Introduction à la Programmation linéaire

1 Introduction – historique

1.1 La Programmation Linéaire : une branche de la Recherche Opérationnelle

La recherche opérationnelle apparaît en 1940 en Angleterre puis aux États-Unis à des fins de recherche militaire : il s'agissait pour le Royaume Uni d'utiliser au mieux ses moyens militaires, à l'époque insuffisants (avions, forces antiaériennes….), moyens maritimes. L'idée fondamentale était de mettre autant de soin dans l'emploi des moyens qu'on en avait mis pour les concevoir et les construire [1]

1.2 La naissance de la Programmation Linéaire

Georges Dantzig

« Linear programming can be viewed as part of a great revolutionary development which has given mankind the ability to state general goals and to lay out a path of detailed decisions to take in order to "best" achieve its goals when faced with practical situations of great complexity. Our tools for doing this are ways to formulate real-world problems in detailed mathematical terms (models), techniques for solving the models (algorithms), and engines for executing the steps of algorithms (computers and software). » Citation de Danzig tirée de [2]

L'US air force crée en 1947 le projet SCOOP de « Scientific Computation of Optimal Programs ». Le terme de « programme », résultat de la « programmation », à l'époque n'a rien à voir avec une séquence d'instruction . C'est un terme militaire qui désigne une planification (d'un déploiement militaire, logistique, …). Il s'agit donc de résoudre automatiquement des grands problèmes de planification qui étaient résolus à la main jusqu'alors sans possibilité de refaire les calculs en cas de changement de dernière minute. Georges Dantzig, brillant mathématicien venant d'avoir sa thèse et travaillant comme conseiller à l'US air force hésite à rejoindre l'Université (dont Berkeley). Pour l'en dissuader, ses collègues du Pentagone, lui donne le défi de résoudre de manière automatique (c'est-à-dire en utilisant à l'époque des machines analogiques ou à cartes perforées, les ordinateurs n'existant pas) un « programme » d'approvisionnement logistique, d'entrainement et de déploiement par étapes. Il réussit à formuler le problème sous la forme d'inéquations linéaires ou les variables représentent les décisions à prendre à chaque étape.

A l'époque le concept de fonction objectif globale n'existait pas. Les décisions étaient prises par des règles de bon sens sur la base de l'expérience des décideurs. Dantzig décide de supprimer les règles ad-hoc et de les remplacer par une fonction-objectif explicite linéaire également. Il invente ensuite l'algorithme du simplexe pour résoudre optimalement ce « programme linéaire » (PL). Cet algorithme est encore utilisé de nos jours dans les solveurs commerciaux.

1.3 Exemple de Programme Linéaire en planification de la production (1)

Une entreprise produisant du viagra doit déterminer son plan de production pour les 4 prochaines semaines. Elle produit en régime normal jusqu'à 100 tonnes de viagra par semaine. Elle peut également utiliser des heures supplémentaires en cas de besoin de quantités additionnelles jusqu'à une certaine limite dépendant de la semaine considérée. La demande en viagra de chaque semaine est connue. Les coûts de production d'un kilo de viagra en régime normal et en heures supplémentaires sont donnés par semaines. Il est possible de stocker jusqu'à 70 tonnes de viagra d'une semaine à l'autre avec un coût de 1,5€ par kilo. On suppose qu'on dispose d'un stock de 15 tonnes de viagra au début de la semaine.

Pour les 4 semaines la demande en tonnes est de (130,80,125,195), les coûts de production en régime normal sont (6,4,8,9). Les coûts de production en heures supplémentaires sont (8,6,10,11). Les capacités de production en heures supplémentaires sont de (60,65,70,60).

Quelle est le plan de production et de stockage à coût minimal permettant de respecter la demande ?

1) Détermination des variables de décision

X_t : quantitéde viagra produite en régime normal pendant la semaine t, pour t=1,2,3,4

y_t : quantitéde viagra produite en heures supplémentaires pendant la semaine t, pour t=1,2,3,4

I_t : quantité stockée à la fin de la semaine t, pour t=1,2,3,4

2) Ecriture des contraintes du problème

Limites de prouction

$X_t <= 100$, t=1,2,3,4

$y_1<=60$

$y_2<=65$

$y_2<=70$

$y_2<=60$

Limites de stockage

$I_t<=70$, t=1,2,3,4

Conservation du stock

$I_1=I_0+x_1+y_1-130$

$I_2=I_1+x_2+y_2-130$

$I_3=I_2+x_3+y_3-130$

$I_4=I_3+x_4+y_4-130$

Pas de rupture de stock

$I_1>=0$

$I_2>=0$

$I_3>=0$

$I_4>=0$

3) Détermination de la fonction objectif

Minimiser

$6x_1+4x_2+8x_3+9x_4+8y_1+6y_2+10y_3+11y_4+1{,}5I_0+1{,}5I_1+1{,}5I_2+1{,}5I_3+1{,}5I_4$

Cet exemple est tiré de [3] Le reste du cours est tiré du site [4].

