Optimisation discrète sous incertitudes

Christian Artigues

LAAS-CNRS

2 octobre 2013

1 Introduction

- Problèmes d'optimisation
- L'incertitude sur les données et ses conséquences
- Bonnes pratiques d'optimisation sous incertitudes
- Prise en compte explicite des incertitudes en optimisation
- Optimisation en ligne
- Optimisation stochastique
- Optimisation robuste

Optimisation

Définition

- X : ensemble de solutions
- x : un élément de l'ensemble
- $f : X \to \mathbb{R}$: fonction **objectif**

Problème d'optimisation: trouver $x^* = \text{argmin}_{x \in X} f(x)$

Optimisation discrète / continue

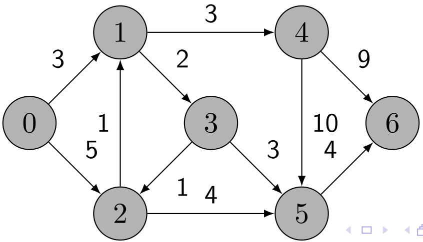
- X : ensemble discret de solutions $\implies$ Optimisation discrète
- $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | g_j(\mathbf{x}) \geq 0, j \in 1, \ldots, m\}$, avec $n, m \in \mathbb{N}$ et g_j fonctions continues de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\implies$ Optimisation continue

Exemple de problème d'optimisation

Plus court chemin dans un graphe orienté

Définitions

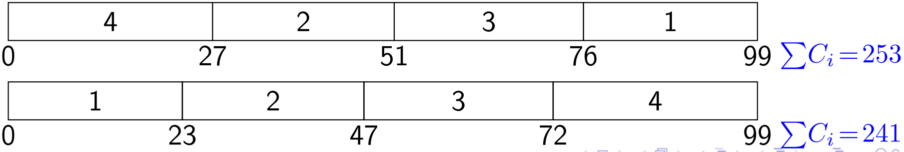
- V ensemble de $n+2$ sommets, où 0 et $n+1$ sont les sommets de début et de fin.
- E ensemble d'arcs tels que l_{ij} est la valeur de l'arc $(i,j) \in E$.
- Ensemble de solutions X : tous les chemins de 0 à $n+1$.
- Longueur d'un chemin : somme des valeurs des arcs du chemin.
- PCC : Trouver le chemin $x \in X$ de longueur minimale.



Définitions

- J ensemble de tâches
- p_j, durée d'une tâche $j \in J$
- Ensemble de solutions X : toutes les séquences de tâches ($|X| = |J|!$)
- $C_i(x)$ date de fin d'une tâche dans la séquence x
- ORDO1MACH : trouver la séquence de tâche $x^* \in X$ qui minimise $\sum_{j \in J} C_j(x)$

Example : 4 jobs. $p_1 = 23$, $p_2 = 24$, $p_3 = 25$, $p_4 = 27$



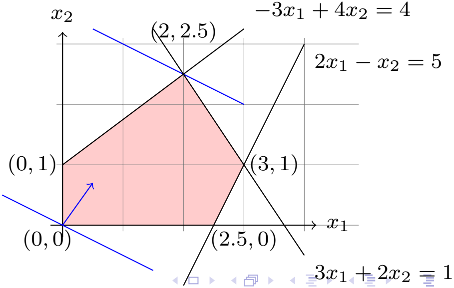
Exemple de problème d'optimisation

Programmation linéaire

Définitions

- Programmation linéaire = Problème d'optimisation continu avec contraintes et fonction objectif linéaires
- $f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n$
- $g_j(\mathbf{x}) = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{nj}x_n - b_j,\ j = 1, \ldots, m$
- PL : trouver $\mathbf{x}^* = \mathrm{argmin}\{c^T\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$

$$\begin{aligned} \max x_1 + 2x_2 \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ 2x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Exemple de problème d'optimisation

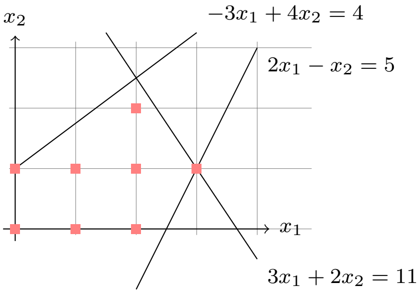
Programmation linéaire en nombres entiers

