INSA

Signaux aléatoires
Travaux dirigés 2
Durée : 1 h 15

Exercice 1 :
Soit $x(t)$ un processus stochastique continu donné par sa moyenne $m_x(t)$ et sa matrice de corrélation $R_x(t, \tau)$. Calculer la moyenne et la variance des v.a. $z = x(5)$ et $w = x(8)$ ainsi que la covariance.
Exercice 2 :
Soit le processus stochastique $x(t) = r\cos(\omega t + \phi)$ où ω est une v.a. de densité de probabilité $p_\omega(\alpha)$ et ϕ est une v.a. uniformément distribuée sur $[-\pi\ ,\ \pi]$, ω et ϕ sont indépendantes. r est une variable réelle. Calculer la moyenne et la corrélation de $x(t)$.
Exercice 3 :
Soit le processus stochastique $x(t) = r\cos(\omega t + \phi)$ où r est une v.a. . ϕ et ω sont des variables réelles. $x(t)$ est-il stationnaire au sens large ?
Exercice 4 :
Soit le processus stochastique $x(t) = r\cos(\omega t + \phi)$ où ϕ est une v.a. uniformément distribuée sur $[-\pi\ ,\ \pi]$. r et ω des variables réelles.

1- Montrer que $x(t)$ est stationnaire au sens large.

2- Montrer que le processus est à moyenne et à corrélation ergodiques.

Exercice 5 :
On définit une certaine classe de signaux $y(t)$ par :

$$y(t) = rx(t)\cos(\omega_p t + \phi)$$

où $x(t)$ est un signal aléatoire stationnaire modulant une porteuse sinusoidale $r\cos(\omega_p t + \phi)$. La moyenne de $x(t)$ est nulle, sa corrélation est $R_x(\tau)$ et sa densité spectrale de puissance est $S_x(\omega)$. r et ω sont des constantes alors que ϕ est uniformément répartie sur $[0\ ,\ 2\pi]$. En supposant que ϕ et $x(t)$ sont indépendants, calculer la valeur moyenne, la corrélation et le spectre de puissance de $y(t)$.
Exercice 6 :
On considère le processus aléatoire $y(t)$ défini par :

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$$

où $x(t)$ est donnée par $x(t) = A\cos\omega t$, ω étant constante et A vérifiant une loi normale $A \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Déterminer la fonction densité de probabilité de $y(t)$ à l'instant t_k.
Exercice 7 :
On considère le processus stochastique $x(t) = a + bt$ où $a \sim \mathcal{N}(0, \sigma_a^2)$ et $b \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$. Calculer la densité de probabilité conjointe de $x(t)$ sur la partition $\{t_1, \cdots, t_n\}$.

Signaux aléatoires
Travaux dirigés 2 : correction
Durée : 1 h 15

Exercice 1 :
Soit $x(t)$ un processus stochastique continu donné par sa moyenne $m_x(t)$ et sa matrice de corrélation $R_x(t,\tau)$.

$$E[z] = E[x(5)] = m_x(5)$$

$$E[w] = E[x(8)] = m_x(8)$$

De même,

$$var(z) = E[x(5)^2] - m_x^2(5) = R_x(5,5) - m_x^2(5)$$

$$var(w) = E[x(8)^2] - m_x^2(8) = R_x(8,8) - m_x^2(8)$$

Finalement,

$$cov(z,w) = E[(x(5) - m_x(5))(x(8) - m_x(8))] = R_x(5,8) - m_x(5)m_x(8)$$

Exercice 2 :
Soit le processus stochastique $x(t) = r\cos(\omega t + \phi)$ où ω est une v.a. de densité de probabilité $p_\omega(\alpha)$ et ϕ est une v.a. uniformément distribuée sur $[-\pi\ ,\ \pi]$, ω et ϕ sont indépendantes. r est une variable réelle.
La moyenne est donnée par :

$$m_x(t) = E[x(t)] = E[r\cos(\omega t + \phi)] = rE[\cos(\omega t + \phi)] = rE[\cos\omega t \cos\phi] - rE[\sin\omega t \sin\phi]$$