1.4 Exemple de Programme Linéaire en planification de la production (2)

Une entreprise produit deux types de produits P1 et P2. La production est effectuée au moyen de deux machines (les deux machines sont nécessaires pour produire chaque produit). Chaque machine ne peut produire qu'un type de produit à la fois, avec un rendement différent par produit. Pour une journée la machine 1 peut produire 40 Kg du produit 1 si elle y est entièrement dédiée alors qu'elle peut produire 60 Kg du produit 2 pendant le même temps. La machine 2 peut produire50 kg du produit 1 si elle y est entièrement dédiée alors qu'elle peut produire 50 Kg du produit 2 pendant le même temps. Sachant que l'entreprise peut vendre 200 € le Kg de produit de type 1 et400 € le Kg de produit de type 2, quelle quantité de produits 1 et 2 doit elle produire en une journée ?

Soit X1 la quantité de produit de type 1 produite et X2 la quantité de produit de type 2 produite. On définit le programme linéaire suivant.

Maximiser

$f(X_1,X_2)=200X_1+400X_2$

sous les contraintes

$1/40X_1+1/60X_2<=1$

$1/50X_1+1/50X_2<=1$

Restrictions de signe

$X_i >= 0, i=1,2$

2 Forme générale d'un programme linéaire

Minimiser(ou maximiser) $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n$

Sous les contraintes technologiques

$a_{i1}+a_{i2}+\dots+a_{in}x_n$ <= (ou >= ou =) b_i, i=1,…,m

Restrictions de signe

xi >=0 (ou <=0 ou s.r.s.)

3 Interprétation géométrique du cas à deux variables

La résolution des programmes linéaires est basée sur une représentation géométrique de l'ensemble des solutions réalisables et de la fonction objectif. Dans le cas à deux variables cette représentation est facilement visualisée. Considérons l'exemple (2).

Une solution est un point (x_1,x_2) du plan. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des points vérifiant l'ensemble des contraintes et les restrictions de signe, qui sont des inégalités linéaires. Si nous connaissons l'interprétation géométrique d'une inégalité linéaire sous la forme d'un ensemble de point, alors l'ensemble des solutions réalisable est l'intersection de ces ensembles.

Comment interpréter géométriquement une inégalité linéaire de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 <= b$?

3.1 Cas d'une égalité

$a_1x_1 + a_2x_2 = b \Leftrightarrow x_2= -a_1/a_2x_1+b/a_2$

Les points vérifiant l'égalité $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ appartiennent à la droite de pente $-a_1/a_2$ et d'ordonnée à l'origine b/a_2.L'espace réalisable est de dimension 1

3.2 Cas d'une inégalité

Les points respectant une des deux inégalités linéaires

$a_1x_1 + a_2x_2 <= (>=)b$

sont les points d'un des deux *demi-plans* définis par la droite $a_1x_1 + a_2x_2 = b$.

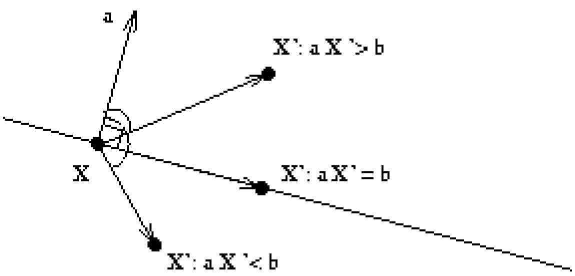
Pour vérifier cela considérons un point (X_1,X_2) qui vérifie $a_1X_1 + a_2X_2 = b$ et un point (X'_1,X'_2) qui vérifie $a_1 X'_1 + a_2 X'_2 <= (>=)b$. On a donc

$a_1 X'_1 + a_2 X'_2 <= (>=) a_1X_1 + a_2X_2$

et donc

$a_1(X'_1\text{-}X_1)+ a_2(X'_2\text{-}X_2) <= (>=)0$

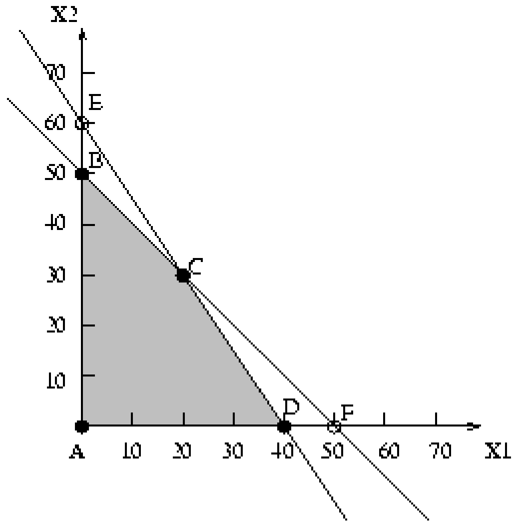
Le terme de gauche de cette inégalité est le produit scalaire des vecteurs a=<a1,a2>^{t} et Δx= <X'_1-X_1,X'_2-X_2>^{t} qui est donc aussi égal à $|a|.|\Delta x|.\cos(a, \Delta x)$. Considérons $X=(X_1,X_2)$ comme origine des vecteurs a et Δx. Alors la droite peut être définie par le point $X=(X_1,X_2)$ et l'ensemble des points $X'=(X'_1,X'_2)$ tel que le vecteur ΔX est à angle droit avec le vecteur a (produit scalaire nul). L'ensemble des points (X'_1,X'_2) qui vérifie l'inégalité > sont tels que ΔX forme un angle aigu avec a (produit scalaire positif) et l'ensemble des points qui vérifie l'inégalité < sont tels que ΔX forme un angle obtus avec a (produit scalaire négatif).