Définitions

- Programmation linéaire avec variables entières
- PL : trouver $\mathbf{x}^* = \text{argmin}\{c^T\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n, A\mathbf{x} \geq 0\}$

$$\max x_1 + 2x_2$$
$$-3x_1 + 4x_2 \leq 4$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 11$$
$$2x_1 - x_2 \leq 5$$

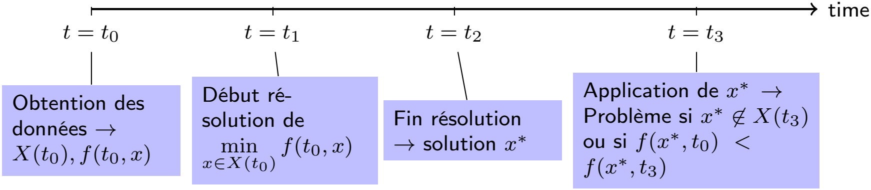
x_1, x_2 entiers



Incertitudes sur les données

Processus de décision

- Les données d'un problème d'optimisation sont en général connues de manière imprécise.
- Schématiquement la connaissance sur le problème à résoudre évolue dynamiquement au cours du temps : Ensemble des solutions $X(t)$ et objectif $f(x,t)$.
- La résolution du problème d'optimisation se fait donc à partir de données estimées au moment du calcul mais l'application des décisions est effectuée à un moment ultérieur et donc sur un problème différent.



Incertitudes sur les données

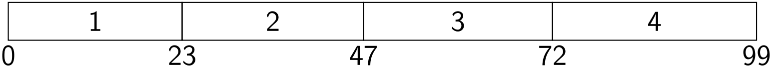
Origines des incertitudes

- **Erreurs de prévisions** : au moment de la résolution du problème certaines données sont inconnues seulement estimées (demandes des clients, durées de traitement, revenus, coûts).
- **Erreurs de mesures** : certains paramètres sont difficilement mesurables avec certitude
- **Erreurs d'exécution** : La solution calculée x^* peut ne pas être implémentée exactement comme prescrit, en raison de problèmes de précisions d'instruments ou d'erreurs humaines.

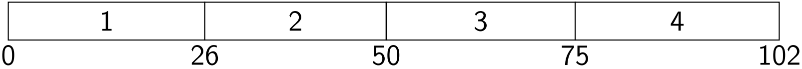
Incertitudes sur les données
Impact des incertitudes

Une petite variation des données peut avoir un grand impact !

Ordonnancement "optimal" avec $p_1 = 23$, $p_2 = 24$, $p_3 = 25$, $p_4 = 27$ de coût estimé $\sum C_i = 241$.

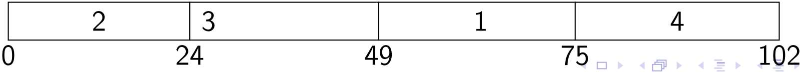


L'exécution de l'ordonnancement révèle une augmentation de p_1 de 3 unités de temps.



Le coût réel de la solution dépasse le coût estimé de 12 unités de temps ($\sum C_i = 253$) !

Des regrets ? Oui car pour les données observées, il existait une meilleure solution : 2,3,1,4 de coût $\sum C_i = 250$.



Lancer le calcul d'optimisation le plus tard possible pour avoir le problème le plus proche possible de la réalité ? Oui, mais :

- Pour des raisons de logistique, la solution doit parfois être fournie suffisament en avance par rapport à son application.
- Cette méthode permet d'éliminer certaines (mais pas toutes les) erreurs de prévisions mais pas les erreurs de mesures ni d'implémantation.

Modifier la solution une fois que les données réelles sont révélées, en relançant la résolution ? Oui, mais :

- Certaines données ne sont révélées qu'après l'application de la solution (une tâche dont on ne connait la durée réelle qu'une fois terminée, un revenu qu'on ne connait qu'une fois le produit fabriqué, une erreur de mesure...).
- On peut parfois appliquer une partie de la solution, et relancer le calcul d'optimisation pour le reste des décisions, selon la procédure **d'horizon glissant**.