Comme les deux variables ω et ϕ sont indépendantes :

$$m_x(t) = rE[\cos\omega t]E[\cos\phi] - rE[\sin\omega t]E[\sin\phi]$$

Comme,

$$\left\{\begin{array}{l} E[\cos\phi] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos\beta d\beta = 0 \\ \\ E[\sin\phi] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin\beta d\beta = 0 \end{array}\right.$$

on obtient finalement :

$$m_x(t) = 0$$

La corrélation de $x(t)$ est définie par :

$$R_x(t,t+\tau) = E[r^2\cos(\omega t+\phi)\cos(\omega(t+\tau)+\phi)]$$

Soit, par le même raisonnement,

$$R_x(t,t+\tau) = \frac{r^2}{2}E[\cos\omega\tau] + \frac{r^2}{2}E[\cos(2\omega t+\omega\tau+2\phi)] = \frac{r^2}{2}E[\cos\omega\tau]$$

Finalement, on obtient,

$$R_x(t,t+\tau) = \frac{r^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\alpha\tau)p_\omega(\alpha)d\alpha$$

Exercice 3 :

Soit le processus stochastique $x(t) = r\cos(\omega t+\phi)$ où r est une v.a. . ϕ et ω sont des variables réelles. Sa moyenne est donnée par :

$$E[x(t)] = \cos(\omega t+\phi)E[r]$$

Celle-ci n'est constante que si $E[r] = 0$. La corrélation peut s'écrire :

$$R_x(t,t+\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \cos(\omega t+\phi)\cos(\omega(t+\tau)+\phi)E[r^2]$$

On obtient finalement,

$$R_x(t,t+\tau) = \frac{E[r^2]}{2}[\cos\omega\tau + \cos(2\omega t+2\phi+\omega\tau)]$$

Cette dernière expression dépend explicitement de t et de τ. Le processus stochastique n'est donc pas SSL.

Exercice 4 :

Soit le processus stochastique $x(t) = r\cos(\omega t+\phi)$ où ϕ est une v.a. uniformément distribuée sur $[-\pi\ ,\ \pi]$. r et ω des variables réelles.

1- On calcule la moyenne et la corrélation de $x(t)$. La moyenne est calculée par :

$$m_x(t) = E[x(t)] = E[r\cos(\omega t+\phi)] = rE[\cos(\omega t+\phi)]$$

La densité de probabilité de la v.a. ϕ est :

$$p_\phi(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & -\pi \le \alpha \le \pi \\ \\ 0 \text{ ailleurs} & \end{cases}$$

On obtient donc,

$$m_x(t) = r\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega t+\alpha)p_\phi(\alpha)d\alpha = \frac{r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\omega t+\alpha)d\alpha = 0$$

La corrélation s'écrit :

$$R_x(t,t+\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$$

On obtient donc :

$$
\begin{aligned}
R_x(t,t+\tau) &= \frac{r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\omega t+\alpha)\cos(\omega(t+\tau)+\alpha)d\alpha \\
&= \frac{r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}[\cos\omega\tau+\cos(2\omega t+2\alpha+\omega\tau)]d\alpha \\
&= \frac{r^2}{2}\cos\omega\tau
\end{aligned}
$$

La moyenne de $x(t)$ est constante et sa corrélation ne dépend que de τ, l'écart entre les deux instants de calcul, $R_x(t,t+\tau) = R_x(\tau)$ donc le processus stochastique $x(t)$ est SSL. De plus, la fonction $R_x(\tau)$ est périodique de période $2\pi/\omega$.

2- On calcule la moyenne temporelle du processus stochastique $x(t)$.

$$
\begin{aligned}
\overline{x} =< x(t) > &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} r\cos(\omega t+\phi)dt \\
&= \frac{r\omega}{4\pi}\int_{-T_0}^{T_0}\cos(\omega t+\phi)dt = 0
\end{aligned}
$$

où $T_0 = 2\pi/\omega$. On a donc $\overline{x} = m_x(t) = 0$. Le processus est à moyenne ergodique.
La moyenne temporelle de la corrélation :

$$
\begin{aligned}
\overline{R}_x(\tau) =< x(t)x(t+\tau) > &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} r^2\cos(\omega t+\phi)\cos(\omega(t+\tau)+\phi)dt \\
&= \frac{r^2}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0}\frac{1}{2}[\cos\omega\tau+\cos(2\omega t+2\phi+\omega\tau)]dt \\
&= \frac{r^2}{2}\cos\omega\tau
\end{aligned}
$$

On a donc $R_x(\tau) = \overline{R}_x(\tau)$. Le processus est donc également à corrélation ergodique.

