Optimisation discrète sous incertitudes

Christian Artigues

LAAS-CNRS

6 novembre 2012

1. Optimisation robuste
   - Inconvénients de l'optimisation stochastique
   - Le critère minimax
   - Le critère minimax regret
   - Scénarios
   - Exemples de problèmes

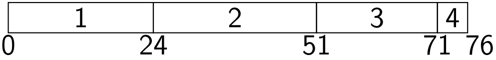
- Il n'est pas toujours facile ni même possible d'obtenir les lois de probabilité des paramètres incertains, encore moins des lois de probabilités indépendantes.
- En pratique, les décideurs peuvent vouloir être très prudent et demander que la décision soit *robuste*, i.e. qu'elle soit la meilleure (ou moins mauvaise) possible si le pire scénario se produit, ce que n'assure pas une optimisation de l'espérance de la fonction objectif.

Exemple : Retour sur le problème d'ordonnancement

$$\tilde{p}_1 \sim \mathcal{U}[23, 24] \quad \tilde{p}_2 \sim \mathcal{U}[21, 27] \quad \tilde{p}_3 \sim \mathcal{U}[20, 29] \quad \tilde{p}_4 \sim \mathcal{U}[5, 45]$$

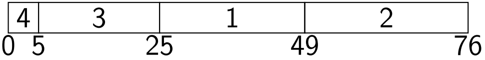
La solution qui minimise l'espérance du critère de somme des dates de fin consiste à ordonnancer les tâches selon l'ordre de la plus petite durée espérée, soit ici $1-2-3-4$ car $E[p_1] = 23,5$, $E[p_2] = 24$, $E[p_3] = 24,5$, $E[p_4] = 25$ avec $E[\sum_{j \in J} C_i] = 240$.

Exemple : Retour sur le problème d'ordonnancement (suite)
Considérons la réalisation $p_1 = 24$, $p_2 = 27$, $p_3 = 20$, $p_4 = 5$. En appliquant la solution optimale du problème d'ordonnancement stochastique, on obtient la solution ::



$\sum C_i = 222$

Considérons maintenant la solution optimale pour cette réalisation (ordre des plus petites durées) :



$\sum C_i = 155$

La solution “optimale’ ’ stochastique excède de 67 unités de temps ou de $43,2\%$ la solution optimale pour la réalisation considérée !

- Principe : obtenir des garanties **dans le pire des cas** pour une modélisation raisonnable des incertitudes (sous la forme de scénarios)

Définitions préalables

- S : ensemble (continu ou discret) de scénarios.
- D^s : réalisation des paramètres du problème pour un scénario donné $s \in S$.
- X^s : ensemble des solutions réalisables pour un scénario donné $s \in S$
- $f : X \times S$ fonction objectif : $f(x, s)$ valeur de l'objectif pour le scénario $s \in S$ et la solution $x \in X^s$

Problème d'optimisation robuste (critère minimax)

Trouver $x^* = \mathrm{argmin}_{x \in \cap_{s \in S} X^s} \max_{s \in S} f(x, s)$

On remplace la modélisation des incertitudes sous forme de loi uniforme par les intervalles correspondant à chaque loi :

$$p_1 \in [23, 24] \quad p_2 \in [21, 27] \quad p_3 \in [20, 29] \quad p_4 \in [5, 45]$$

Pour toute séquence de tâche le pire scénario pour la minimisation des dates de fin est clairement celui qui donne la durée maximale à chaque tâche.
Pour ce scénario, la séquence optimale est $1 - 2 - 3 - 4$ selon la règle des plus petites durées. C'est donc la séquence optimale pour le problème minimax. On retrouve dans ce cas la même solution que pour le cas stochastique.

Principe : Lorsque la solution appliquée est évaluée a posteriri (après la réalisation des données) un décideur peut être intéressé par la minimisation de l'écart dans le pire des cas entre la valeur de la solution qu'il applique et la valeur qu'il aurait pu obtenir s'il avait connu le scénario au départ. C'est le concept de regret $\rho(x,s)$ d'une solution x pour le scénario s

$$\rho(x,s) = f(x,s) - \min_{y \in X^s} f(y,s)$$

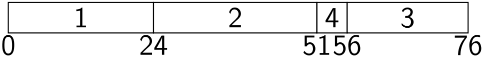
Problème d'optimisation robuste (critère minimax regret absolu)