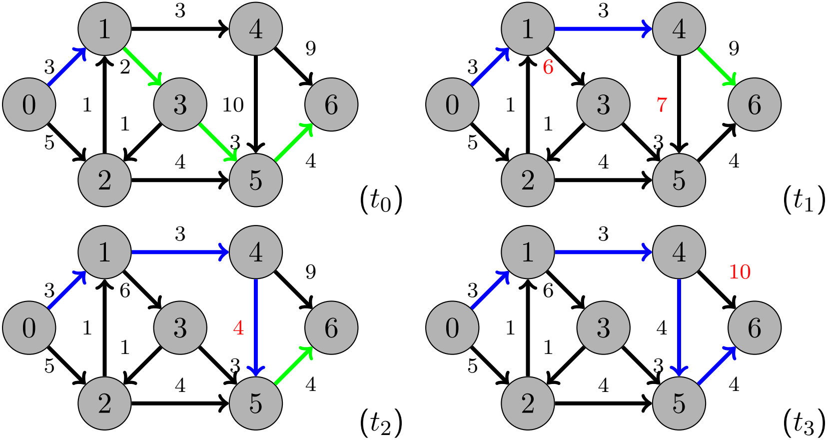
- En pratique, seulement une partie des décisions représentées par la solution x^* sont à appliquer impérativement avant une certaine date.
- Sur la base des deux bonnes pratiques précédentes, un schéma général multi-étapes peut être énoncé.
  - On supppose qu'une solution x^* est décomposable en décisions élémentaires.
  - La procédure d'optimisation par horizon glissant applique récursivement le principe suivant :

Algorithm 1 Optimisation par Horizon Glissant

1: Déterminer une date t avant laquelle un sous ensemble de décisions d doit être déterminé
2: Résoudre le problème d'optimisation $P(t')$ avec $t' \leq t$ pour que la solution x^* soit disponible avant t
3: Appliquer les décisions d à partir de x^* et réitérer la procédure

Exemple d'optimisation par horizon glissant

On fixe le premier arc (en bleu) du plus court chemin (en vert) après chaque calcul.



Modélisation des incertitudes

Quelle connaissance a-t-on des paramètres ?

- Parfaite $\rightarrow$ Optimisation **déterministe**.
- Nulle $\rightarrow$ Optimisation **en ligne**.
- Probabiliste $\rightarrow$ Optimisation **stochastique**.
- Par scénarios $\rightarrow$ Optimisation **robuste**.

En pratique, les 4 cas de figure peuvent se produire en même temps sur un même problème !

Optimisation en ligne

- Le problème est inconnu au départ et est révélé au cours du temps.
- A partir du moment où les paramètres du problème sont révélés, la décision doit être prise de manière urgente et sans connaissance du futur.

Exemple

Ordonnancement en ligne. L'ensemble des tâches J est inconnu au départ. Chaque tâche arrive à une date r_i. Le choix est limité aux tâches déjà arrivées. Algorithme en-ligne : prendre la tâche de durée la plus petite.

$p_1 = 23,\ r_1 = 2,\ p_2 = 24,\ r_2 = 2,\ p_3 = 25,\ r_3 = 1,\ p_4 = 27,\ r_4 = 0$

Ordonnancement en-ligne :

4	1	2	3

0 27 50 74 99 $\sum C_i = 250$

Ordonnancement optimal :

3	1	2	4

1 26 49 73 100 $\sum C_i = 248$

- **Instance** d'un problème : données d'un problème d'optimisation et de toutes les valeurs numériques des paramètres.
- **Facteur de compétitivité** sur une instance I (problème de minimisation) : valeur $f(I, A)$ obtenue par l'algorithme en ligne A sur l'instance I divisée par la valeur optimale $f^*(I)$ pour l'instance I.

$$\rho(A, I) = f(I, A)/f^*(I)$$

  Exemple pour l'instance précédente $\rho(A, I) \simeq 1,02$.
- **Facteur de compétitivité dans le pire des cas** : pire facteur de compétitivité sur l'ensemble des instances $\mathcal{I}$

$$\rho(A) = \max_{I \in \mathcal{I}} f(I, A)/f^*(I)$$

Objectif : obtenir un algorithme en ligne du meilleur facteur de compétitivité dans le pire des cas possible.

