# Optimisation sous incertitudes

Christian Artigues

LAAS-CNRS

9 octobre 2013

1. Optimisation stochastique
   - Contraintes probabilistes
   - Modèles avec recours

$$
\text{(PL)} \qquad \begin{aligned} \min c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\ a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{nj}x_n \geq b_j & \qquad j = 1, \ldots, m \\ x_i \geq 0 & \qquad i = 1, \ldots, n \end{aligned}
$$

Programme linéaire avec contraintes probabilistes séparées

$$
\text{(PLCP)} \qquad \begin{aligned} \min c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\ \mathbb{P}\{\tilde{a}_{1j}x_1 + \tilde{a}_{2j}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{nj}x_n \geq \tilde{b}_j\} \geq \alpha_j & \qquad j = 1, \ldots, m \\ x_i \geq 0 & \qquad i = 1, \ldots, n \end{aligned}
$$

avec $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{m \times n} \times R^m$ vecteurs aléatoires de distributions connues et $1 - \alpha_j$ : risque maximum acceptable pour la contrainte $j$.

$$\text{(PL)} \qquad \begin{aligned} \min c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\ a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{nj}x_n \geq b_j & \qquad j = 1, \ldots, m \\ x_i \geq 0 & \qquad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Programme linéaire avec contraintes probabilistes jointes

$$\text{(PLCP)} \qquad \begin{aligned} \min c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\ \mathbb{P}\left\{ \begin{array}{l} \tilde{a}_{1j}x_1 + \tilde{a}_{2j}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{nj}x_n \geq \tilde{b}_j \\ j = 1, \ldots, m \end{array} \right\} \geq \alpha & \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n & \end{aligned}$$

avec $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{m \times n} \times R^m$ vecteurs aléatoires de distributions connues et $1 - \alpha$ : risque global maximum acceptable.

$C(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \geq \alpha\}$ avec deux représentations alternatives pour la fonction de confiance $p(x)$

- $p(x) = \mathbb{P}\left\{x \in S(\tilde{a}, \tilde{b})\right\}$ où pour $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in \Omega$,

$$S(\tilde{a}, \tilde{b}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \tilde{a}_{1j}x_1 + \tilde{a}_{2j}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{nj}x_n \geq \tilde{b}_j \\ j = 1, \ldots, m \end{array} \right\}$$

  $=$ ensemble des $x$ réalisables si la réalisation des variables aléatoires est $(\tilde{a}, \tilde{b})$

- $p(x) = \mathbb{P}\left\{(\tilde{a}, \tilde{b}) \in K(x)\right\}$ où pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$K(x) = \left\{ (\tilde{a}, \tilde{b}) \in \Omega \;\middle|\; \begin{array}{l} \tilde{a}_{1j}x_1 + \tilde{a}_{2j}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{nj}x_n \geq \tilde{b}_j \\ j = 1, \ldots, m \end{array} \right\}$$

  $=$ ensemble des réalisations des variables aléatoires favorables à $x$

$$\mathbb{P}[x \geq \tilde{b}] \geq \alpha$$

Ensemble des $x$ réalisables pour la réalisation $\tilde{b}$ : $S(\tilde{b}) = [\tilde{b}, \infty)$

Ensemble des $\tilde{b}$ favorables pour un $x$ donné : $K(x) = (-\infty, x]$

Fonction de confiance
$p(x) = \mathbb{P}[x \in S(\tilde{b})] = \mathbb{P}[\tilde{b} \in K(x)] = P[x \geq \tilde{b}] = F(x)$ où $F(x)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire $\tilde{b}$

Ensemble réalisable $C(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \geq \alpha\} = [F^{-1}(\alpha), \infty)$, s'il est possible d'inverser la fonction de répartition $F$

Alors, l'inégalité $P[x \geq \tilde{b}] \geq \alpha$ a un équivalent déterministe

$$x \geq F^{-1}(\alpha)$$

Le programme linéaire avec contraintes en probabilités séparées et où seul le second membre est aléatoire (vecteur $\tilde{b}$)

$$\mathbb{P}[a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq \tilde{b}_j] \geq \alpha \quad j = 1, \ldots, m$$

a un équivalent déterministe

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq F^{-1}(\alpha) \quad j = 1, \ldots, m$$

