


FIG. 1 – *Réseau téléphonique considéré dans le problème.*

**Q.1** Ecrire un tableau précisant pour chaque lien les flots qui passent dessus.

**Q.2** Justifier succinctement et de manière informelle pourquoi on peut penser que l'hypothèse d'indépendance des probabilités de blocage est assez bien vérifiée.

**Q.3** Appliquer les deux premières itérations de l'algorithme du point fixe d'Erlang. On pourra utiliser les valeurs de la fonction d'Erlang-B données dans le tableau suivant.

| | |
|---|---|
| $E(11.5{,}20)$ | 0.00687 |
| $E(12.33{,}20)$ | 0.0121 |
| $E(12.35{,}20)$ | 0.0123 |
| $E(12.36{,}20)$ | 0.0124 |
| $E(12.5{,}20)$ | 0.0135 |

**Q.4** En supposant que l'algorithme a convergé au bout de ces deux itérations, en déduire la probabilité de blocage de chaque lien et le trafic qu'il écoule.

**Q.4** Quelle est la probabilité de blocage de bout-en-bout de chaque flot d'appels ? En déduire le trafic écoulé par chaque flot.

## Problème No 3

Un multiplexeur ATM (voire Figure 2) transmet des paquets qui ont une taille constante de $53$ octets. La capacité du lien de sortie es $155$Mbit/s, et par conséquent le temps de transmission d'un paquet est constant aussi. Des paquets arrivent au multiplexeur selon un processus de Poisson avec un taux $\lambda = 292450$paquets/sec.

a) Quel est le temps de transmission d'un paqueet dans le lien? Quelle est la charge $\rho$ dans la file?

b) Quel est le nombre moyen de paquets dans le multiplexeur?

e) Quel est le temps moyen qu'un paquet passe dans la file?

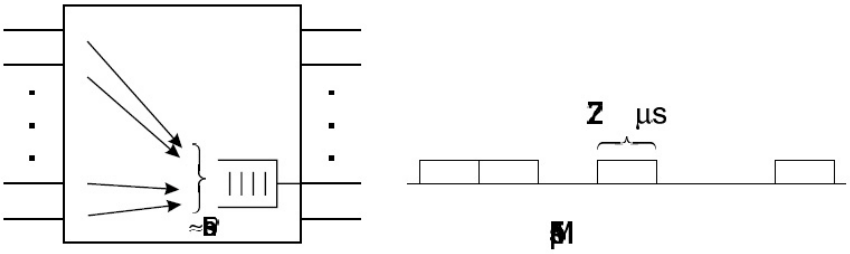


FIG. 2 – *Multiplexeur ATM*

# Problème No 4

Dans le centre d'appels de Free il y 10 personnes qui reçoivent des appels. Lorsque les 10 sont occupées, les nouveaux appels sont rejetés. De nouveaux appels sont générés avec un processus de Poisson de taux $\lambda$ et la durée de chaque appel est exponentielle de moyenne $1/\mu$. Pour cette exercice vous pouvez utiliser la Figure 3.

a) On veut determiner la charge maximale du système telle que $1\%$ des appels soient rejetés. Quelle est la valeur de $\rho = \lambda/\mu$?

b) Selon la notation de Kendall, avec quelle file peut-on modéliser ce système?

c) Chez Free ils estiment que le taux d'appels qu'ils reçoivent va doubler dans une année. Si Free veut que le taux de rejet reste le même ($1\%$), combien de nouvelles personnes devront être embauchées?

d) Supposons maintenant que la distribution du temps de service est Hyperexponentielle. Suggérez une méthode pour calculer a), b) et c)

# Problème No 5

Suite à un accident les gendarmes doivent acheminer des voitures sur deux routes différentes. Soit $E[T_1]$ le temps moyen de transit d'une voiture sur la route 1 et $E[N_1]$ le nombre moyen de voitures sur la route 1. S'il n'y avait aucune autre voiture sur la route 1, le temps moyen de transit d'une voiture serait $E[S_1]$ (équivalent au temps de service moyen). On définit de façon similaire les quantités $E[T_2]$, $E[N_2]$ et $E[S_2]$.

Les voitures arrivent à l'endroit de l'accident suivant un processus de Poisson de taux moyen $\lambda$. Lorsque une voiture arrive, la voiture est acheminée avec une probabilité

$0 \leq p \leq 1$ vers la route $1$ et avec une probabilité $1 - p$ vers la route $2$. Sur la route $1$, la relation suivante est satisfaite

$$E[T_1] = \alpha + \beta E[N_1],$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux constantes positives.

Sur la route $2$ la relation suivante est satisfaite:

$$E[T_2] = E[S_2].$$

Calculer:

a) Quel est le nombre moyen des voitures sur la route $1$? et sur la route $2$?

b) Considérons la route $1$. Vue la solution obtenue pour $E[N_1]$, quelles sont les valeurs que $\alpha$ et $\beta$ devraient avoir afin que la route $1$ puisse être modélisée comme une file d'attente $M/M/1$?

c) Quelle file d'attente proposeriez-vouz pour modéliser la route $2$?

d) Justifiez pourquoi la condition $\beta < 1/\lambda$ est suffisante pour que la route $1$ soit toujours stable quelle que soit la valeur de $p$.

e) Quelle est la condition de stabilité sur la route $2$?

f) La police veut optimiser le routage, c'est à dire, elle veut minimiser le nombre moyen de voiture dans le réseau. Quel est la valeur de $p$ qu'elle devrait choisir afin de minimiser le nombre total de voitures dans les deux routes?

g) La valeur de $p$ est-elle unique? Supposons que $\beta < 1/\lambda$, dans ce cas-la la valeur de $p$ est-elle unique? (aide: rappel que toujours $0 \leq p \leq 1$).

h) Quelle est la condition pour que tout le traffic soit acheminé sur la route $1$? Interprèter le résultat en fonction des équations de $E[N_1]$ et $E[N_2]$.

i) Quelle est la condition sur $\alpha$ pour que tout le traffic soit acheminé sur la route $2$?