En étudiant souhaite aller skier dans les Pyrénées pour la première fois. S'équiper complètement lui coûterait 500 € alors que louer l'équipement lui coûterait 50 € la journée. On suppose que l'étudiant n'a aucune idée du nombre de fois où il ira skier par la suite. Il s'agit donc d'un problème d'optimisation sous incertitude. A chaque fois que l'étudiant va skier,s'il n'a pas déjà acheté il doit décider s'il achète ou s'il loue pour minimiser un coût qui ne sera connu qu'une fois le nombre de jours de ski révélé.

Donner le facteur de compétitivité dans le pire des cas d'une politique consistant pour l'étudiant à acheter l'équipement la k-ème fois qu'il va skier. En déduire la meilleure politique en termes de compétitivité dans le pire des cas.

Optimisation stochastique

- Les paramètres du problèmes d'optimisation varient selon des lois de probabilité.

Examples :

- les coûts des arcs l_{ij} dans le problème du plus court chemin $\rightarrow \tilde{l}_{ij}$
- les durées des tâches p_i dans le problème d'ordonnancement $\rightarrow \tilde{p}_i$
- le vecteur de coût c, la matrice A et le second membre b en programmation linéaire $\rightarrow \tilde{c}$, $\tilde{A}$, $\tilde{b}$.

Que signifie alors l'optimisation de la fonction objectif ?

On considère que le problème d'ordonnancement est tel que les durées des tâches varient de manière mutuellement indépendante selon des lois uniformes :

$$\tilde{p}_1 \sim \mathcal{U}[23,24] \quad \tilde{p}_2 \sim \mathcal{U}[21,27] \quad \tilde{p}_3 \sim \mathcal{U}[20,29] \quad \tilde{p}_4 \sim \mathcal{U}[5,45]$$

Problème d'ordonnancement stochastique : trouver l'ordonnancement qui minimise l'espérance de la somme des dates de fin des tâches $E[\sum_{j\in J} C_i]$.

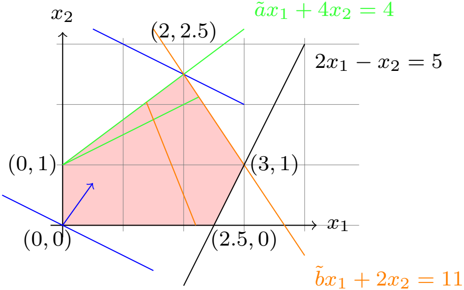
La solution optimale consiste à ordonnancer les tâches selon l'ordre de la plus petite durée espérée, soit ici $1-2-3-4$ car $E[p_1]=23,5$, $E[p_2]=24$, $E[p_3]=24,5$, $E[p_4]=25$ avec $E[\sum_{j\in J} C_i]=240$.

En optimisation stochastique le critère est généralement l'espérance de la fonction objectif

- Dans l'exemple en ordonnancement, toute séquence donne une solution réalisable, quel que soit la réalisation des paramètres aléatoires. Dans beaucoup de problèmes, une solution définie avant la connaissance des valeurs réalisées peut être irréalisable. Exemple en programmation linéaire :

$$\max x_1 + 2x_2$$
$$\tilde{a}x_1 + 4x_2 \leq 4$$
$$\tilde{b}x_1 + 2x_2 \leq 11$$
$$2x_1 - x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

avec $\tilde{a} \sim \mathcal{U}[-3,-2]$ et $\tilde{b} \sim \mathcal{U}[3,5]$



On considère de contraindre la *probabilité* de satisfaction des contraintes au niveau souhaité.