Trouver $x^* = \text{argmin}_{x \in \cap_{s \in S} X^s} \max_{s \in S} \rho(x,s)$

Problème d'optimisation robuste (critère minimax regret relatif)

Trouver $x^* = \text{argmin}_{x \in \cap_{s \in S} X^s} \max_{s \in S} \left(\frac{\rho(x,s)}{\min_{y \in X^s} f(y,s)} \right)$

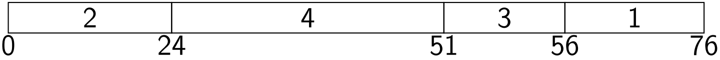
Revenons au scénario $p_1 = 24$, $p_2 = 27$, $p_3 = 20$, $p_4 = 5$, on obtient en appliquant la séquence $1 - 2 - 4 - 3$:



$\sum C_i = 207$

Le regret absolu de cette solution pour ce scénario est de 207-155=52, à comparer avec le regret absolu de la solution optimale stochastique (ou minimax) égal à 62.

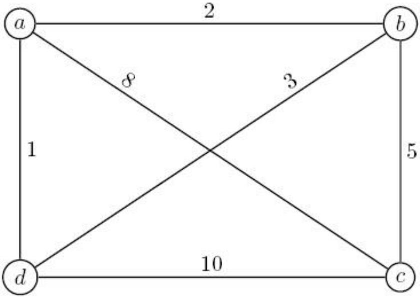
Considérons maintenant le scénario $p_1 = 23$, $p_2 = 27$, $p_3 = 20$, $p_4 = 45$, on obtient en appliquant la séquence $2 - 4 - 3 - 1$



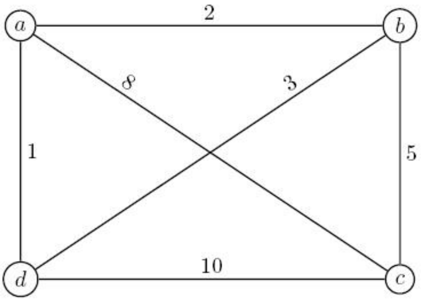
$\sum C_i = 306$

La solution optimale pour ce scénario est $1 - 3 - 2 - 4$ de valeur 248, donnant un regret relatif de $(306 - 248)/248 = 23.4\%$, à comparer avec le regret relatif de la solution optimale stochastique (ou minimax) égal à 43.2%.

Contexte : Conception d'un réseau entre 4 bureaux à moindre coût.

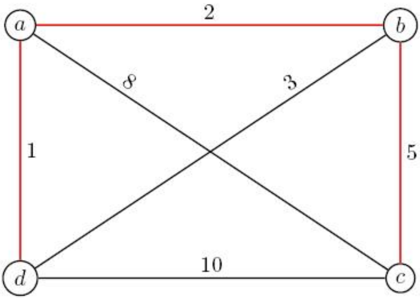


Contexte : Conception d'un réseau entre 4 bureaux à moindre coût.



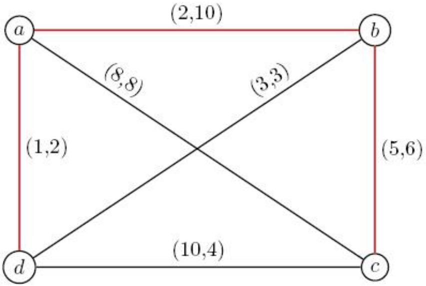
En RO-AD : Déterminer un arbre couvrant (un seul chemin entre tout couple de sommets) de poid minimum.

Contexte : Conception d'un réseau à moindre coût.



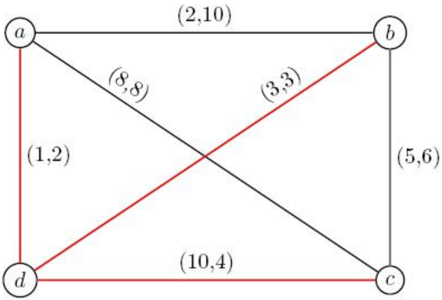
Solution optimale : $\{ad, ab, bc\}$ de coût 8.

Contexte : Conception d'un réseau à moindre coût.