Pour savoir quel est le demi-plan qui satisfait la contrainte, il suffit de regarder si l'origine satisfait la contrainte. Si oui, il s'agit du demi-plan contenant l'origine et de l'autre sinon. Dans le cas ou la droite passe par l'origine, prendre un point qui n'appartient pas à la droite.

3.3 Espace des solutions réalisables

Dans l'exemple (2), on obtient l'ensemble réalisable suivant



3.4 Représentation de la fonction objectif dans l'espace des solutions

$f(x_1,x_2)=c_1x_1+c_2x_2$

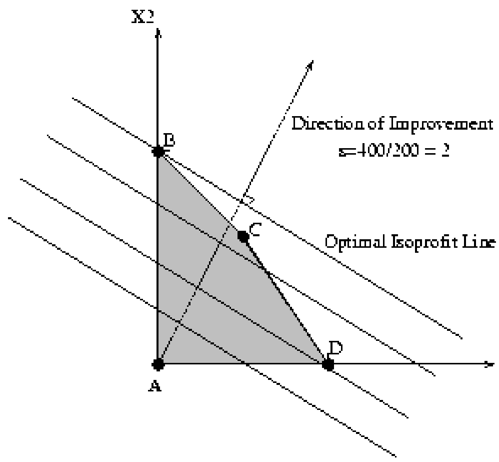
Considérons une valeur particulière, $f(x_1,x_2)=\alpha$.

L'ensemble des points (x_1,x_2) tels que $f(x_1,x_2)=\alpha$ est une droite définie par $c_1x_1+c_2x_2= \alpha$, ou encore

$x_2=- c_1/c_2\, x_1+ \alpha/c_2$

En faisant varier α on obtient un ensemble de droites de même pente (parallèles) dont l'ordonnée à l'origine augmente avec α.

3.5 Méthode graphique pour la résolution de PL à deux variables



On obtient donc une méthode graphique pour résoudre un PL à deux dimensions. Une fois l'espace réalisable représenté. On trace la droite $f(x_1,x_2)=\alpha_0$ où α_0 est une valeur initiale (par exemple $\alpha_0=0$) et on détermine la direction d'amélioration, selon qu'on veuille minimiser ou maximiser f. On simule ensuite le déplacement de la droite dans la direction d'amélioration et le point (x_1^*,x_2^*) où la droite quitte l'espace réalisable est l'optimum cherché. Ici on obtient (0,50) de valeur 20000.

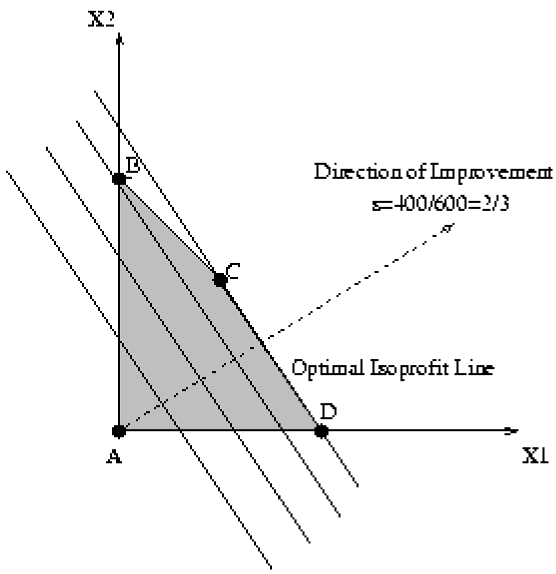
3.6 Cas de multiples solutions optimales

Considérons le problème (2) avec un profit unitaire de 600 au lieu de 200 pour le produit P1. On obtient l'ensemble de droites défini par :

$600\,x_1 + 400\,x_2 = \alpha \Leftrightarrow x_2=-3/2\,x_1 + \alpha/400$

qui sont parallèles à la droite définissant la première contrainte du problème (« isprofits »).

$1/40x_1+1/60x_2=1 \Leftrightarrow x_2=-3/2x_1+60$



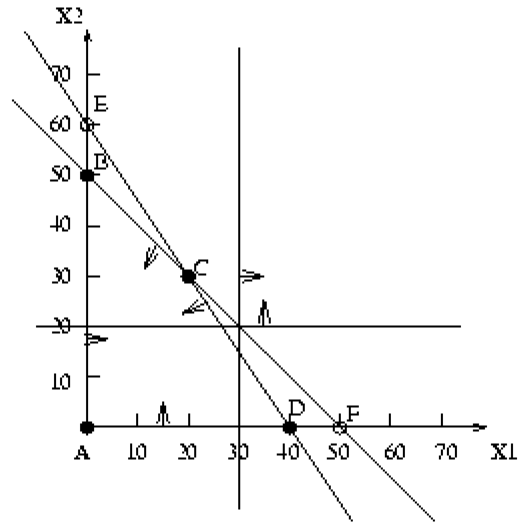
On obtient un ensemble de points optimaux (segment [C,D]) de valeur 24000.