Reformulation du programme linéaire

$$
\text{(PL)} \qquad \begin{aligned}
& \min z \\
c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n &\leq z \\
a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{nj}x_n &\geq b_j \qquad j = 1, \ldots, m \\
x_i &\geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Programme linéaire contraint en probabilité

$$
\text{(PLCP)} \qquad \begin{aligned}
& \min z \\
\mathbb{P}\{\tilde{c}_1x_1 + \tilde{c}_2x_2 + \ldots + \tilde{c}_nx_n \leq z\} &\geq \alpha \\
\mathbb{P}\{\tilde{a}_{1j}x_1 + \tilde{a}_{2j}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{nj}x_n \geq \tilde{b}_j\} &\geq \beta_j \qquad j = 1, \ldots, m \\
x_i &\geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Retour sur l'exemple

$$
\begin{aligned}
\max x_1 + 2x_2 \\
\mathbb{P}\{\tilde{a}x_1 + 4x_2 \leq 4\} \geq \alpha \\
\mathbb{P}\{\tilde{b}x_1 + 2x_2 \leq 11\} \geq \beta \\
2x_1 - x_2 \leq 5 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Remarque. On peut diminuer le risque en considérant des probabilités jointes :

$$
\begin{aligned}
\max x_1 + 2x_2 \\
\mathbb{P}\{\tilde{a}x_1 + 4x_2 \leq 4, \tilde{b}x_1 + 2x_2 \leq 11\} \geq \alpha \\
2x_1 - x_2 \leq 5 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Optimisation stochastique
Exercice

On rappelle qu'une variable aléatoire $\tilde{v}$ suivant une loi uniforme $\mathcal{U}[a,b]$ a une fonction de répartition donnée par

$$F_{\tilde{v}}(x) = \mathbb{P}\{\tilde{v} \leq x\} = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pour } a \leq x < b \\ 1 & \text{pour } x \geq b \end{cases}$$

Reformuler le problème d'optimisation sous contraintes de probabilités séparées ci-dessous, en utilisant les fonctions de répartitions des variables $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$.

$$\begin{aligned} \max x_1 + 2x_2 \\ \mathbb{P}\{\tilde{a}x_1 + 4x_2 \leq 4\} \geq \alpha \\ \mathbb{P}\{\tilde{b}x_1 + 2x_2 \leq 11\} \geq \beta \\ 2x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Conclusion ?

- On a considéré que toutes les variables doivent être fixées avant que les paramètres aléatoires soient révélés.
- Dans certains cas seules certaines variables (dites de premier niveau) sont soumises à cette règle.
- Les autres variables (de deuxième niveau ou de **recours**) permettent d'ajuster la solution une fois les paramètres aléatoires révélés.
- Ces variables de recours permettent en général d'assurer la réalisabilité des solutions de premier niveau

Exemple : En ordonnancement stochastique, seul *l'ordre* des tâches doit être déterminé avant que les durées ne soient révélées mais les *dates d'exécution* peuvent être ajustées en fonction des durées réelles.

- $\mathbf{x}$ vecteur de variables de décision de premier niveau
- $\mathbf{y}$ vecteur de variables de décision de second niveau (recours)
- $\mathbf{c}$ vecteur coût des variables de premier niveau
- $\tilde{\mathbf{c}}$ vecteur coût des variables de second niveau (stochastique)
- $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ matrice des contraintes et second membre du premier niveau
- $\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{d}}$ matrices des contraintes et second membre du deuxième niveau (stochastiques)

Premier niveau

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T\mathbf{x} + E[h(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{d}})] \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Deuxième niveau

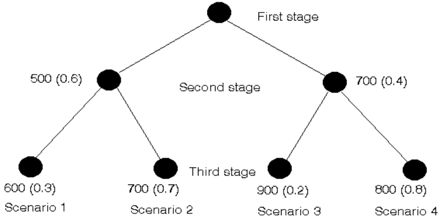
$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{d}}) = \min \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{y} \\ \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{y} \geq \tilde{\mathbf{d}} \\ \mathbf{y} \geq 0 \end{aligned}$$

Optimisation stochastique multiniveaux

- Il s'agit d'une généralisation de l'optimisation stochastique à deux niveaux.
- Les paramètres aléatoires sont progressivement révélés dans une série d'étapes (niveau). A chaque étape e
  1. les variables du niveau e sont fixées (action)
  2. Les paramètres aléatoires du niveau e sont révélés (observation)
  3. Les variables de recours du niveau e sont fixées (réaction)
- Le processus se répète jusqu'au niveau final. L'objectif est la minimisation de l'espérance du coût total.