Le problème est de calculer $F^{-1}(\alpha)$

Soit une contrainte où seul un coefficient des variables de décision est aléatoire:

$$\mathbb{P}[\tilde{a}x_1 + 2x_2 \geq 8] \geq \alpha$$

Si $x_1 \neq 0$ on a $\tilde{a} \geq \frac{(8-2x_2)}{x_1}$

Si $x_1 = 0$, la contrainte devient déterministe $x_2 \geq 8$. d'où

$$p(x) = \mathbb{P}[\tilde{a}x_1 + 2x_2 \geq 8] = \begin{cases} 1 - F(\frac{8-2x_2}{x_1}) & x_1 > 0 \\ 0 & x_1 = 0 \text{ et } x_2 < 4 \\ 1 & x_1 = 0 \text{ et } x_2 \geq 4 \\ F(\frac{8-2x_2}{x_1}) & x_1 \leq 0 \end{cases}$$

$C(\alpha) = \{x : x_1 = 0, x_2 \geq 4\} \cup \{x : x_1 > 0, F^{-1}(1-\alpha)x_1 + 2x_2 \geq 8\} \cup \{x : x_1 \leq 0, F^{-1}(\alpha)x_1 + 2x_2 \geq 8\}$

Exercice : calculer $C(\alpha)$ avec $\tilde{a} \sim \mathcal{U}[3,4]$, $\alpha = 0,4$, $\alpha = 0,5$ et $\alpha = 0,7$.

Soit $x \in \mathbb{R}^2$. On considère les scénarios :

$$\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \begin{cases} (3,0) & \text{avec prob. } 1/7 \\ (0,3) & \text{avec prob. } 2/7 \\ (1,1) & \text{avec prob. } 4/7 \end{cases}$$

et la contrainte probabiliste $\mathbb{P}[\tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 \leq 1] \geq \alpha$

$$S(\tilde{a}) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 1/3\}; & \tilde{a} = (3,0) \\ \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 1/3\}; & \tilde{a} = (0,3) \\ \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 1\}; & \tilde{a} = (1,1) \end{cases}$$

Exercice : calculer $C(\alpha)$ pour $\alpha = 6/7$

Autre expression de $C(\alpha)$. Soit $K_\alpha$ l'ensemble des ensembles $K$ de réalisation de $(\tilde{a}, \tilde{b})$ tels que $\mathbb{P}[(\tilde{a}, \tilde{b}) \in K] \geq \alpha$. Alors

$$C(\alpha) = \cup_{K \in K_\alpha} \cap_{(\tilde{a}, \tilde{b}) \in K} S(\tilde{a}, \tilde{b})$$

$S(\tilde{a}, \tilde{b})$ est un ensemble convexe donc $\cap_{(\tilde{a}, \tilde{b}) \in K} S(\tilde{a}, \tilde{b})$ aussi. Par contre $C(\alpha)$ en tant qu'union d'ensembles convexes n'est en général pas convexe.

- Pour les cas où $C(\alpha)$ est convexe, il existe des méthodes efficaces pour trouver un point ou optimiser dans $C(\alpha)$.
- $C(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \geq \alpha\}$ est convexe si $p(x)$ est quasi-concave

Cas où $C(\alpha)$ est convexe. Les résultats sont valables pour des contraintes en probabilité séparées.

- Seuls les membres de droite $\tilde{b}$ sont aléatoires avec une fonction de répartition $F$ inversible, on obtient un programme linéaire

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq F^{-1}(\alpha) \quad j = 1, \ldots, m$$

- Seul un coefficient $\tilde{a}_{ij}$ est aléatoire. Convexe si $\alpha \geq 1/2$.
  $C(\alpha) = \{x : x_1 = 0, x_2 \geq 4\} \cup \{x : x_1 > 0, F^{-1}(1-\alpha)x_1 + 2x_2 \geq 8\} \cup \{x : x_1 \leq 0, F^-1(\alpha)x_1 + 2x_2 \geq 8\}$ convexe si $-F^-1(\alpha) \leq -F^{-1}(1-\alpha) \Leftrightarrow \alpha \geq 1/2$

$$\mathbb{P}\{\tilde{a}_{1j}x_1 + \tilde{a}_{2j}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{nj}x_n \geq b_j\} \geq \alpha_j$$