3.7 Cas de PL irréalisable

A partir du problème(2) original, ajoutons les contraintes suivantes

$x_1>=30$

$x_2>=20$



On obtient en ensemble de solutions vide. Le PL est irréalisable.

3.8 Cas de PL non borné

Considérons le PL

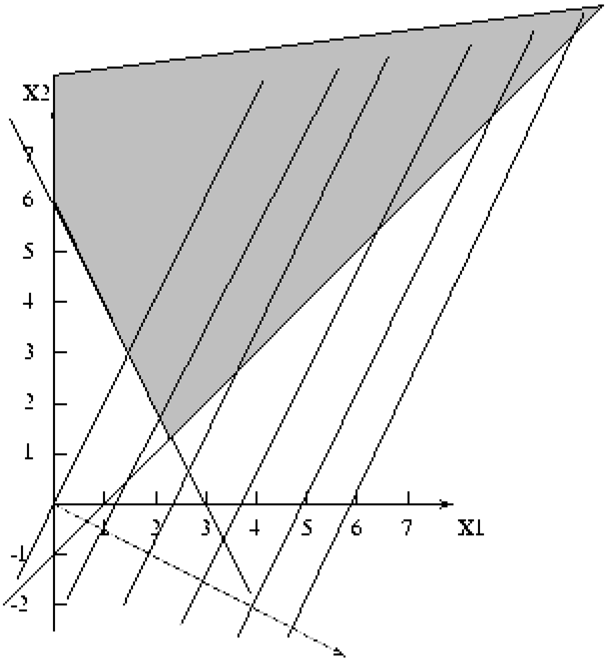
Max $f(x_1,x_2)=2x_1-x_2$

s.c.

$x_1-x_2 <=1$

$2x_1+x_2>=6$

$x_1,x_2>=0$



On obtient en ensemble infini de solutions et quel que soit la translation appliquée aux droites de l'objectif (« isoprofits »), elles ont toujours une intersection avec l'espace réalisable. On peut doc faire croitre de manière arbitraire la fonction objectif. Le PL est dit « non borné ». Attention, il y a des cas où bien que l'espace réalisable soit infini, le PL est tout de même borné. Il suffit de changer la fonction objectif en max f(x1,x2)=-x2 pour obtenir un PL borné.

4 Généralisation au cas à n variables

4.1 La géométrie des PL à n variables

Considérons maintenant un PL sous sa forme générale à n variables (voir section 2) et en particulier une inégalité :

$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n <= (>=) b$

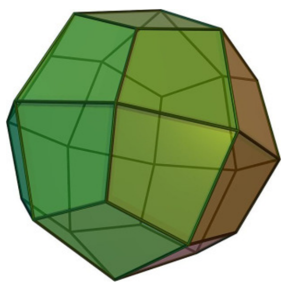
En fait, soit un point $X_0=<X_{01},X_{02},\ldots,X_{0n}>^t$ satisfaisant la contrainte à l'égalité. L'espace des solutions de

- l'équation $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = b$ est l'ensemble des points X tel que le vecteur $\Delta X=X-X_0$ est à angle droit avec le vecteur $a=<a_1,a_2,\ldots,a_n>^t$
- L'inégalité $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n > b$ est l'ensemble des points X tel que le vecteur $\Delta X=X-X_0$ est à angle aigu avec le vecteur $a=<a_1,a_2,\ldots,a_n>^t$
- L'inégalité $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n < b$ est l'ensemble des points X tel que le vecteur $\Delta X=X-X_0$ est à angle obtus avec le vecteur $a=<a_1,a_2,\ldots,a_n>^t$

Par exemple pour le cas à 3 dimensions, l'espace des solutions de l'équation $a_1x_1+a_2x+a_3x_3 = b$ est un plan perpendiculaire au vecteur $=<a_1,a_2,a_3>^t$ (c'est-à-dire le plan normal).

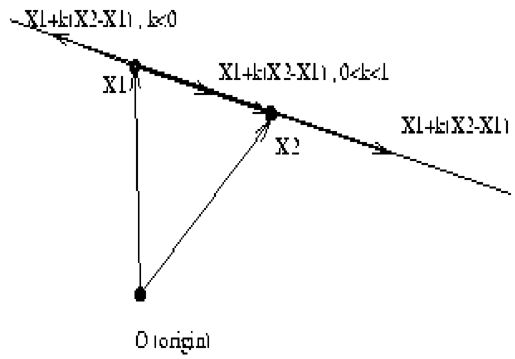
Dans le cas à dimension n, l'espace des solutions d'une égalité linaire à n variables est appelé un *hyperplan*. Par ailleurs cet hyperplan divise l'espace en deux *demi-espaces*, l'un étant l'ensemble des solutions de l'inégalité $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n >= b$, l'autre étant l'ensemble des solutions de l'inégalité $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n <= b$.