Au début de chaque mois une entreprise doit décider de sa production en fonction d'une demande aléatoire dont la distribution est connue. La variable x_t décide combien produire au mois t en fonction du paramètre aléatoire $\tilde{d}_t$ de demande au mois t et du stock disponible en début de période y_t. Si la demande révélée est inférieure à x_t, un recours consiste à stocker le surplus (moyennant un coût de stockage h_t). Si elle est supérieure, un recours consiste à acheter les produits manquant (moyennant un coût d'approvisionnement b_t). L'objectif est la minimisation de l'espérance des coûts totaux de production, de stockage et de rupture.

On considère un cas particulier à deux niveaux (trois étapes) avec un coût de production unitaire de 2, un coût unitaire d'approvisionnement de 3 et un coût de stokage nul. La demande aléatoire $\tilde{d}_t$ est définie par 4 scénarios décrits dans la figure ci-dessous. Formuler le problème de minimisation de l'espérance du coût total.



A two-level (three-stage) binary scenario tree

Numbers are demand(probability)

http://http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/sp.html

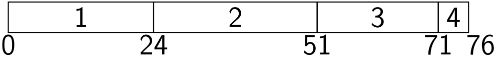
- Il n'est pas toujours facile ni même possible d'obtenir les lois de probabilité des paramètres incertains, encore moins des lois de probabilités indépendantes.
- En pratique, les décideurs peuvent vouloir être très prudent et demander que la décision soit *robuste*, i.e. qu'elle soit la meilleure (ou moins mauvaise) possible si le pire scénario se produit, ce que n'assure pas une optimisation de l'espérance de la fonction objectif.

Exemple : Retour sur le problème d'ordonnancement

$$\tilde{p}_1 \sim \mathcal{U}[23, 24] \quad \tilde{p}_2 \sim \mathcal{U}[21, 27] \quad \tilde{p}_3 \sim \mathcal{U}[20, 29] \quad \tilde{p}_4 \sim \mathcal{U}[5, 45]$$

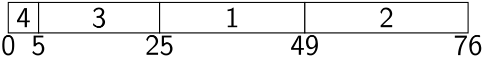
La solution qui minimise l'espérance du critère de somme des dates de fin consiste à ordonnancer les tâches selon l'ordre de la plus petite durée espérée, soit ici $1 - 2 - 3 - 4$ car $E[p_1] = 23, 5$, $E[p_2] = 24$, $E[p_3] = 24, 5$, $E[p_4] = 25$ avec $E[\sum_{j \in J} C_i] = 240$.

Exemple : Retour sur le problème d'ordonnancement (suite)
Considérons la réalisation $p_1 = 24$, $p_2 = 27$, $p_3 = 20$, $p_4 = 5$. En appliquant la solution optimale du problème d'ordonnancement stochastique, on obtient la solution ::



$\sum C_i = 222$

Considérons maintenant la solution optimale pour cette réalisation (ordre des plus petites durées) :



$\sum C_i = 155$

La solution "optimale' ' stochastique excède de 67 unités de temps ou de $43,2\%$ la solution optimale pour la réalisation considérée !

- Principe : obtenir des garanties **dans le pire des cas** pour une modélisation raisonnable des incertitudes (sous la forme de scénarios)

Définitions préalables

- S : ensemble (continu ou discret) de scénarios.
- D^s : réalisation des paramètres du problème pour un scénario donné $s \in S$.
- X^s : ensemble des solutions réalisables pour un scénario donné $s \in S$
- $f : X \times S$ fonction objectif : $f(x, s)$ valeur de l'objectif pour le scénario $s \in S$ et la solution $x \in X^s$

Problème d'optimisation robuste (critère minimax)

Trouver $x^* = \text{argmin}_{x \in \cap_{s \in S} X^s} \max_{s \in S} f(x, s)$

On remplace la modélisation des incertitudes sous forme de loi uniforme par les intervalles correspondant à chaque loi :

$$p_1 \in [23, 24] \quad p_2 \in [21, 27] \quad p_3 \in [20, 29] \quad p_4 \in [5, 45]$$

Pour toute séquence de tâche le pire scénario pour la minimisation des dates de fin est clairement celui qui donne la durée maximale à chaque tâche.
Pour ce scénario, la séquence optimale est $1 - 2 - 3 - 4$ selon la règle des plus petites durées. C'est donc la séquence optimale pour le problème minimax. On retrouve dans ce cas la même solution que pour le cas stochastique.