Exercice 5 :
On définit une certaine classe de signaux $y(t)$ par :

$$y(t) = rx(t)\cos(\omega_p t+\phi)$$

où $x(t)$ est un signal aléatoire stationnaire modulant une porteuse sinusoidale $r\cos(\omega_p t+\phi)$. La moyenne de $x(t)$ est nulle, sa corrélation est $R_x(\tau)$ et sa densité spectrale de puissance est $S_x(\omega)$. r et ω sont des constantes alors que ϕ est uniformément répartie sur $[0\ ,\ 2\pi]$.
On calcule la moyenne $m_y(t)$ du processus $y(t)$.

$$
\begin{aligned}
m_y(t) = E[y(t)] &= E[rx(t)\cos(\omega_p t+\phi)] \\
&= rE[x(t)]E[\cos(\omega_p t+\phi)] = 0
\end{aligned}
$$

La corrélation

$$\begin{aligned}
R_y(t,t+\tau) &= E[y(t)y(t+\tau)] \\
&= E[r^2 x(t)x(t+\tau)\cos(\omega_p t+\phi)\cos(\omega_p(t+\tau)+\phi)] \\
&= \frac{r^2}{2}E[x(t)x(t+\tau)]E[\cos\omega_p\tau+\cos(2\omega_p t+\omega_p\tau+2\phi)] \\
&= \frac{r^2}{2}R_x(\tau)\cos\omega_p\tau = R_y(\tau)
\end{aligned}$$

La moyenne du processus stochastique $y(t)$ est constante et sa corrélation ne dépend que de l'écart τ entre les instants où elle est calculée, le processus stochastique $y(t)$ est SSL.
Il est donc possible de calculer la densité spectrale de puissance.

$$\Psi_y(\omega) = TF(R_y(\tau)) = \frac{r^2}{2}TF(R_x(\tau)\cos\omega_p\tau)$$

Les transformées de Fourier sont données par :

$$TF(R_x(\tau)) = S_x(\omega)$$

$$TF(\cos\omega_p\tau) = \pi\delta(\omega-\omega_p)+\pi\delta(\omega+\omega_p)$$

En appliquant le théorème de convolution :

$$\begin{aligned}
S_y(\omega) &= \frac{r^2}{4\pi}S_x(\omega) * [\pi\delta(\omega-\omega_p)+\pi\delta(\omega+\omega_p)] \\
&= \frac{r^2}{4}[S_x(\omega-\omega_p)+S_x(\omega+\omega_p)]
\end{aligned}$$

Exercice 6 :

Soit le processus stochastique $y(t)$ défini par :

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$$

où $x(t)$ est donnée par $x(t) = A\cos\omega t$, ω étant constante et A vérifiant une loi normale $A \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$.
$y(t_k)$ est une v.a. gaussienne puisque :

$$\begin{aligned}
y(t_k) = \int_0^{t_k} x(\tau)d\tau &= \int_0^{t_k} A\cos\omega\tau d\tau \\
&= \frac{A}{\omega}[\sin\omega\tau]_0^{t_k} \\
&= \frac{A}{\omega}\sin\omega t_k
\end{aligned}$$

Afin de caractériser sa densité de probabilité, il est nécessaire de calculer la moyenne et la covariance de $y(t_k)$.

$$E[y(t_k)] = \frac{\sin\omega t_k}{\omega}E[A] = 0$$

$$\sigma_y^2 = var(y(t_k)) = \left(\frac{\sin\omega t_k}{\omega}\right)^2\sigma^2$$

On obtient finalement :

$$p_y(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\dfrac{\alpha^2}{2\sigma_y^2}}$$

Exercice 7 :

On considère le processus stochastique $x(t) = a + bt$ où $a \sim \mathcal{N}(0, \sigma_a^2)$ et $b \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$.

Comme,

$$X = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ \vdots \\ x(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

le vecteur X est gaussien de moyenne et de covariance déduites de celles de a et b.

La moyenne de X est donnée par :

$$E[X] = E \begin{bmatrix} x(t_1) \\ \vdots \\ x(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E[a] \\ E[b] \end{bmatrix} = 0$$

De même, la matrice de covariance est donnée par :

$$P_X = E[XX'] = E \left[\begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix}' \right]$$

d'où par linéarité, on obtient,

$$P_X = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \rho\sigma_a\sigma_b \\ \rho\sigma_a\sigma_b & \sigma_b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix}'$$

La fonction densité de probabilité s'en déduit aisément.