Ainsi l'ensemble des solutions du PL est-il défini comme l'intersection d'un nombre de demi-espaces ou d'hyperplan égal aux nombre de contraintes du PL, incluant les restrictions de signe. Un tel ensemble est appelé un *polyèdre*.



Nous présentons deux notions utiles pour la suite : la *droite* et le *segment*. Etant donné deux points $X_1=(X_{11},X_{12},\ldots,X_{1n})$ et $X_2=(X_{21},X_{22},\ldots,X_{2n})$ la droite est l'ensemble des points

$X_1+\kappa\ (X_2-X_1)$, $\kappa\in R$ comme le montre la figure suivante avec trois régions correspondant à $\kappa <$ 0, 0<k<1 et k >1.



Le segment entre X1 et X2 est ainsi défini par

$X_1+\kappa\ (X_2-X_1)$, $\kappa\in [0,1]$

Ou encore

$(1-\kappa)X_1+\kappa\ X_2$, $\kappa\in [0,1]$ **(a)**

Ou enfin :

$\mu\ X_1+\kappa\ X_2$

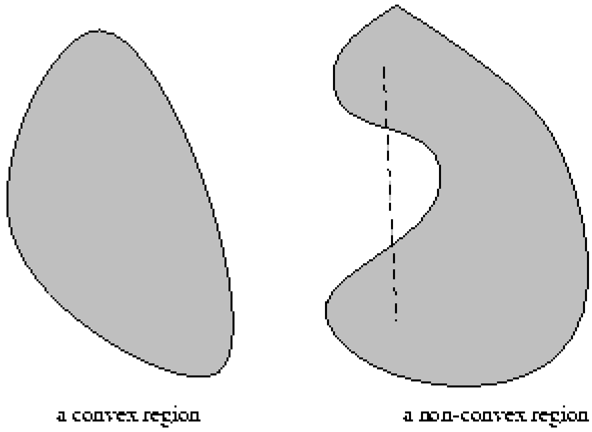
$\mu+\kappa=1$

$\mu,\kappa>=0$ **(b)**

Un point défini par (a) ou (b) est appelé une combinaison convexe de X_1 et X_2.

4.2 Polyèdres convexes et points extrêmes

Nous pouvons montrer que les polyèdres sont des ensembles convexes. Un ensemble convexe S est tel que si X_1 et X_2 sont deux points de l'ensemble, alors tout point du segment qui les connecte appartient aussi à l'ensemble, ce qui s'écrit $\forall\ X_1,X_2\in S$, $\forall\kappa\in [0,1]$: $(1-\kappa)X_1+\kappa\ X_2\in S$



On peut prouver que l'espace des solutions d'une inégalité ou d'une égalité linéaire est convexe Soit l'(in)égalité $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$ (<=)(>=)(=) b

et soit deux points $X_1=(X_{11},X_{12},\ldots,X_{1n})$ et $X_2=(X_{21},X_{22},\ldots,X_{2n})$ la vérifiant.

Pour tout $\kappa\in [0,1]$ on a

$\kappa a_1X_{11}+\kappa a_2X_{12}+\ldots+\kappa a_nX_{1n}$ (<=) (>=)(=)κb

$(1-\kappa)a_1X_{21}+(1-\kappa)a_2X_{22}+\ldots+(1-\kappa)a_nX_{2n}$ (<=) (>=)(=)$(1-\kappa)$b

En sommant les deux (in)égalités on obtient :

$a_1(\kappa X_{11}+(1-\kappa)\ X_{21})+a_2(\kappa X_{12}+(1-\kappa)\ X_{22})+\ldots+ a_n(\kappa X_{1n}+(1-\kappa)\ X_{2n})$ (<=) (>=)(=)b

et donc le point $\kappa X_1+(1-\kappa)\ X_2$ vérifie l'(in)égalité.

Puisqu'un polyèdre est une intersection de demi-espaces ou d'hyperplans tous convexes, il est aussi convexe. En effet si X1 et X2 appartiennent au polyèdre, ils appartiennent donc à tous les demi-espaces ou hyperplans, ainsi que tous les points du segment qui les joint.

Enfin un point extrême d'un polyèdre est par définition un point X_0 tel que tout segment qui relie ce point et un autre point du polyèdre a obligatoirement X_0 comme extrémité.

X_0 est un point extrême si et seulement si $X_0 = (1-\kappa)X_1 + \kappa X_2$, $X_1, X_2 \in S$, $\kappa \in [0,1] \Rightarrow X_0 = X_1 = X_2$

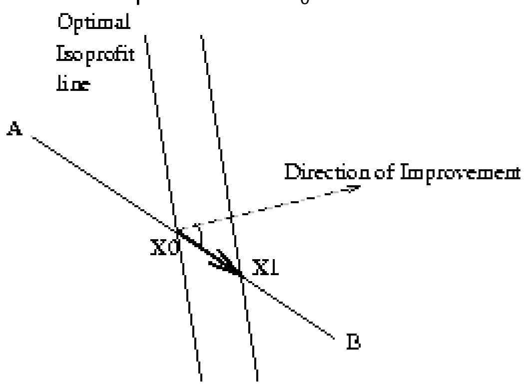
Un point extrême ne peut pas être intérieur à un segment inclus dans l'ensemble des solutions réalisables. Un point extrême est tel qu'il existe *au moins n* contraintes satisfaites à l'égalité (sinon un segment intérieur incluant le point extrême existe).