avec $b$ fixé et $\tilde{a} \sim \mathcal{N}(\mu, V)$

- Normalisation : on passe de $\tilde{a}x - b \sim \mathcal{N}(\mu x - b, \sigma^2(x))$ avec $\sigma^2(x) = x^T V x$ à $\tilde{u} = \frac{\tilde{a}x - \mu x}{\sigma(x)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ de fonction de répartition $\Phi$
- donc $\mathbb{P}[\tilde{a}x \geq b] = P[\tilde{u} \geq \frac{b - \mu x}{\sigma(x)}] = \Phi(\frac{\mu x - b}{\sigma(x)})$
- $C(\alpha) = x \in \mathbb{R}^n : \mu x \geq b + \Phi^{-1}(\alpha)\sigma(x)$
- $\alpha \geq 1/2 \Rightarrow \Phi^{-1}(\alpha) \geq 0 \Rightarrow C(\alpha)$ est convexe puisque $\sigma(x)$ est convexe.

- Ensemble d'actifs financiers avec des revenus (aléatoires) $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n$
- $\tilde{\alpha} \sim \mathcal{N}(\alpha, \sigma)$
- On doit déterminer un pourcentage d'investissement dans chacun des actifs.
- Maximiser le gain attendu avec une contrainte en probabilité sur la possibilité de perte, qui doit être inférieure à $\beta$.

- Scénarios $(a^k, b^k)$, $k \in \{1, \ldots, K\}$ de probabilités $p_k$.
- On introduit une variable binaire $\delta_k \in \{0, 1\}$ telle que $\delta_k = 1 \Leftrightarrow x \in S(k)$
- Cela s'exprime par les contraintes $\tilde{a}^k x + M(1 - \delta_k) \geq \tilde{b}^k$, $k = 1, \ldots, K$
- On impose ensuite $\sum_{k=1}^{K} p_k \delta_k \geq \alpha$

- On a considéré que toutes les variables doivent être fixées avant que les paramètres aléatoires soient révélés.
- Dans certains cas seules certaines variables (dites de premier niveau) sont soumises à cette règle.
- Les autres variables (de deuxième niveau ou de **recours**) permettent d'ajuster la solution une fois les paramètres aléatoires révélés.
- Ces variables de recours permettent en général d'assurer la réalisabilité des solutions de premier niveau

- $\mathbf{x}$ vecteur de variables de décision de premier niveau
- $\mathbf{y}$ vecteur de variables de décision de second niveau (recours)
- $\mathbf{c}$ vecteur coût des variables de premier niveau
- $\tilde{\mathbf{c}}$ vecteur coût des variables de second niveau (stochastique)
- $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ matrice des contraintes et second membre du premier niveau
- $\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{d}}$ matrices des contraintes et second membre du deuxième niveau (stochastiques)

Premier niveau

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T\mathbf{x} + E[h(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{d}})] \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Deuxième niveau

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{d}}) = \min \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{y} \\ \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{y} \geq \tilde{\mathbf{d}} \\ \mathbf{y} \geq 0 \end{aligned}$$

- Il s'agit d'une généralisation de l'optimisation stochastique à deux niveaux.
- Les paramètres aléatoires sont progressivements révélés dans une série d'étapes (niveau). A chaque étape $e$
  1. les variables du niveau $e$ sont fixées (action)
  2. Les paramètres aléatoires du niveau $e$ sont révélés (observation)
  3. Les variables de recours du niveau $e$ sont fixés (réaction)
- Le processus se répète jusqu'au niveau final. L'objectif est la minimisation de l'espérance du coût total.

Voir l'exemple de gestion de production dans le cours 1

- $Q$ quantité de journaux à commander. $v$ coût d'achat d'un exemplaire. $p$ prix de vente d'un exemplaire. $g$ remise sur invendu d'un exemplaire. $B$ coût de perte de clentèle. Demande $\tilde{d} \sim \mathcal{U}[\underline{d}, \overline{d}]$.
- problème d'optimisation stochastique de minimisation du coût $\min_{Q>0} E[C(Q, \tilde{d})]$ où
$$C(Q, \tilde{d}) = \begin{cases} vQ - p\tilde{d} - g(Q - \tilde{d}) & \text{si } \tilde{d} \leq Q \\ vQ - pQ + B(\tilde{d} - Q) & \text{si } \tilde{d} \geq Q \end{cases}$$