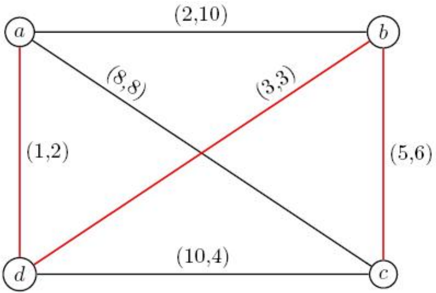
Solution optimale pour scenario 1 : $\{ad, ab, bc\}$ (8,18)

Contexte: Conception d'un réseau à moindre coût.



Solution optimale pour scenario 1 : $\{ad, ab, bc\}$ (8,18)
Solution optimale pour scenario 2 : $\{ad, bd, cd\}$ (14,9)

Contexte : Conception d'un réseau à moindre coût.



Solution opt. pour scenario 1 : $\{ad, ab, bc\}$ (8,18) max =18, Rmax=9
Solution opt. pour scenario 2 : $\{ad, bd, cd\}$ (14,9) max =14, Rmax=6
min-max (regret) ST : $\{ad, bc, bd\}$ (9,11) max =11, Rmax=2

Les approches d'optimisation robuste se distinguent par les différentes modélisation des incertitudes.

- Les scénarios sont donnés explicitement, chaque scénario donnant les valeurs des paramètres incertains pour ce scénario.
- Chaque paramètre incertain et donné sous la forme d'un intervalle de valeurs possibles $[a, b]$ et toutes les combinaisons des valeurs des paramètres sont également possibles.
- Chaque paramètre incertain et donné sous la forme d'une valeur nominale v et d'un écart possible ϵ, mais on suppose qu'au plus k paramètres peuvent s'écarter de leur valeur nominale.
- Autres modélisations (incertitudes ellipsoidales, polyhédrales, ...)

Optimiser pour le pire des scénario est une approche "conservative" (le coût des solutions peut être très élévé). Certaines des modélisations ci-dessus cherchent à réduire le "prix de la robustesse" en restreignant l'espace des scénarios [Bersimas, Sim 2004]

Un marchand de journaux souhaite déterminer le nombre d'exemplaires Q d'un journal qu'il doit commander. Il ne connait pas la demande précise mais sait qu'elle est comprise entre deux valeurs $[\underline{d}, \overline{d}]$. Chaque exemplaire commandé lui coûte v €. Chaque exemplaire vendu lui rapporte p €. Chaque exemplaire retourné comme invendu lui rapporte g €. Il paye un coût B de perte potentielle de clientèle pour chaque demande non satisfaite.

Calculer l'expression du profit en fonction de la demande d et de la quantité commandée Q.
Résoudre les problèmes d'optimisation robuste avec les critères maximin, maximin regret absolu et maximin regret relatif.
Résolu au cours 1

Ordonnancement robuste avec scénarios explicites - problème minimax

Définition du problème

- On doit ordonnancer un ensemble de tâches T sur une machine. Les tâches sont soumises à des contraintes de précédence. On note $i \prec j$ si j ne peut commencer avant la fin de i. Les tâches sant prédécesseur sont toutes disponibles à la date $t = 0$. Les tâches ont des durées et des dates de livraison incertaines définis par un ensemble S de scénarios tels que p_i^s et d_i^s désignent respectivement la durée et la date de livraison de la tâche i dans le scénario s.
- Soit Σ, l'ensemble des séquences de tâches qui respectent les contraintes de précédence. On souhaite trouver une séquence de tâches $\sigma \in \Sigma$ qui minimise le plus grand retard ($\sigma(i)$ tâche en position i, $\pi(i)$ position de la tâche i).

$$\min_{\sigma \in \Sigma} \max_{s \in S} L_{\max}(\sigma, s) \quad \text{avec} \quad L_{\max}(\sigma, s) = \max_{i \in T} (C_i(\sigma, s) - d_i^s)$$

$$\text{et } C_i(\sigma, s) = \sum_{j=\sigma(1)}^{\sigma(\pi(i)-1)} p_j^s$$

Un seul scénario : p_i, d_i déterministes

- Remarque : on n'a pas intérêt à insérer de temps d'inactivité sur la machie $\rightarrow$, date de fin de la dernière tâche $= \sum_{i \in T} p_i$.
- Algorithme de Lawler
  Soit $f_i(t) = t - d_i$ et J un ensemble de tâche initialisées aux tâches sans successeur. Q ensemble des tâches ordonnancées.
  - poser $t \leftarrow \sum_{i \in T} p_i$
  - Sélectionner la tâche $i \in J$ de plus petit coût:

$$j = \operatorname*{argmin}_{i \in J} f_i(t)$$

  - Ordonnancer j de façon à ce que $C_j = t$
  - enlever j de J et l'ajouter à Q.
  - Ajouter à J les tâches de $T \setminus Q$ dont tous les successeurs sont dans Q

p_i (déterministes), $d_i^s, s \in S$ (incertains)

- On définit un pire scénario "artificiel" $d_i^w = \max_{s \in S} d_i^s$, $\forall i \in T$

Théorème (Aloulou et Della Croce (2008))

Appliquer l'algorithme de Lawler au scénario artificiel donne la séquence qui minimise le plus grand retard dans le pire des cas.