4.3 Théorème fondamental de la programmation linéaire

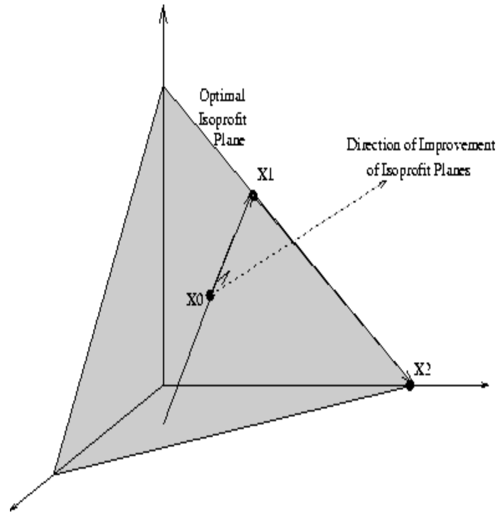
***Théorème* : Si un PL a une solution (bornée) alors il existe un point extrême optimal**

Idée de la démonstration :

1) La région réalisable est un polyèdre, donc convexe
2) Soit X0 la solution optimale. Sa valeur est z*=c.X0=c1X01+c2X02+…+cnX0n
3) X0 ne peut pas être un point intérieur d'un segment de l'espace des solutions qui n'est pas perpendiculaire à la direction d'amélioration des hyperplans de la fonction objectif. Sinon en se déplaçant dans la direction d'une des extrémités du segment on pourrait améliorer l'objectif, ce qui contredit l'optimalité de X_0.



4) X_0 peut être intérieur à un segment perpendiculaire à la direction d'amélioration de l'hyperplan optimal de l'objectif. Mais dans ce cas il existe une extrémité X_1 tel qu'une contrainte soit atteinte à l'égalité. Si X_1 est encore un point intérieur d'un segment perpendiculaire à la direction d'amélioration optimale, On applique récursivement ce principe jusqu'à obtenir un point extrême, situé à l'intérieur d'aucun segment (voir figure ci-dessous)



4.4 Caractérisation algébrique des points extrême

Caractérisation des points extrêmes

- 1 dimension : un point extrême est défini par ax=b avec a≠0
- 2 dimensions : un point extrême est défini par l'intersection de deux droites (deux équations linéairement indépendantes)
  a11x1+a12x1=b1
  a21x1+a22x2=b2
  avec

  $$\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix} \neq 0$$
- 3 dimensions : un point extrême est défini par l'intersection de trois plans (trois équations linéairement indépendantes)

  a11x1+a12x1+a13x3=b1
  a21x1+a22x1+a23x3=b2
  a31x1+a32x1+a33x3=b3

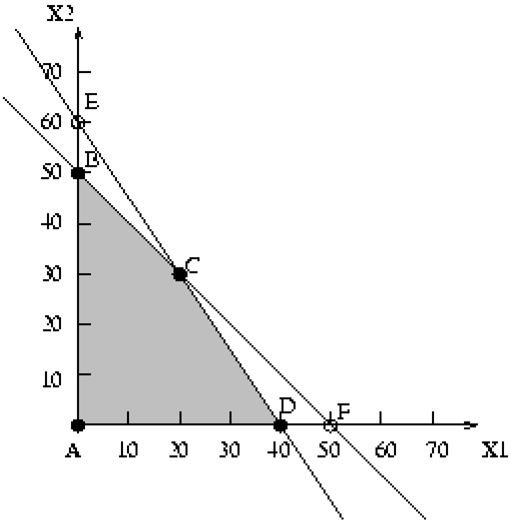
  avec

$$\begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix} \neq 0$$

- n dimensions : un point extrême est défini par l'intersection de n hyperplans (n équations linéairement indépendantes

$$\left\| \begin{bmatrix} a11 & \cdots & a1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ an1 & \cdots & ann \end{bmatrix} \right\| \neq 0$$

Considérons l'exemple à 2 dimensions



Avoir n (ici 2) contraintes satisfaite à l'égalité est une condition nécessaire mais non suffisante pour qu'un point soit un point extrême (A, B, C, D) points extrêmes mais E et F non.

4.5 Forme standard d'un PL, solution de base, solutions de base adjacentes

Reprenons la forme générale d'un PL
Minimiser(ou maximiser)
$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$

Sous les contraintes technologiques

$a_{i1}+a_{i2}+\ldots+a_{in}x_n$ <= (ou >= ou =) b_i, i=1,…,m

Restrictions de signe

xi >=0 (ou <=0 ou s.r.s.)