On vend $\min(\tilde{d}, Q)$ journaux. On paye $B \max(\tilde{d} - Q, 0)$ en coût de rupture de stock. On récupère $g \max(Q - \tilde{d}, 0)$ en invendus. Le coût peut donc s'écrire :

$$C(Q, \tilde{d}) = vQ - p \min(\tilde{d}, Q) + B \max(\tilde{d} - Q, 0) - g \max(Q - \tilde{d}, 0)$$

On remarque que $\min(\tilde{d}, Q) = \tilde{d} - \max(\tilde{d} - Q, 0)$, on obtient :

$$C(Q, \tilde{d}) = vQ - p\tilde{d} - g \max(Q - \tilde{d}, 0) + (B + p) \max(\tilde{d} - Q, 0)$$

Si $f(x)$ est la densité de probabilité d'une variable aléatoire $X$, on rappelle que l'espérance d'une fontion $\phi(x)$ de cette variable aléatoire est $E(\phi(X)) = \int_0^\infty \phi(x)f(x)\mathrm{d}x$. On a donc

$$E(C(Q,\tilde{d})) = \int_0^\infty C(Q,x)f(x)\mathrm{d}x = \int_0^Q C(Q,x)f(x)\mathrm{d}x + \int_Q^\infty C(Q,x)f(x)\mathrm{d}x$$

$$E[C(Q,\tilde{d})] = vQ - pE[\tilde{d}] - g\int_0^Q (Q-x)f(x)\mathrm{d}x + (B+p)\int_Q^\infty (x-Q)f(x)\mathrm{d}x$$

$E[C(Q,\tilde{d})]$ est une fonction convexe continue quel que soit la valeur de la variable aléatoire . Son minimum est atteint lorsque sa dérivée est nulle. L'inégalité de Leibniz nous dit que

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\int_{y0}^{y1} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{y0}^{y1} \frac{\delta}{\delta x} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$E[C(Q,\tilde{d})] = vQ - pE[\tilde{d}] - g\int_0^Q (Q-x)f(x)\mathrm{d}x + (B+p)\int_Q^\infty (x-Q)f(x)\mathrm{d}x$$

En dérivant par rapport à Q (en appliquant l'inégalité de Leibniz) et en annulant au point $Q^*$ on obtient

$$v - g\int_0^{Q^*} f(x)\mathrm{d}x - (B+p)\int_{Q^*}^\infty f(x)\mathrm{d}x = 0$$

et en remarquant que $\int_0^{Q^*} f(x)\mathrm{d}x$ est la fonction de répartition $F(Q^*)$ ainsi que $\int_{Q^*}^\infty f(x)\mathrm{d}x = 1 - F(Q^*)$, on obtient :

$$F(Q^*) = \frac{B+p-v}{B+p-g}$$

Si $\tilde{d} \sim \mathcal{U}[\underline{d},\overline{d}]$, on a $F(Q^*) = \frac{Q^*-\underline{d}}{\overline{d}-\underline{d}}$ et finalement

$$Q^* = \underline{d} + (\overline{d}-\underline{d})\frac{B+p-v}{B+p-g} = \frac{(v-g)\underline{d} + (B+p-v)\overline{d}}{B+p-g}$$

# Sources


- M. Khouja. The single-period (newsvendor) problem : literature review and suggestions for future research. Omega 27. p. 537–553, 1999
- J.-F. Hêche, T. M. Liebling. D. de Werra. Recherche Opérationnelle pour Ingénieurs II. Presses Polytecniques et Universitaires Romandes. 2003
- A. Shapiro, D. Dentcheva, A. Ruszczyński. Lectures on Stochastic Programming, Modeling and Theory. MPS-SIAM Series on Optimization, 2009.
- Guillermo Gallego. Guillermo Gallego. "IEOR 4000 Production Management Lecture 7". Columbia University, 6 april 1995. http://www.columbia.edu/~gmg2/4000/pdf/lect_07.pdf
- Maarten van der Vlerk. Stochastic Programming LNMB course SP, spring 2011. University of Groningen. http://www.rug.nl/feb/MHvanderVlerk/LNMBcourseSP