Problème No 2

On considère un faisceau téléphonique de capacité N circuits. Les appels arrivent sur ce faisceau suivant un processus de Poisson de taux λ et ont une durée exponentiellement distribuée de moyenne $1/\mu$.

Q.1 Quelle est la valeur du trafic offert Y ? Que représente ce trafic offert ?

Q.2 Quelle est la formule donnant la probabilité de blocage des appels ? Démontrer cette formule, en précisant le détail des calculs.

Q.3 Quel est la valeur du trafic écoulé X ? Que représente ce trafic écoulé ?

Q.4 Considérons un système de 4 serveurs. La durée de traitement sur un serveur est exponentiellement distribuée de moyenne 4 minutes. Les arrivées se font suivant un processus de Poisson à raison d'en moyenne 1 client toutes les 2 minutes. Si tous les serveurs sont occupés, un client qui arrive est rejeté du système. Quelle est la probabilité que tous les serveurs soient occupés ? Quel est le nombre moyen de serveurs occupés ?

Q.5 Le calcul de la probabilité de blocage pour les valeurs importantes de la capacité N pose problème car la fonction d'Erlang-B fait intervenir des factorielles qui peuvent entraîner des des dépassements de capacité numérique sur la représentation des nombres entiers. Quelle récurrence peut-on utiliser pour contourner ce problème ?

Q.6 Pour de grandes valeurs de la capacité N, la récurrence précédente peut prendre trop de temps de calcul. Notons $c = Y/N$. On peut alors utiliser l'approximation suivante de la formule d'Erlang-B :

$$E(Y,N) \approx \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi N}}\, e^{N(1-c+\log(c))} & ,0 < c < 1 \\[2ex] \sqrt{\dfrac{2}{\pi N}} & ,c = 1 \\[2ex] 1 - \dfrac{1}{c} & ,c > 1 \end{cases} \tag{1}$$

où $\log()$ représente le logarithme népérien. Démontrer cette approximation dans le cas $c < 1$. On utilisera le fait que P_0 peut être approximé par $exp(-Y)$ (le justifier) ainsi que la formule de Stirling,

$$N! = \sqrt{2\,\pi\,N}\, N^N\, exp(-N)$$

Q.7 Supposons $N = 124$. En utilisant la formule précédente, donner une approximation de la probabilité de blocage pour Y=99.2, Y=124 et Y=148.8.

Q.8 Pour un trafic offert Y donné, on cherche la plus petite capacité N^* telle que la probabilité de blocage soit inférieure à P=1%,

$$P = 0.01 > E(Y,N^*)$$

Proposer un algorithme exact permettant de trouver la valeur de N^*.

Q.9 L'algorithme de la question précédente peut prendre trop de temps de calcul. Une autre approche est d'utiliser l'approximation suivante :

$$N^* \approx \begin{cases} \frac{1}{4}\left[\left\{2\sqrt{Y} \,+\, \sqrt{2\log(A)}\right\}^2 - 3 - B\right] & ,P \leq \sqrt{2/(\pi Y)} \\ \\ Y\,(1-P) & ,\text{sinon} \end{cases} \tag{2}$$

où,

$$1/A = \left[(4 \,-\, P\sqrt{2\pi Y})\, P\sqrt{2\pi Y}\right]/4 \quad \text{et} \quad 1/B = 4\,P + 0.25\,Y + 1/9$$

En utilisant cette formule, déterminer le plus petit nombre de circuits N^* telle que la probabilité de blocage soit inférieure à 1% pour un trafic offert Y de 100 Erlangs. Pour le même trafic offert, quelle est la capacité pour P=10% ?