Le PL peut toujours s'exprimer sous la forme dite « standard » avec uniquement des contraintes égalité et des restrictions de signe sous la forme de contraintes de non négativité.
Soit un PL de la forme
Max $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$
Sous les contraintes technologiques

$a_{i1}+a_{i2}+\ldots+a_{in}x_n <= b_i$, i=1,…,m
(*m contraintes)*

Restrictions de signe

$x_i >=0$
(*n* contraintes)

On peut introduire les variables non négatives s_i (*dites variables d'écart*) pour i=1,…,m et le PL devient
Max $f(x_1,x_2,\ldots,x_n,s_1,\ldots,s_m)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$
Sous les contraintes technologiques

$a_{i1}+a_{i2}+\ldots+a_{in}x_n +s_i = b_i$, i=1,…,m
(m *contraintes)*

Restrictions de signe

$x_i,s_i >=0$ (m+n contraintes)

Il est intéressant de remarquer que si la variable d'écart si est nulle alors la contrainte technologique i est satisfaite à l'égalité. Pour un point extrême, au moins n des variables x_i et s_i doivent être nulles. De plus, le système d'équation formé par les m variables restantes et les m contraintes technologiques doit avoir une unique solution, c'est-à-dire que ses colonnes doivent être linéairement indépendantes et leur déterminant doit être nul. Enfin, la solution doit être non négative.

A partir du système Ax=b des m contraintes technologiques d'un PL à N variables sous forme standard, une *solution de base réalisable* est obtenue en annulant, N-m des variables et en résolvant le système résultant, ce qui suppose que les colonnes de la matrice des m variables restantes sont linéairement indépendantes. Ces variables sont appelées les *variables de base* (ou la base) et la solution est appelée *solution de base*. Toute solution de base telle qu'aucune des m variables est négative est appelée *solution de base réalisable.*

Exemple de mise sous forme standard pour le PL (2)

Maximiser

$f(x_1,x_2)=200x_1+400x_2$

sous les contraintes

$1/40x_1+1/60x_2 + s_1=1$

$1/50x_1+1/50x_2+ s_2=1$

Restrictions de signe

$x_i,s_i >= 0$, i=1,2

Si on choisit la base $\{x_1,x_2\}$, on a nécessairement $s_1=s_2=0$ (les deux contraintes technologiques sont atteintes) et donc la valeur des deux variables de base est déterminée par

$1/40X_1+1/60X_2 =1$

$1/50X_1+1/50X_2 =1$

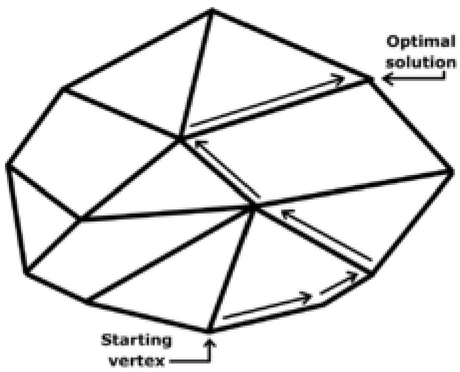
Ce qui donne le point C.
Si on choisit la base $\{x_2,s_1\}$ (la contrainte technologique 1 et la restriction de signe sur x_1 sont atteintes), on obtient
$1/60X_2 +s_1=1$
$1/50X_2 =1$
Et donc le point C est atteint.
Si par contre on choisit la base $\{x_1,s_1\}$ (la contrainte technologique 2 et la restriction de signe sur x_1 sont atteintes), on obtient
$1/40x_1+ s_1=1$
$1/50x_1 =1$
Ce qui donne le point F avec $x_1=50$ et $s_1=-1/4$. On constate qu'il ne s'agit pas d'une solution de base réalisable du fait de la négativité de s_1.
On remarque que les points B et C sont *adjacents* au sens qu'ils diffèrent seulement par une contrainte atteinte : ils satisfont tous les deux la contrainte technologique 1 à l'égalité mais B satisfait la restriction de signe sur x_1 alors que C satisfait la contrainte technologique 2. Leur base diffère seulement d'une variable.

On peut généraliser cette observation à n dimensions. Deux solutions de bases réalisables d'un PL à m contraintes technologiques sont dites adjacentes, si leurs bases ont m-1 variables communes.

4.6 L'algorithme du simplexe : principe général

On sait que si l'optimum d'un PL existe il est atteint sur un point extrême et que les points extrêmes correspondent aux solutions de base réalisable du PL mis sous forme standard. Si ce PL a N variables et m contraintes, alors une approche naïve consiste à énumérer les $\binom{N}{m} = \frac{N!}{m!(N-m)!}$ bases possibles, résoudre pour chacune d'elles le système d'équations et conserver la meilleure valeur de l'objectif pour les solutions de bases réalisables (mais N=10 et m=3 => 130 bases possibles et N=100 et m=20 => $5,36 \cdot 10^{20}$ bases possibles).

L'idée de l'algorithme du simplexe est de partir d'une solution de base réalisable et de tester son optimalité. Si elle est optimale l'algorithme s'arrête et sinon on repart d'une nouvelle solution de base, adjacente à la précédente.