Preuve au tableau

p_i^s, $d_i^s, s \in S$ (incertains)

- On définit l'algorithme de Lawler "minmax"
- A chaque étape de l'algorithme sélectionner la tâche $j \in J$ qui minimise $\max_{s \in S} f_j^s(\sum_{i \in T \setminus Q} p_i^s)$

Théorème (Aloulou et Della Croce (2008))

Appliquer l'algorithme de Lawler minmax donne la séquence qui minimise le plus grand retard dans le pire des cas.

Preuve au tableau

Ordonnancement robuste avec scénarios explicites - problème minimax

Définition du problème (1)

- On doit ordonnancer un ensemble de tâches T sur une machine. Les tâches ont des durées incertaines représentées par des intervalles $p_i \in [\underline{p}_i, \overline{p}_i]$. On considère la fonction objectif donnée par la somme des dates de fin des tâches.
- On souhaite trouver une séquence de tâches $\sigma \in \Sigma$ qui minimise le plus grand regret absolu.
- Soit $\sigma(i)$ la tâche en position i et $\pi(i)$ la position de la tâche i dans une séquence. Soit $\sigma_s^*(i)$ la tâche à la position i dans une solution optimale pour le scénario s. Soit $\pi_s^*(i)$ la position de la tâche i dans cette séquence optimale pour le scénario s.
- On remarque que la somme des dates de fin d'une séquence (σ, π) donnée pour un scénario s peut s'écrire

$$\sum_{i \in T} C_i(\sigma, s) = \sum_{i \in T} \pi(i) p_i^s$$

- Le regret d'une solution (σ, π) par rapport à une solution optimale (σ_s^*, π_s^*) pour un scénario s est donc

$$\sum_{i \in T} (C_i(\sigma_s^*, s) - C_i(\sigma, s)) = \sum_{i \in T} (\pi_s^*(i) - \pi(i))\, p_i^s$$

- On cherche donc la séquence (σ, π) qui minimise le plus grand regret :

$$\min_{(\sigma,\pi) \in \Sigma} \max_{s \in S} \sum_{i \in T} (\pi_s^*(i) - \pi(i))\, p_i^s$$

- Comment évaluer $\max_{s\in S}\sum_{i\in T}(\pi_s^*(i)-\pi(i))\,p_i^s$ alors que S est l'ensemble des points $p^s\in\mathbb{R}^{|T|}$ vérifiant $\underline{p}_i\leq p_i^s\leq\overline{p}_i$, $i\in T$?
- Scénario extrême : $p_i^s=\underline{p}_i$ ou $p_i^s=\overline{p}_i$, $\forall i\in T$

Théorème (Kouvelis et Yu (1997))

- *Le scénario qui maximise l'écart à l'optimum pour une séquence (σ,π) donnée est un scénario extrême.*
- *Pour ce scénario $\hat{s}$, $p_i^{\hat{s}}=\overline{p}_i$ si $\pi_{\hat{s}}^*(i)>\pi_i$ et $p_i^{\hat{s}}=\underline{p}_i$ si $\pi_{\hat{s}}^*(i)\leq\pi_i$*

preuve au tableau

On peut en déduire un algorithme polynomial pour trouver le scénario de plus grand regret absolu pour une séquence donnée. Mais la recherche de la séquence qui minimise le plus grand regret est NP-difficile.

Sources

- P. Kouvelis and G. Yu. Robust Discrete Optimization and its Applications. Kluwer Academic Publishers, 1997
- M. A. Aloulou and F. Della Croce. Complexity of single machine scheduling problems under scenario-based uncertainty. Operations Research Letters 36 338-342 (2008)
- D. Bertsimas. M. Sim. The price of robustness. Operations research 52(1) p.35-53, 2004.