Optimisation Robuste

Critère minimax regret

Principe : Lorsque la solution appliquée est évaluée a posteriri (après la réalisation des données) un décideur peut être intéressé par la minimisation de l'écart dans le pire des cas entre la valeur de la solution qu'il applique et la valeur qu'il aurait pu obtenir s'il avait connu le scénario au départ. C'est le concept de regret $\rho(x, s)$ d'une solution x pour le scénario s

$$\rho(x, s) = f(x, s) - \min_{y \in X^s} f(y, s)$$

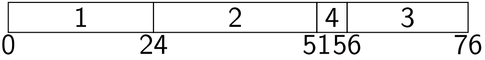
Problème d'optimisation robuste (critère minimax regret absolu)

Trouver $x^* = \mathrm{argmin}_{x \in \cap_{s \in S} X^s} \max_{s \in S} \rho(x, s)$

Problème d'optimisation robuste (critère minimax regret relatif)

Trouver $x^* = \mathrm{argmin}_{x \in \cap_{s \in S} X^s} \max_{s \in S} \left(\frac{\rho(x,s)}{\min_{y \in X^s} f(y,s)} \right)$

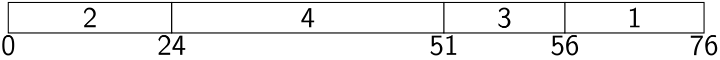
Revenons au scénario $p_1 = 24$, $p_2 = 27$, $p_3 = 20$, $p_4 = 5$, on obtient en appliquant la séquence $1 - 2 - 4 - 3$:



$\sum C_i = 207$

Le regret absolu de cette solution pour ce scénario est de 207-155=52, à comparer avec le regret absolu de la solution optimale stochastique (ou minimax) égal à 67.

Considérons maintenant le scénario $p_1 = 23$, $p_2 = 27$, $p_3 = 20$, $p_4 = 45$, on obtient en appliquant la séquence $2 - 4 - 3 - 1$



$\sum C_i = 306$

La solution optimale pour ce scénario est $3 - 1 - 2 - 4$ de valeur 248, donnant un regret relatif de $(306 - 248)/248 = 23.4\%$, à comparer avec le regret relatif de la solution optimale stochastique (ou minimax) égal à 43.2%.

Les approches d'optimisation robuste se distinguent par les différentes modélisation des incertitudes.

- Les scénarios sont donnés explicitement, chaque scénario donnant les valeurs des paramètres incertains pour ce scénario.
- Chaque paramètre incertain et donné sous la forme d'un intervalle de valeurs possibles $[a, b]$ et toutes les combinaisons des valeurs des paramètres sont également possibles.
- Chaque paramètre incertain et donné sous la forme d'une valeur nominale v et d'un écart possible ϵ, mais on suppose qu'au plus k paramètres peuvent s'acarter de leur valeur nominale.
- Autres modélisations (incertitudes ellipsoidales, polyhédrales, ...)

Un marchand de journaux souhaite déterminer le nombre d'exemplaires Q d'un journal qu'il doit commander. Il ne connait pas la demande précise mais sait qu'elle est comprise entre deux valeurs $[\underline{d}, \overline{d}]$. Chaque exemplaire commandé lui coûte v €. Chaque exemplaire vendu lui rapporte p €. Chaque exemplaire retourné comme invendu lui rapporte g €. Il paye un coût B de perte potentielle de clientèle pour chaque demande non satisfaite.

Calculer l'expression du profit en fonction de la demande d et de la quantité commandée Q.
Résoudre les problèmes d'optimisation robuste avec les critères maximin, minimax regret absolu et minimax regret relatif.