4.7 Les étapes de l'algorithme du simple par un exemple

On définit les étapes de l'algorithme du simplexe à travers la résolution de l'exemple de PL (2) à partir de sa forme standard :

Maximiser

$f(x_1,x_2)=200x_1+400x_2$

sous les contraintes

$1/40x_1+1/60x_2+s_1=1$

$1/50x_1+1/50x_2+s_2=1$

Restrictions de signe

x_i,si >= 0, i=1,2

Choix d'une solution de base réalisable initiale

La première étape consiste à trouver une solution de base réalisable initiale. Ici on remarque que le point (0,0) est réalisable. On part donc de la base (s_1,s_2) et on obtient $s_1=1$ et $s_2=1$. La valeur de l'objectif est f(0,0)=0. Il a été facile de trouver la base (s_1,s_2) car ici le PL est écrit sous forme *canonique* pour cette base. C'est-à-dire que chaque variable de base apparait dans une et une seule contrainte avec un coefficient de 1, une contrainte contient au plus une variable de base et la fonction objectif est exprimée en fonction des variables hors-base. Dans ce cas, pourvu que la partie droite de l'égalité soit non négative, la solution de base est réalisable. On part donc ici du point A.

Test d'optimalité

Pour savoir si la solution de base réalisable courante est optimale, on regarde le signe des coefficients des variables hors-base (pour l'instant (x1,x2)) dans la fonction objectif. Dans le cas d'un objectif de maximisation, si tous les coefficients sont négatifs alors on ne pourra pas augmenter la valeur de l'objectif en augmentant la valeur d'une variable hors-base et la solution est optimale. Dans notre cas, les deux variables hors base ont un coefficient positif. Augmenter leur valeur permettra donc d'augmenter la valeur de l'objectif et la condition d'optimalité n'est pas vérifiée. L'algorithme se poursuit.

Choix de la variable entrante

On souhaite passer d'une solution de base réalisable a une solution de base adjacente améliorant possiblement la valeur de l'objectif. Pour cela une variable doit *sortir de la base* et une variable doit *rentrer en base*. Puisque la variable entrante va possiblement être augmentée (elle est pour l'instant nulle par définition), une règle de bon sens pour accroitre rapidement la valeur de l'objectif est de sélectionner la variable hors-base de plus grand coefficient. On prend donc ici x_2.

Détermination de la variable sortante

Considérons les contraintes technologiques

$1/40x_1+1/60x_2+s_1=1$

$1/50x_1+1/50x_2+s_2=1$

On sait que x_2 sort de la base. Puisqu'on cherche une solution de base adjacente, $x_1$va rester hors-base et donc à 0. On peut donc remplacer x_1 par 0 dans les contraintes technologiques et on obtient :

$1/60x_2+s_1=1$

$1/50x_2+s_2=1$

La variable qui sort de la base va être déterminée par la contrainte qui atteint en premier l'égalité lorsque la valeur de la variable de base augmente. Lorsqu'on augmente x_2, s_1 et s_2 vont automatiquement diminuer pour respecter l'égalité. L'augmentation maximale

de x_2 va être déterminée par la variable qui s'annule en premier :
On a donc $1/60x_2<=1$ et $1/50x_2<=1$ et donc $x_2<=50$. C'est donc s_2 qui s'annule en premier et la nouvelle base est (s_1,x_2). On obtient le point B. La valeur de l'objectif est f(0,50)=20000.

Obtention de la forme canonique en pivotant autour de la variable entrante

Pour poursuivre l'algorithme il est nécessaire d'obtenir une nouvelle forme canonique en fonction de la base. On souhaite que l'objectif soit exprimé en fonction des variables hors-base. Ici x_1 est resté hors-base. Il faut donc remplacer x_2 par son expression en fonction de x_1 et s_2. La deuxième contrainte technologique nous donne $x_2=- x_1-50 s_2+50$. On obtient donc $f(x_1, s_2)=200 x_1-400(x_1+50 s_2-50)=-200 x_1-20000 s_2+20000$

On doit aussi transformer les contraintes de telle sorte que chaque variable de base n'apparait que dans une contrainte avec un coefficient différent de 1 et que toute contrainte ne contienne qu'au plus une variable de base. Ici la contrainte 1

$1/40x_1+1/60x_2 + s_1=1$

Contient à la fois s_1 et x_2. On remplace de nouveau x_2 par son expression en fonction de x_1 et s_2 et on obtient
$1/40x_1+1/60(50- x_1-50 s_2)+ s_1=1$
$1/120 x_1 -5/6 s_2 + s_1=1$

Finalement le PL mis sous forme canonique par rapport à la base (s_1,x_2) s'écrit :
Maximiser $f(x_1, s_2)= -200 x_1-20000 s_2+20000$
s.c.
$1/120 x_1 -5/6 s_2 + s_1=1$

$x_1+ 50 s_2+x_2=50$

On peut réitérer le processus. Comme tous les coefficients des variables hors-base sont négatives, la
Condition d'optimalité est vérifiée. Le simplexe a convergé en deux itérations.

5 Références (WEB)

[1] http://serge.mehl.free.fr/ (ChronoMath , une chronologie des MATHÉMATIQUES) visité le 22/10/2009

[2] http://www2.informs.org/History/dantzig/ *article « linear programming » pour le 50è anniversaire de la RO.* visité le 22/10/2009

[3] http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/lp.html J.E. Beasley – OR Notes

[4] http://www2.isye.gatech.edu/~spyros/LP/LP.html Spyros Reveliotis - An Introduction to Linear Programming and the Simplex Algorithm